OPCIÓN A

Ejercicio 1 de la Opción A de sobrantes 4 de 2001.

(a) [1'25 puntos] Determina el valor de las constantes a y b sabiendo que la gráfica de la función $f:\Re \to \Re$ definida por $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \le 0 \\ ax+b & \text{si } x>0 \end{cases}$ admite recta tangente en el punto (0,1).

(b) [1'25 puntos] ¿Existen constantes c y d para las cuales la gráfica de la función $g:\Re \to \Re$ definida por $g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \le 0 \\ cx^2+d & \text{si } x>0 \end{cases}$ admite recta tangente en el punto (0,1)? (justifica la respuesta)

Solución

(a)
Como f(x) admite recta tangente en (0,1), nos dice que es derivable en x = 0, continua en x = 0 y además f(0) = 1.

$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \le 0 \\ ax+b & \text{si } x>0 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x \le 0 \\ a & \text{si } x>0 \end{cases}$

Como es contínua en x = 0, $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{x\to 0} (e^{-}) = e^{0} = 1$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{x\to 0} (ax+b) = b$; por tanto b = 1

Como es derivable en x = 0, $f'(0^+) = f'(0^-)$

$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f'(x) = \lim_{x\to 0} (a) = a$

$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f'(x) = \lim_{x\to 0} (-e^{-x}) = -e^{0} = -1$; por tanto a = - 1

(b)
Si $g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \le 0 \\ cx^2+d & \text{si } x>0 \end{cases}$ admite recta tangente en (0,1) tiene que ser derivable en x = 0, continua en x = 0 y además g(0) = 1. Su derivada sería $g'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x \le 0 \\ 2cx & \text{si } x>0 \end{cases}$

Si es contínua en x = 0, $g(0) = \lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x)$

$g(0) = \lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} g(x) = \lim_{x\to 0} (e^{-}) = e^{0} = 1$

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} g(x) = \lim_{x\to 0} (cx^2+d) = d$; por tanto d = 1

Si es derivable en x = 0, $g'(0^+) = g'(0^-)$

$g'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} g'(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} g'(x) = \lim_{x\to 0} (2cx) = 0$

$g'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} g'(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} g'(x) = \lim_{x\to 0} (-e^{-x}) = -e^{0} = -1$; por tanto $\boxed{0 = -1}$, lo cual es absurdo.

Ejercicio 2 de la Opción A de sobrantes 4 de 2001.

Calcula (a) [1'25 puntos] $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ (b) [1'25 puntos] $\lim_{x\to \infty} x^2 \cdot e^{-3x}$

Solución

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \frac{1-\sqrt{1-0^2}}{0^2} = (0/0)$ {L'Hôpital} $= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)}{2x}$ {opero y simplifico} $= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{2x\cdot 2\sqrt{1-x^2}} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = 1/2$.

(b) $\lim_{x\to \infty} x^2 \cdot e^{-3x} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{e^{3x}} = (\infty/\infty)$ {L'Hôpital} $= \lim_{x\to \infty} \frac{2x}{3\cdot e^{3x}} = (\infty/\infty)$ {L'Hôpital} $= \lim_{x\to \infty} \frac{2}{9\cdot e^{3x}} = (2/\infty) = 0$

Ejercicio 3 de la Opción A de sobrantes 4 de 2001.

[2'5 puntos] Determina la matriz X tal que AX – 3B = O_3, siendo A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución

AX – 3B = O_3, AX = 3B .

Si |A| ≠ 0 puedo multiplicar por la matriz inversa A^{-1} y tendría X = $A^{-1}\cdot 3B = 3A^{-1}\cdot B$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1(1) - 0 + (-1)(2) = 1 - 2 = -1 \neq 0$. Por tanto existe $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot \text{Adj}(A^t)$

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & -7 & -2 \end{pmatrix}$; $\text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \frac{1}{-1}\cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

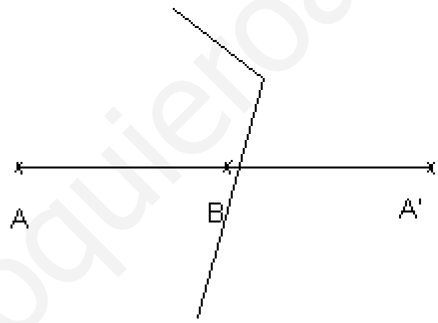
Luego $X = 3A^{-1}\cdot B = 3\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 4 & -13 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -15 \\ 12 & -39 \\ 9 & -21 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4 de la Opción A de sobrantes 4 de 2001.-

[2'5 puntos] Halla las coordenadas del punto simétrico de A(0,-1,1) con respecto a la recta $\frac{x-5}{2} = y = \frac{z-2}{3}$

Solución

El simétrico de A respecto r es el simétrico de A respecto del punto B, siendo B = r ∩ π con π el plano perpendicular a r por A, por tanto el vector normal de π es el vector director de r



La recta en paramétricas r ≡ $\begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{cases}$. Un vector director de r es **v** = (2,1,3) que es el normal de π.

π ≡ 2(x – 0) + 1(y + 1) + 3(z – 1) = 0 = 2x +y +3z – 2 = 0

B = r ∩ π

2(5 +2λ) + 1(λ) + 3(2+3λ) = 0. Operando 14λ + 14 = 0, de donde λ = - 1.

El punto B es B(5 +2(-1), -1, 2+3(-1)) = B(3,-1,-1)

B es el punto medio del segmento AA', siendo A' el simétrico del A pedido, luegp

(3,-1,-1) = ((0+x)/2, (-1+y)/2, (1+z)/2). Igualando nos queda x = 6, y = -1 y z = -3, luego el simétrico es A'(6,-1,-3)

OPCIÓN B

Ejercicio 1 de la Opción B de sobrantes 4 de 2001.

Sea f : ℜ → ℜ la función definida por f(x) = $-2x^3 - 9x^2 - 12x$

(a) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(b) [1'5 puntos] Determina los extremos relativos α y β de f con α < β y calcula $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$

Solución

f(x) = $-2x^3 - 9x^2 - 12x$

f '(x) = $-6x^2 - 18x - 12$

f '(x) = 0 → $-6x^2 - 18x - 12 = 0$ → $x^2 + 3x + 2 = 0$, cuyas soluciones son x = -1 y x = -2, que serán los posibles máximos o mínimos de la función

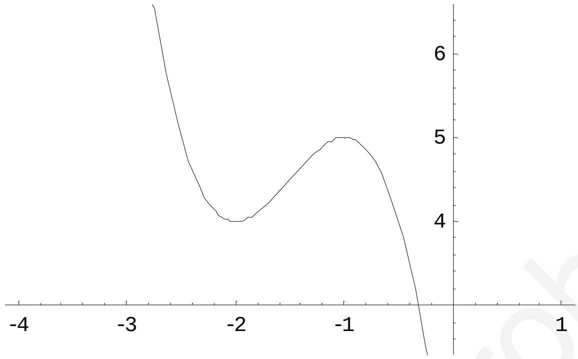
Gráficamente

f '(-3) < 0 f '(-1'5) > 0 f '(0) < 0

f(x) decrece f(x) crece f(x) decrece

f(x) decrece en (- ∞, -2)∪(-1, + ∞), crece en (-2, -1). Tendría un máximo relativo en x = -1 con valor f(-1) = 5, porque a la izquierda de –1 crece y a su derecha decrece,y un mínimo relativo en x = -2 con valor f(-2) = 4, porque a la izquierda de –2 decrece y a su derecha crece.

Aunque no la piden la gráfica es



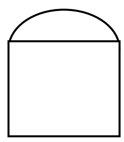
(b) Los extremos relativos ya los hemos calculado que son x = -2 y x = -1.

$\int_{-2}^{-1}$ $(-2x^3 - 9x^2 - 12x)$ dx = $\left[\frac{-2x^4}{4} - \frac{-9x^3}{3} - \frac{-12x^2}{2}\right]_{-2}^{-1}$ =

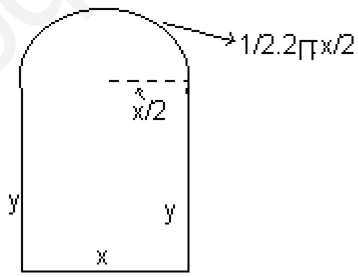
= $[(-1/2(-1)^4 - 3(-1)^3 - 6(-1)^2) - (-1/2(-2)^4 - 3(-2)^3 - 6(-2)^2)] = (-7/2) - (-8) = 9/2$

Ejercicio 2 de la Opción B de sobrantes 4 de 2001.

[2'5 puntos] Determina las dimensiones de una puerta formada por un rectángulo y un semicírculo (como en la figura), sabiendo que es la que tiene un perímetro mínimo entre las que tienen área igual a 2 m^2.



Solución



El perímetro es P = 2y + x + (π/2)x

Área = 2 = x·y + (1/2)·π(x/2)^2 . Tenemos x·y = 2 - (π/8)·x^2 de donde y = 2/x - (π/8)·x. Sustituyendo en el perímetro tenemos

P = 2y + x + (π/2)x = 2[2/x - (π/8)·x] + x + (π/2)x = 4/x - (π/4)·x + x + (π/2)·x. Derivando tenemos

P '(x) = 4(-1/x^2) - (π/4) + 1 + (π/2)

P '(x) = 0 → 4(-1/x^2) - (π/4) + 1 + (π/2) = 0 → 4/x^2 = - (π/4) + 1 + (π/2) = 1 + (π/4) = (4 + π) / 4, de donde

x^2 = 16/(4 + π), con lo cual x = $\pm\sqrt{\frac{16}{4+\pi}} = \pm\frac{4}{\sqrt{4+\pi}}$. (*La solución negativa no sirve pues es una longitud*)

P ''(x) = $-4(-2)\cdot x^{-1} = \frac{8}{x}$

Como P ''(+$\sqrt{\frac{16}{4+\pi}}$) = 2$\sqrt{4+\pi}$ > 0, x = $\sqrt{\frac{16}{4+\pi}}$ es un mínimo

Como P ''(-$\sqrt{\frac{16}{4+\pi}}$) = - 2$\sqrt{4+\pi}$ < 0, x = -$\sqrt{\frac{16}{4+\pi}}$ es un máximo

Las dimensiones son por tanto x = $\frac{4}{\sqrt{4+\pi}}$ e y = 2/x – (π/8)x = (2 $\sqrt{4+\pi}$)/4 - (π/8)($\frac{4}{\sqrt{4+\pi}}$)

Ejercicio 3 de la Opción B de sobrantes 4 de 2001.

Considera la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) [1'5 puntos] Calcula el detreminante de las matrices: 2A, A^{31} y $(A^{31})^{-1}$.
(b) [1 punto] Halla la matriz A^{-1}.

Solución

(a)
Sabemos que $|k\cdot A| = k^n\cdot|A|$, siendo n el orden de la matriz A, y que $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$
Luego de $A\cdot A^{-1} = I$, tenemos $|A\cdot A^{-1}| = |I| = |A|\cdot|A^{-1}| = |I| = 1$, pues el determinante de la matriz identidad vale 1. De $|A|\cdot|A^{-1}| = 1$, obtenemos $|A^{-1}| = 1/|A|$. Con lo anterior ya lo resolvemos

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$|2A| = 2^3\cdot|A| = 8(-1) = -8$
$|A^{31}| = |A|\cdot|A|\cdots$ {31 veces}$\cdot |A| = (-1)\cdot(-1)\cdots$ {31 veces}$\cdot(-1) = (-1)^{31} = -1$
$|(A^{31})^{-1}| = 1/(|A|)^{31} = 1/(-1) = -1$
(b)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot \text{Adj}(A^t)$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix};\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\text{Adj}(A^t) = 1/(-1) \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 de la Opción B de sobrantes 4 de 2001.

[2'5 puntos] Halla el punto de la recta $x = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-1}$ que equidista del `punto A(1,2,1) y del origen de coordenadas

Solución

Ponemos la recta en paramétricas y elegimos un punto genérico

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$
. Un punto genérico sería X(λ, -2+2λ, 3-λ)

Nos dicen que d(A,X) =d(O,X), es decir $\|\overrightarrow{AX}\| = \|\overrightarrow{OX}\|$
$\overrightarrow{AX}$ = (λ-1, 2λ-4, -λ+2); $\overrightarrow{OX}$ = (λ, -2+2λ, 3-λ)
$\sqrt{(\lambda-1)^2 + (2\lambda-4)^2 + (-\lambda+2)^2} = \|\overrightarrow{AX}\| = \|\overrightarrow{OX}\| = \sqrt{(\lambda)^2 + (2\lambda-2)^2 + (3-\lambda)^2}$
Elevando las raíces al cuadrado y operando nos queda 8λ = 8, de donde λ = 1, y el punto pedido es
X(1, 2(1)-2, 3-1) = X(1, 0, 2)