OPCIÓN A

Ejercicio 1 de la Opción A de sobrantes 2 de 2001.

Sea f: R $\rightarrow$ R la función dada por f(x) =|18 – x^2|.

(a) [1 punto] Esboza la gráfica y halla los extremos relativos de f (dónde se alcanzan y cuáles son sus respectivos valores).

(b) [1'5 puntos] Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con la recta tangente a la misma en el punto de abscisa x = -2.

Solución

(a) $f(x) = |8 - x^2| = \begin{cases} x^2 - 8 & si \quad x < -\sqrt{8} \\ -(x^2-8) & si \quad -\sqrt{8} \le x < \sqrt{8} \\ x^2 - 8 & si \quad x > \sqrt{8} \end{cases}$

8 – x^2 = 0, las soluciones son x = $\pm\sqrt{8}$

Para x < - $\sqrt{8}$ y x > $\sqrt{8}$, 8 – x^2 es mayor que cero, lo cual se comprueba sustituyendo un número cualquiera en 8 – x^2. Para - $\sqrt{8}$ < x < $\sqrt{8}$, los valores de 8 – x^2 son negativos

La gráfica de 8 – x^2 es la misma que la de –x^2 pero desplazada 8 unidades hacia arriba en ordenadas.

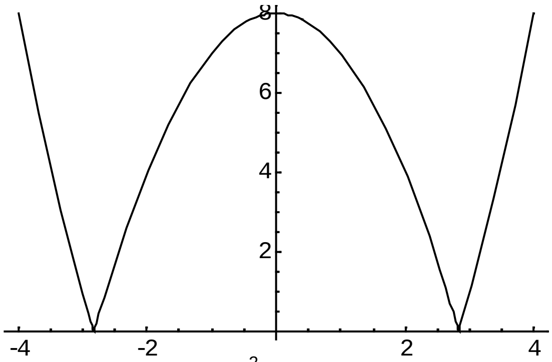
La gráfica de –(8 – x^2) es la simétrica de la de 8 – x^2 respecto al eje OX.

8 – x^2 es una parábola con las ramas hacia abajo su extremo se encuentra en f '(x) = 0

-2x = 0, x = 0 es la abcisa del máximo que vale 8

Como tenemos un valor absoluto los mínimos se encuentran en el eje OX en concreto en las abcisas que los anulan, en nuestro caso en x = $\pm\sqrt{8}$

Lá gráfica de la función es



(b) Recta tangente en x = -2. La rama es f(x) = 8 – x^2

y – f(-2) = f '(-2)(x+2); f '(x) = -2x; f(-2) = 8 – $(-2)^2$ = 4 ; f '(-2) = -2(-2) = 4

y – 4 = 4(x+2). Operando queda y = 4x +2

El corte de la tangente y = 4x+2 co 8 – x^2 es x = -2. Faltan los cortes con x^2 – 8 para lo cual se resuelve la ecuación x^2 – 8 = tangente, es decir

x^2 – 8 = 4x+2; x^2 –4x – 20 = 0. Sus soluciones son x = 2 $\pm\sqrt{24}$

La recta tangente y = 4x + 2 corta a la función f(x) |8 – x^2| en x = -2 y en x = 2 $\pm\sqrt{24}$

Ejercicio 2 de la Opción A de sobrantes 2 de 2001.

Siendo Ln(x) el logaritmo neperiano de x, considera la función f: (0,∞) $\rightarrow$ R definida por

f(x) = x·Ln(x). Calcula:

(a) [1'5 puntos] $\int f(x)\,dx$

(b) [1 punto] Una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto (1,0).

Solución

(a) $\int xLn(x)\,dx = Ln(x)\cdot\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\cdot Ln(x) - \frac{1}{2}\cdot\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot Ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + K = F(x)$

$u = Ln(x) \rightarrow du = \frac{1}{x}dx$

$dv = x\,dx \rightarrow v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$

(b) Como pasa por (1,0) tenemos F(1) = 0, es decir 1/2·Ln(1) – 1/4·(1) + K = 0 $\rightarrow$ K = 1/4, por tanto

$F(x) = \frac{x^2}{2}\cdot Ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + 1/4.$

Ejercicio 3 de la Opción A de sobrantes 2 de 2001.

[2'5 puntos] Sea $A = \begin{pmatrix} \text{sen } x & -\cos x & 0 \\ \cos x & \text{sen } x & 0 \\ \text{sen } x + \cos x & \text{sen } x - \cos x & 1 \end{pmatrix}$.

¿Para qué valores de x existe la matriz inversa de A? Calcula dicha matriz inversa.

Solución

Para que tenga inversa $|A| \neq 0$

$|A| = \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ luego exista la inversa de A para cualquier valor de x

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$; $A^t = \begin{pmatrix} \text{sen } x & \cos x & \text{sen } x + \cos x \\ -\cos x & \text{sen } x & \text{sen } x - \cos x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} \text{sen } x & \cos x & 0 \\ -\cos x & \text{sen } x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, luego

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t) = 1/1\cdot \begin{pmatrix} \text{sen } x & \cos x & 0 \\ -\cos x & \text{sen } x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sen } x & \cos x & 0 \\ -\cos x & \text{sen } x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4 de la Opción A de sobrantes de 2001.-

[2'5 puntos] Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A(1,0,-1), es perpendicular al plano $x - y + 2z + 1 = 0$ y es paralelo a la recta $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

Solución

El plano pedido pasa por el punto A(1,0,-1) y es paralelo a los vectores **n** = (1,-1,2), que es el vector normal del plano, y al vector director de la recta $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. Tomando $y = \lambda$ la recta es $(x,y,z) = (2\lambda,\lambda,0)$ y su vector director es **v** = (2,1,0)

El plano es $\pi \equiv |\mathbf{x-a,n,v}| = 0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z+1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (x-1)(-2) - (y)(-4) + (z+1)(3) = -2x + 4y + 3z + 5 = 0.$

OPCIÓN B

Ejercicio 1 de la Opción B de sobrantes 2 de 2001

[2'5 puntos] De la función $f: R \to R$ se sabe que $f''(x) = x^2 + 2x + 2$ y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto P(1, 2). Halla la expresión de f.

Solución

$f''(x) = x^2 + 2x + 2$. Como tiene tangente horizontal en P(1,2) tenemos que $f'(1) = 0$ y $f(1) = 2$. Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral tenemos

$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int (x^2 + 2x + 2)\,dx = x^3/3 + x^2 + 2x + K$

$f'(1) = 0 \to 0 = 1/3 + 1 + 2 + K \to K = -10/3$. Con lo cual $f'(x) = x^3/3 + x^2 + 2x - 10/3$

Volviendo a aplicar el teorema fundamental del cálculo integral

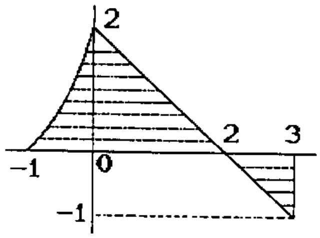
$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (x^3/3 + x^2 + 2x - 10/3)\,dx = x^4/12 + x^3/3 + x^2 - (10/3)x + 2x + K$

$f(1) = 2 \to 2 = 1/12 + 1/3 + 1 - 10/3 + K \to K = 47/12.$

Con lo cual $f(x) = x^4/12 + x^3/3 + x^2 - (10/3)x + 2x + 47/12$

Ejercicio 2 de la Opción B de sobrantes 2 de 2001.

[2'5 puntos] Halla el área del recinto rayado que aparece en la figura adjunta sabiendo que la parte curva tiene como ecuación $y = \frac{2x+2}{1-x}$



Solución

Calculamos la ecuación de la recta que pasa por (0,2) y (2,0). La ecuación segmentaria es x/2 + y/2 = 1, de donde x + y = 2. Despejando y = 2 – x

$$\text{Área} = \int_{-1}^{0} \frac{2x+2}{1-x}\,dx + \int_{0}^{2} (2-x)\,dx + \left| \int_{2}^{03} (2-x)\,dx \right| == \left[-2x - 4Ln\,|1-x|\right]_{-1}^{0} + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left|\left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2\right| =$$

= (0 –4Ln(1)) – (2 –4Ln(2)) + [(4 –2) – 0] + | (6 – 9/2) – (4-2)| = 4Ln(2) + 1/9 u.a.

$$I = \int \frac{2x+2}{1-x}\,dx = \int \left[-2 + \frac{4}{1-x}\right] dx = -2x + 4Ln|1-x|(-1) = -2x - 4Ln|1-x|$$

$$\begin{array}{l|l} 2x + 2 & 1 - x \\ \hline -2x + 2 & -2 \\ \hline 4 & \end{array}$$

Ejercicio 3 de la Opción B de sobrantes 2 de 2001.

[2'5 puntos] Calcula a sabiendo que los planos ax + y - 7z = - 5 y x + 2y + a^2z = 8, se cortan en una recta que pasa por el punto A(0, 2, 1) pero que no pasa por el punto B(6, -3,2).

Solución

Para que los plano formen una recta el determinante $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, es decir 2a - 1 ≠ 0, lo que nos da a ≠ 1/2

Como (0,2,1) pertenece a la recta tenemos $\begin{cases} 0+2-7=-5 \\ 0+4+a^2=8 \end{cases}$, de donde a^2 = 4, luego a = ± 2

Como (6,-3,2) no pertenece a la recta tenemos $\begin{cases} 6a-3-14 \neq -5 \\ 6-6+2a^2 \neq 8 \end{cases}$,por tanto a la vez tenemos que a ≠ 2 y a ≠ ± 2. Luego tiene que ser a ≠ + 2

Como a la vez a = ± 2 y a ≠ + 2, la única posibilidad que nos queda es que a = - 2.

Ejercicio 4 de la Opción B de sobrantes de 2001.

Considera la matriz A = $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] Siendo I la matriz identidad 3 x 3 y O la matriz nula 3 x 3, prueba que A^3 + I = O,

(b) [1'5 puntos] Calcula A^{10} .

Solución

(a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Por tanto $A^3 + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$

(b) $A^{10} = A^3 \cdot A^3 A^3 \cdot A = (-I)\cdot(-I)\cdot(-I)\cdot A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$