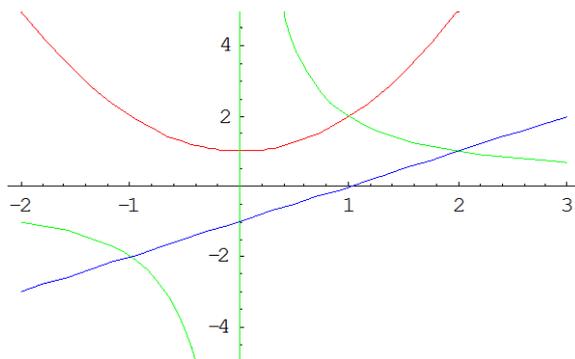


**Ejercicio 1 de la opción A del modelo 1 de 2000.**

- (a) [1 punto] Dibuja el recinto limitado por los semiejes positivos de coordenadas y las curvas  $y = x^2 + 1$ ,  $y = \frac{2}{x}$  e  $y = x - 1$ .
- (b) [1'5 puntos] Halla el área del recinto considerado en el apartado anterior.

**Solución**

(a)  
 $y = x^2 + 1$  es un parábola igual que  $y = x^2$ , pero desplazada una unidad hacia arriba en ordenadas.  
 $y = \frac{2}{x}$  es un hipérbola que pasa por (1,2) y (-1,-2)  
 $y = x - 1$  es un recta igual que  $y = x - 1$ , pero desplazada una unidad hacia la derecha en abcisas  
 Sus gráficas las tenemos en rojo, verde y azul



(b)  
 Para determinar su área determinamos sus puntos de corte  
 De  $x^2 + 1 = 2/x$ , tenemos  $x^3 + x - 2 = 0$  y su solución es  $x = 1$   
 De  $x^2 + 1 = x - 1$ , tenemos  $x^2 - x + 2 = 0$  que no tiene solución real  
 De  $2/x = x - 1$  tenemos  $x^2 - x - 2 = 0$  y se obtienen como soluciones  $x = -1$  y  $x = 2$ , en nuestro caso la que nos interesa es  $x = 2$ .  

$$\text{Area} = \int_0^1 (x^2 + 1)dx + \int_1^2 (2/x - (x-1))dx = [x^3/3 + x]_0^1 + [2\ln|x| - x^2/2 + x]_1^2 = (1/3 + 1) + [ (2\ln(2) - 2 + 2) - (2\ln(1) - 1/2 + 1) ] = 5/6 + 2\ln(2) \text{ u.a.}$$

**Ejercicio 2 de la opción A del modelo 1 de 2000.**

[2'5 puntos] Calcula a y b sabiendo que la función:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} ax + 5x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{a}{x} + bx & \text{si } x > 2 \end{cases}$  sea derivable.

**Solución**

Como  $f(x) = \begin{cases} ax + 5x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{a}{x} + bx & \text{si } x > 2 \end{cases}$  nos dicen que es derivable, también es continua en particular en  $x = 2$ , es decir  $f(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ , para que sea continua en  $x = 2$ . Sustituyendo tenemos  $2a + 20 = 2a + 20 = a/2 + 2b$   
 Como  $f(x)$  es derivable tenemos  $f'(x) = \begin{cases} a + 10x & \text{si } x \leq 2 \\ -\frac{a}{x^2} + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$ , con lo cual concretando en  $x = 2$  tenemos  $f'(2^-) = f'(2^+)$ , es decir  $a + 20 = -a/4 + b$ .  
 Resolviendo el sistema  $2a + 20 = a/2 + 2b$  con  $a + 20 = -a/4 + b$  obtenemos  $a = -20$  y  $b = -5$ .

**Ejercicio 3 de la opción A del modelo 1 de 2000.**

Sabiendo que  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$ , calcula los siguientes determinantes y enuncia las propiedades que utilices:

- (a) [1 punto]  $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix}$ .      (b) [1'5 puntos]  $\begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix}$

**Solución**

(a) Si un fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número se puede sacar factor común multiplicando al determinante

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & 5c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$$

(b) Si se cambian entre si dos columnas de un determinante el determinante cambia de signo, y a una columna se le puede sumar una combinación lineal de las otras columnas sin que el determinante cambie de valor

$$\begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix} = (\text{Cambio } 2^{\text{a}} \text{ columna por } 3^{\text{a}}) = - \begin{vmatrix} a+2b & b & c \\ d+2e & e & f \\ g+2h & h & i \end{vmatrix} = (a \text{ la } 1^{\text{a}} \text{ columna le sumo } 2^{\text{a}}x(-2)) =$$

$$= - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2.$$

**Ejercicio 4 de la opción A del modelo 1 de 2000.**

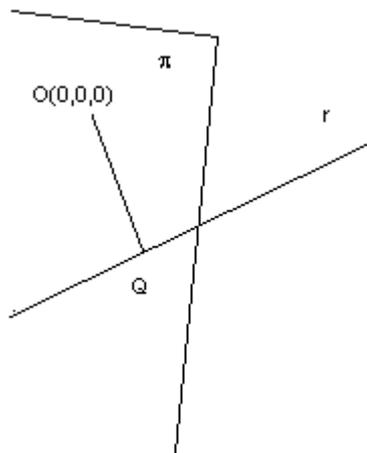
[2'5 puntos] Halla la distancia entre el origen de coordenadas y la recta intersección de los planos de ecuaciones respectivas  $x+y+2z = 4$  y  $2x-y+z = 2$ .

**Solución**

Ponemos la recta  $x+y+2z = 4$  y  $2x-y+z = 2$ , en paramétricas. Tomamos  $z = \lambda$ , con lo cual resolvemos el sistema  $x+y = 4 - 2\lambda$  e  $2x-y = 2 - \lambda$ . Sus soluciones son  $x = 2 - \lambda$  e  $y = 2 - \lambda$ , luego la recta es

$$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Calculamos el plano  $\pi$  perpendicular ( $\perp$ ) a la recta  $r$  que pasa por  $O(0,0,0)$ , su punto de corte  $Q$  con dicha recta y la distancia buscada es  $d(O,Q)$



El plano  $\pi$  tiene como vector normal  $\mathbf{n}$  el vector director de la recta  $\mathbf{v} = (-1,-1,1)$

$$\pi \equiv (-1)(x-0) + (-1)(y-0) + (1)(z-0) = -x-y+z = 0$$

$Q = r \cap \pi$ , para lo cual sustituimos la recta  $r$  en  $\pi$

$$-(2 - \lambda) - (2 - \lambda) + (\lambda) = 0 \rightarrow 3\lambda - 4 = 0 \rightarrow \lambda = 4/3$$

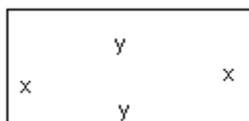
El punto  $Q$  es  $Q(2-(4/3), 2-(4/3), 4/3) = Q(2/3, 2/3, 4/3)$

$$\overrightarrow{OQ} = (2/3-0, 2/3-0, 4/3-0) = ((2/3, 2/3, 4/3))$$

$$d(O,Q) = |\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{4/9 + 4/9 + 16/9} = \sqrt{24/9} \text{ unidades de longitud (u.l.)}$$

**Ejercicio 1 de la opción B del modelo 1 de 2000.**

[2'5 puntos] De entre todos los rectángulos de 40 kilómetros de perímetro calcula las dimensiones del que tiene área máxima.

**Solución**

La función a optimizar es Área =  $A = x \cdot y$

La relación entre las variables es  $2x + 2y = 40$ , luego  $y = 20 - x$ , de donde  $A = x \cdot y = x \cdot (20 - x) = 20x - x^2$

Derivamos, igualamos a cero para obtener los posibles máximos o mínimos y comprobamos con la segunda derivada si es máximo o mínimo

$A' = 20 - 2x$ ;  $A' = 0$ ;  $20 - 2x = 0$  de donde  $x = 10$  que es el posible máximo o mínimo

$A'' = -2 < 0$ , por tanto es un máximo

Si  $x = 10$ ,  $y = 20 - 10 = 10$ , es decir es un cuadrado de lado 10 kilómetros.

**Ejercicio 2 de la opción B del modelo 1 de 2000.**

(a) [1 punto] Dibuja el recinto limitado por la curva  $y = \frac{9 - x^2}{4}$ , la recta tangente a esta curva en el punto de abscisa  $x = 1$

y el eje de abscisas.

(b) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto considerado en el apartado anterior.

**Solución**

(a)

$y = \frac{9 - x^2}{4} = \frac{9}{4} - \left(\frac{x}{2}\right)^2$ , es decir su gráfica es la de una parábola igual a la de  $-x^2$ , pero desplazada  $9/4$  hacia arriba y un

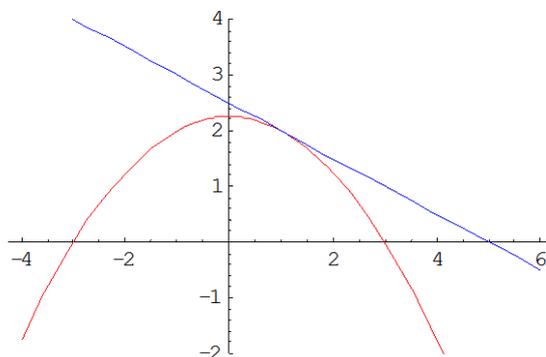
poco más abierta.

La recta tangente en  $x = 1$  es  $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$f(x) = \frac{9 - x^2}{4}$ , derivando tenemos  $f'(x) = -x/4$ , por tanto  $f(1) = 8/4 = 2$  y  $f'(1) = -1/2$ . sustituyendo tenemos que la recta

tangente es  $y - 2 = -1/2(x - 1)$ . Operando resulta  $y = -1/2x + 5/2$

Su gráfica es



Para determinar el área pedida tenemos que hallar el corte de la parábola con la recta resolviendo  $\frac{9 - x^2}{4} = -1/2x + 5/2$ , y

nos sale 1 pues es el punto de tangencia

También hay que determinar los puntos de corte de la recta y de la parábola con el eje de abscisas OX, de ecuación  $y = 0$ , resultándonos  $x = 5$  para la recta, y  $x = \pm 3$  para la parábola, del que solo nos vale el  $x = 3$ .

(b)

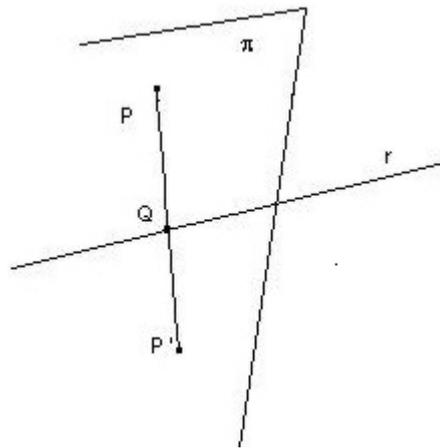
$$\text{Área} = \int_1^5 (-1/2x + 5/2) dx - \int_1^3 \left(\frac{9 - x^2}{4}\right) dx = \left[-x^2/4 + 5/2x\right]_1^5 - \left[9/4x - x^3/12\right]_1^3 =$$

$$= \left[(-25/4 + 25/2) - (-1/4 + 5/2)\right] - \left[(27/4 - 27/12) - (9/4 - 1/12)\right] = 5/3 \text{ u.a.}$$

**Ejercicio 3 de la opción B del modelo 1 de 2000.**

[2'5 puntos] Calcula las coordenadas del punto simétrico del  $(1, -3, 7)$  respecto de la recta dada por las ecuaciones  $x - 1$

$$= y + 3 = \frac{z - 4}{2}.$$

**Solución**

Ponemos la recta en paramétricas

$$\begin{aligned}x &= 1+\lambda \\y &= -3+\lambda \\z &= 4+2\lambda\end{aligned}$$

Calculamos el plano  $\pi$  perpendicular a la recta  $r$  por el punto  $P(1,-3,7)$ . El plano  $\pi$  tiene como vector normal  $\mathbf{n}$  el vector director de la recta  $\mathbf{v} = (1,1,2)$

$$\pi \equiv (1)(x-1) + (1)(y+3) + (2)(z-7) = x+y+2z-12 = 0$$

Q es el punto de corte de la recta  $r$  con el plano  $\pi$

$$(1+\lambda)+(-3+\lambda)+2(4+2\lambda) -12 = 6\lambda -6 = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

Luego el punto Q es  $Q(1+1, -3+1, 4+2) = Q(2, -2, 6)$

Q es el punto medio de P y de su simétrico  $P'$ , es decir

$$(2,-2,6) = \left( \frac{1+x}{2}, \frac{-3+y}{2}, \frac{7+z}{2} \right). \text{ Igualando miembro a miembro tenemos:}$$

$$2 = \frac{1+x}{2}, \quad -2 = \frac{-3+y}{2}, \quad 6 = \frac{7+z}{2}. \text{ De donde obtenemos } x = 3, \quad y = -1 \text{ y } z = 5, \text{ es decir el simétrico buscado es } P'(3,-1,5)$$

**Ejercicio 4 de la opción B del modelo 1 de 2000.**

Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda x + 2y = 3 \\ -x + 2\lambda z = -1 \\ 3x - y - 7z = \lambda + 1 \end{cases}$$

(a) [1 punto] Halla todos los valores del parámetro  $\lambda$  para los que el sistema correspondiente tiene infinitas soluciones.

(b) [1 punto] Resuelve el sistema para los valores de  $\lambda$  en el apartado anterior.

(c) [0'5 puntos] Discute el sistema para los restantes valores de  $\lambda$ .

**Solución**

(a)

Sean  $A$  y  $A^*$  la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2\lambda \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^* = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2\lambda & -1 \\ 3 & -1 & -7 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

Si  $|A| \neq 0$ , el sistema tiene solución única

Si  $|A| = 0$ , el sistema no tiene solución única, y tendremos que verlo caso a caso según los valores de  $\lambda$ , y estudiar si los rangos de  $A$  y de  $A^*$  coinciden o no.

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2\lambda \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 2\lambda^2 + 12\lambda - 14$$

Resolviendo  $2\lambda^2 + 12\lambda - 14 = 0$  obtenemos  $\lambda = 1$  y  $\lambda = -7$

Si  $\lambda \neq 1$  y  $\lambda \neq -7$ , el sistema tiene solución única puesto que  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$ .

Si  $\lambda = 1$ . Tenemos  $|A| = 0$ , y como  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ , rango  $(A) = 2$

En  $A^*$ , de  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ , tenemos rango  $(A^*) = 2$

Por el Teorema de Rouché-Frobeniüs como  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$ , el sistema tiene infinitas soluciones.

Si  $\lambda = -7$ . Tenemos  $|A| = 0$ , y como  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ , rango  $(A) = 2$

En  $A^*$ , de  $\begin{vmatrix} -7 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -6 \end{vmatrix} \neq 0$ , tenemos rango  $(A^*) = 3$

Por el Teorema de Rouché-Frobeniüs como  $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$ , el sistema no tiene solución y es incompatible.

(c) Ya hemos resuelto la discusión del sistema.

(b) Si  $\lambda = 1$ , como  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$ , nos quedamos solo con las dos primeras ecuaciones:

$x+2y = 3$  ;  $-x+2z = -1$ . Para resolverlo tomamos  $z = \mu$ , y nos resulta  $x=1+2\mu$  e  $y=1-\mu$ , por tanto las infinitas soluciones son  $(x,y,z) = (1+2\mu, 1-\mu, \mu)$  con  $\mu \in \mathfrak{R}$ .