

Opción A

Modelo4 Ejercicio 1 Modelo 4 Opción A sobrantes 1996

Si una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, se llama valor medio de f en el intervalo $[a, b]$ al número $m =$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Para hacer un estudio sobre, la capacidad de memorizar de un niño se utiliza el siguiente modelo: si x es su edad en años, entonces su capacidad de memorizar viene dada por $f(x) = 1 + 2x \ln(x)$ ($0 \leq x \leq 5$), donde $\ln(x)$ es el logaritmo neperiano de x .

(a) [1 punto]. Describe el método de integración por partes.

(b) [1'5 puntos]. Encuentra, usando el modelo descrito, el valor medio de la capacidad de memorizar de un niño entre su primer y su tercer cumpleaños.

Solución

a)

Se llama valor medio de f en el intervalo $[a, b]$ al número $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

$$f(x) = 1 + 2x \ln(x) \quad (0 \leq x \leq 5),$$

“El método de integración por partes nos dice que si $u(x)$ y $v(x)$ son funciones con derivada continua entonces $\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) dx$. En forma diferencial es $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$. (Está basado en la derivada del producto de dos funciones).

b)

$$m = \frac{1}{3-1} \int_1^3 (1+2x \ln(x)) dx$$

$$I = \int (1+2x \ln(x)) dx = x + 2 \int x \ln(x) dx = x + 2 \cdot I_1$$

$I_1 = \int x \ln(x) dx$. Es una integral por parte, hacemos $u = \ln(x)$ y $dv = x dx$ con lo cual $du = (1/x) dx$ y $v = x^2/2$

$$I_1 = \int x \ln(x) dx = (x^2/2) \ln(x) - \int (x^2/2) dx = (x^2/2) \ln(x) - x^2/4$$

$$I = x + 2 \cdot I_1 = x + 2[(x^2/2) \ln(x) - x^2/4] = x + x^2 \ln(x) - x^2/2$$

$$m = \frac{1}{3-1} \int_1^3 (1+2x \ln(x)) dx = (1/2)[x + x^2 \ln(x) - x^2/2]_1^3 =$$

$$= (1/2)[(3 + 9 \ln(3) - 9/2) - (1 + 0 - 1/2)] = 2 + (9/2) \ln(3)$$

Modelo4 Ejercicio 2 Modelo 4 Opción A sobrantes 1996

[2'5 puntos] Determina las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función f

dada por $f(x) = 2x \cdot e^x + \frac{x^3-2}{x^2+4}$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución

$$f(x) = 2x \cdot e^x + \frac{x^3-2}{x^2+4}$$

La recta tangente en $x = 0$ es $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$

La recta normal en $x = 0$ es $y - f(0) = (-1/f'(0)) \cdot (x - 0)$

$$f(x) = 2x \cdot e^x + \frac{x^3-2}{x^2+4}$$

$$f'(x) = 2e^x + 2x \cdot e^x + \frac{3x^2(x^2+4) - (x^3-2)(2x)}{(x^2+4)^2}$$

$$f(0) = 0 - 2/4 = -1/2$$

$$f'(0) = 2 + 0 + 0/16 = 2$$

La recta tangente en $x = 0$ es $y + 1/2 = 2 \cdot (x - 0)$

La recta normal en $x = 0$ es $y + 1/2 = (-1/2) \cdot (x - 0)$

Modelo4 Ejercicio 3 Modelo 4 Opción A sobrantes 1996

(a) [1'5 puntos]. Determina una matriz X que verifique la relación $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) [1 punto] Calcula el determinante de la matriz X hallada

Solución

a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \text{ En forma abreviada } AX = B \text{ con } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ la matriz A admite inversa $A^{-1} = (1/|A|)(\text{Adj}(A^t))$ y además en la

expresión $AX = B$ podemos multiplicar por la izquierda por la inversa de A obteniendo

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

Calculamos A^{-1} y después la multiplicamos por la matriz B

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}; A^{-1} = (1/|A|)(\text{Adj}(A^t)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -6 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\det(X) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -6 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = (1) \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 24 + 3 = 27$$

Modelo4 Ejercicio 4 Modelo 4 Opción A sobrantes 1996

Sea C la circunferencia de ecuación $C \equiv x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$,

(a) [1 punto] Calcula el centro y el radio de C.

(b) [1 punto]. Calcula el punto B que es el diametralmente opuesto del punto A = (-1,7).

(c) [0'5 puntos] ¿Cuál es la posición relativa de las rectas tangentes a C en los puntos A y B?

Solución

a)

$$\text{Circ.} \equiv x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0,$$

La circunferencia de centro C (a,b) y radio r es $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Desarrollando esta expresión tenemos

$$\text{Circ.} \equiv x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0. \text{ Igualando obtenemos}$$

$$-2a = -4, \text{ de donde } a = 2$$

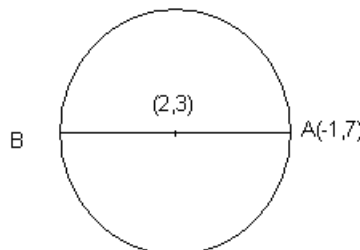
$$-2b = -6, \text{ de donde } b = 3$$

$$r = +\sqrt{a^2 + b^2 - c} = \sqrt{4 + 9 + 12} = \sqrt{25} = 5$$

El centro de la circunferencia es el punto C(a,b) = C(2,3)

El radio de la circunferencia es r = 5

b)



Si B es el punto diametralmente opuesto al A, el centro(2,3) es el punto medio del segmento AB, es decir:

$$(2,3) = \left(\frac{x - 1}{2}, \frac{y + 7}{2} \right), \text{ de donde}$$

$$2 = \frac{x - 1}{2} \text{ y por tanto } x = 5$$

$$3 = \frac{y + 7}{2} \text{ y por tanto } y = -1$$

El punto buscado es B(5, -1)

c)

Las tangentes a una circunferencia en los puntos extremos de cualquier diámetro son paralelas, puesto que el diámetro es perpendicular a cualquier tangente a la circunferencia en sus puntos extremos.

Opción B

Modelo4 Ejercicio 1 Modelo 4 Opción B sobrantes 1996

(a) [1 punto] Describe el procedimiento de integración por partes.

(b) [1'5 puntos]. Determina una función $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que su función derivada viene dada por $f'(x) = \ln((x+3)(x+1))$ y que $f(0) = \ln(27)$, donde $\ln(x)$ representa el logaritmo neperiano de x .

Solución

a)

“El método de integración por partes nos dice que si $u(x)$ y $v(x)$ son funciones con derivada continua entonces $\int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int v(x).u'(x)dx$. En forma diferencial es $\int u.dv = u.v - \int v.du$. (Está basado en la derivada del producto de dos funciones).

b)

Tenemos $f'(x) = \ln((x+3)(x+1))$ y que $f(0) = \ln(27)$.

Por el Teorema Fundamental del cálculo Integral que dice: Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$

entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable y su derivada es $F'(x) = f(x)$.

En nuestro caso tenemos que $f(x) = \int f'(x)dx$.

$I = f(x) = \int f'(x)dx = \int \ln((x+3)(x+1)) dx = \int \ln((x^2 + 4x + 3))dx$. Integral por partes.

Tomamos $u = \ln((x+3)(x+1))$ y $dv = dx$, de donde $du = [(2x+4)/(x^2 + 4x + 3)]dx$ y $v = x$

$I = x. \ln|(x+3)(x+1)| - \int x. [(2x+4)/(x^2 + 4x + 3)]dx =$

$= x. \ln|(x+3)(x+1)| - \int [(2x^2 + 4x)/(x^2 + 4x + 3)]dx = x. \ln|(x+3)(x+1)| - I_1$

$I_1 = \int [(2x^2 + 4x)/(x^2 + 4x + 3)]dx$ es una integral racional.

Efectuamos antes la división por que el numerador no es de menor grado que el denominador

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 4x \quad | \quad x^2 + 4x + 3 \\ -2x^2 - 8x - 6 \\ \hline -4x - 6 \end{array}$$

$I_1 = \int [(2x^2 + 4x)/(x^2 + 4x + 3)]dx = \int (2)dx + \int [(-4x - 6)/(x^2 + 4x + 3)] dx =$

$= 2x + \int (A/(x+3))dx + \int (B/(x+1))dx = 2x + A. \ln|x+3| + B. \ln|x+1| *$

Calculamos las constantes A y B

$[(-4x - 6)/(x^2 + 4x + 3)] = (A/(x+3)) + (B/(x+1)) = [A(x+1)+B(x+3)]/(x^2 + 4x + 3)$

Igualando numeradores

$-4x - 6 = A(x+1)+B(x+3)$

Para $x = -1$, $-2 = B(2)$ de donde $B = -1$

Para $x = -3$, $6 = A(-2)$ de donde $A = -3$

Luego $I_1 = 2x - 3. \ln|x+3| - 1. \ln|x+1|$, por tanto

$I = f(x) = x. \ln((x+3)(x+1)) - I_1 = x. \ln|(x+3)(x+1)| - 2x + 3 \ln|x+3| + \ln|x+1| + K$

Como dicen que $f(0) = \ln(27)$ tenemos que

$\ln(27) = 0 - 0 + 3 \ln(3) + \ln(1) + K = \ln(3^3) + K = \ln(27) + K$, de donde $K = 0$ y la función pedida es:

$f(x) = x. \ln|(x+3)(x+1)| - 2x + 3 \ln|x+3| + \ln|x+1|$

Modelo4 Ejercicio 2 Modelo 4 Opción B sobrantes 1996

La función f definida por $f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - (a+3)x + 3a}{x-3}, & \text{si } x \neq 3 \\ 1, & \text{si } x = 3 \end{cases}$; es derivable en toda la recta real

(a) [1'5 puntos]. ¿Cuánto vale a ?

(2) [1 punto]. Para dicho valor de a , cuánto vale $f'(3)$?

Solución

a)

Como $f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - (a+3)x + 3a}{x-3}, & \text{si } x \neq 3 \\ 1, & \text{si } x = 3 \end{cases}$; es cierto para todo n° real lo es para el 3, por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f'(x) = f'(3)$$

$$f'(3) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - (a+3)x + 3a}{x-3} = \frac{0}{0}$$

Le aplicamos la Regla de L'Hôpital que dice: Si f y g son continuas en $[a-r, a+r]$, derivables en $(a-r, a+r)$ y

además $f(a) = g(a) = 0$ entonces si existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - (a+3)}{1} = \frac{3-a}{1} = 3-a$$

Como $\lim_{x \rightarrow 3} f'(x) = f'(3)$ tenemos que $3-a = 1$, de donde $a = 2$ y la derivada de la función dada es:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x-3}, & \text{si } x \neq 3 \\ 1, & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

b)

Viendo la función derivada que lo es en todo \mathfrak{R} vemos que $f'(3) = 1$. Si aplicásemos la definición obtendríamos lo mismo, pero no es necesario pues ya me dicen que existe $f'(x)$ en todo \mathfrak{R} y me han dado su expresión.

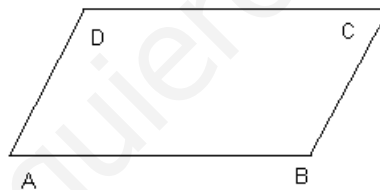
Modelo4 Ejercicio 3 Modelo 4 Opción B sobrantes 1996

(a) [2 puntos]. Encuentra el ángulo que forman las diagonales **AC** y **BD** del paralelogramo ABCD en el que $A = (2, 1, 0)$, $B = (0, 0, 0)$ y $C = (0, -1, 2)$.

(b) [0'5 puntos]. ¿Es un cuadrado? Justifica la respuesta

Solución

a)



Como es un paralelogramo los vectores libres **AB** y **DC** son iguales, por tanto:

$$A = (2, 1, 0), B = (0, 0, 0) \text{ y } C = (0, -1, 2).$$

$$\mathbf{AB} = \mathbf{DC}$$

$$(-2, -1, 0) = (0-x, -1-y, 2-z). \text{ Igualando}$$

$$-2 = -x, \text{ de donde } x = 2$$

$$-1 = -1 - y, \text{ de donde } y = 0$$

$$0 = 2 - z, \text{ de donde } z = 2$$

El punto que falta del paralelogramo es $D(2, 0, 2)$

Veamos el ángulo de las diagonales pedidas

$$\mathbf{AC} = (0-2, -1-1, 2-0) = (-2, -2, 2)$$

$$\mathbf{BD} = (2-0, 0-0, 2-0) = (2, 0, 2)$$

$$\left| \cos(\widehat{\mathbf{AC}, \mathbf{BD}}) \right| = \frac{|\mathbf{AC} \cdot \mathbf{BD}|}{\|\mathbf{AC}\| \|\mathbf{BD}\|} = \frac{|-4 + 0 + 4|}{\sqrt{4+4+4} \cdot \sqrt{4+0+4}} = 0$$

El ángulo que forman **AC** y **BD** es $\arccos(0) = 90^\circ$

b)

El paralelogramo es un cuadrado si las longitudes de sus lados es la misma y dos lados consecutivos son perpendiculares, es decir el vector **AB** tiene que ser perpendicular (producto escalar 0) al vector **BC**

$$\mathbf{AB} = (-2, -1, 0)$$

$$\mathbf{BC} = (0, -1, 2)$$

$$\mathbf{AB} \cdot \mathbf{BC} = 0 + 1 + 0 = 1 \neq 0, \text{ por tanto el paralelogramo no es un cuadrado.}$$

Modelo4 Ejercicio 4 Modelo 4 Opción B sobrantes 1996

[2'5 puntos] Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & a & b \\ c & -a & d \end{pmatrix}$, halla a, b, c y, d sabiendo que

- (i) el vector cuyas coordenadas son las que aparecen en la primera columna de A es ortogonal al vector (1, -1, -1),
- (ii) el producto vectorial del vector cuyas coordenadas son las que aparecen en la tercera columna de A por el vector (1, 0, 1) es (-2, 3, 2), y
- (iii) el rango de la matriz A es 2.

Solución

(i)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & a & b \\ c & -a & d \end{pmatrix}$$

Si el vector (1,2,c) es ortogonal al vector (1, -1, -1) su producto escalar es 0

$$(1,2,c) \cdot (1,-1,-1) = 0 = 1 - 2 - c = 0, \text{ de donde } c = -1$$

(ii)

$(-7,b,d) \wedge (1,0,1) = (-2,3,2)$. El producto vectorial lo escribo "∧".

$$(-7,b,d) \wedge (1,0,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -7 & b & d \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(b) - \mathbf{j}(-7-d) + \mathbf{k}(-b) = (b, 7+d, -b) = (-2,3,2). \text{ Igualando miembro a}$$

miembro tenemos $b = -2$, y $7+d = 3$ de donde $d = -4$.

(iii)

Si el rango(A) = 2 el determinante de A tiene que ser 0

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & a & b \\ c & -a & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & a & -2 \\ -1 & -a & -4 \end{vmatrix} = 1(-4a - 2a) - 3(-8 - 2) + (-7)(-2a + a) =$$

$$= -6a + 30 + 7a = 30 + a = 0, \text{ de donde } a = -30$$