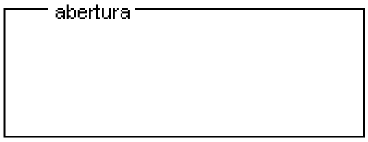
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD MATEMÁTICAS II DE ANDALUCÍA CURSO 1996-1997.

Opción A

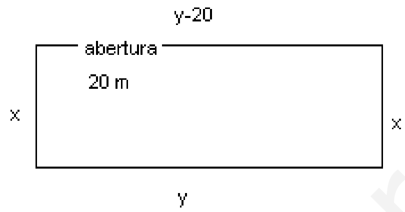
Modelo2 Ejercicio 1 opción A sobrantes 1996

[2'5 puntos]. En un terreno llano se desea acotar una parcela rectangular usando 80 m. De tela metálica para vallarla, pero dejando en uno de sus lados una abertura de 20 m. Sin vallar tal y como se muestra en la figura:



Halla las dimensiones de la parcela rectangular de área máxima que puede acotarse de esa manera y el valor de dicha área.

Solución



La función a maximizar es A = x.y, y la relación entre las variables es 2x + y + y – 20 = 80, es decir x + y = 50, por tanto la función es
$A = x.y = x(50 - x) = 50x - x^2$.
Calculamos su primera derivada, la igualamos a 0 y comprobamos que es máximo
A '= 50 – 2x; de A ' = 0, obtenemos 50 – 2x = 0 es decir x = 25.
y = 50 – x = 50 – 25 = 25, por tanto el rectángulo es un cuadrado, pero con abertura
A '' = -2 < 0, luego es máximo
El Área es A = 25x25 = 625 m^2.

Modelo2 Ejercicio 2 opción A sobrantes 1996

Las coordenadas (a,b) del centro de gravedad de una lámina de densidad uniforme que está limitada por la curva y = sen(x) y la porción del eje OX comprendida entre x = 0 y x = π/2, vienen dadas por:

$$a = \frac{\int_0^{\pi/2} x\,\text{sen}(x)dx}{\int_0^{\pi/2} \text{sen}(x)dx}, \quad y \quad b = \frac{\int_0^{\pi/2} (\text{sen}(x))^2 dx}{2\int_0^{\pi/2} \text{sen}(x)dx}$$

(a) [1 punto] Describe el método de integración por partes.
(b) [1'5 puntos] Utiliza dicho método para calcular el centro de gravedad de la lámina sabiendo que

$$\int_0^{\pi/2} (\text{sen}(x))^2 dx = \frac{\pi}{4}$$

Solución

(a)
Si u(x) y v(x) son funciones con derivada continua entonces

$$\int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int v(x).u'(x)dx$$

(b)
I = ∫xsen(x)dx = [tomando u = x, dv = sen(x)dx, tenemos du = dx, y v = ∫sen(x)dx = -cos(x)] =
= x(-cos(x)) - ∫-cos(x)dx = -xcos(x) + sen(x). Luego

$$\int_0^{\pi/2} x\,\text{sen}(x)dx = \left[-x\cos(x)+\text{sen}(x)\right]_0^{\pi/2} = (-\pi/2.\cos(\pi/2) + \text{sen}(\pi/2)) - (0.\cos(0) + \text{sen}(0)) = 1$$

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}(x)dx = \left[-\cos(x)\right]_0^{\pi/2} = (-\cos(\pi/2)) - (-\cos(0)) = 1.$$

Por tanto a = 1/1 = 1 y b = (π/4)/(2) = π/8.

Modelo2 Ejercicio 3 opción A sobrantes 1996

[2'5 puntos] Del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$ax+by+1 = 0$$
$$a'x+b'y+c = 0$$

se sabe que x = 1, y = 2 es una solución y que x = 7, y = 3 es otra solución. ¿Qué puede afirmarse respecto de las soluciones del sistema?¿cuántas tiene?, ¿cuáles son?

Solución

Si un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas tiene dos soluciones distintas, es porque es indeterminado, es decir rango (A) = rango(A*) = 1, siendo A y A* la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.
Si el rango es uno es porque una ecuación depende de la otra, por tanto nos podemos quedar con una sola ecuación que sería ax+by+1 = 0. Por tanto este sistema se reduce a una recta y tiene infinitas soluciones.
Vamos a calcularlas sustituyendo las soluciones que nos han dado
$a+2b = -1$
$7a+3b = -1$
Resolviéndolo obtenemos $a = 1/11$ y $b = -6/11$, por tanto la recta es $(1/11)x - (6/11)y + 1 = 0$.
Tiene infinitas soluciones. Tomando $y = \lambda$, $x - 6\lambda + 11 = 0$, luego las soluciones serían $(x,y) = (-11 + 6\lambda, \lambda)$.

Modelo2 Ejercicio 4 opción A sobrantes 1996

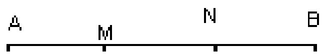
Considera los puntos A = (2,-1,1) y B = (-1,-1,2).
(a) [1 punto] Determina los puntos del segmento AB que lo dividen en tres segmentos iguales..
(b) [1'5 puntos] Encuentra un punto C sobre la recta r de ecuaciones

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en C.

Solución

(a)



$3\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}$

$3(x - 2,y + 1,z - 1) = (-3,0,1)$; de donde $\begin{cases} x - 2 = - 1 \\ y + 1= 0 \\ z - 1= 1/3 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 4/3 \end{cases}$, es decir el punto es M(1, -1, 4/3)

N es el punto medio de M y B luego

$$N(x,y,z)=\left(\frac{1 - 1}{2},\frac{-1 - 1}{2},\frac{4/2 + 2}{2}\right)=(0,-1,5/3)$$

(b)

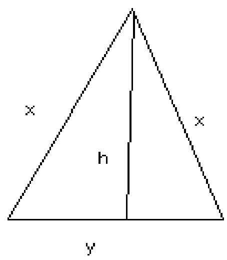
Como $C \in r \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}=\lambda$, el punto C es de la forma
$C= (1 + \lambda,1 - \lambda,1 + 2\lambda)$.
si el triángulo ABC fuese rectángulo en C tedríamos que **CA** $\perp$ **CB**, y por tanto **CA•CB** = 0
CA = $(2 – 1 - \lambda, -1 -1 -\lambda, 1 -1 -2\lambda) = (1 - \lambda, -2 + \lambda, -2\lambda)$
CB = $(-1 -1 -\lambda, -1 -1 + \lambda, 2 -1 -2\lambda) = (-2 - \lambda, -2 + \lambda, 1 -2\lambda)$
CA•CB = $0 = (1 - \lambda)(-2 - \lambda) + (-2 + \lambda)^2 + (-2\lambda)(1 - 2\lambda) = 6\lambda^2 - 9\lambda + 2 = 0$.
Resolviendo esta ecuación vemows que no tiene soluciones reales, por tanto no hay ningún punto C de la recta que haga rectángulo el triángulo ACB.

Opción B

Modelo2 Ejercicio 1 opción B sobrantes 1996

[2'5 puntos] Se toma una cuerda de 5 metros de longitud y se unen los extremos. Entonces podemos construir con ella triángulos isósceles de diferentes medidas. Calcula, de manera razonada, las dimensiones del que tiene mayor área

Solución



La función a maximizar es A = (½)y.h, con la relación 2x + y = 5. Además utilizando el teorema de Pitágoras tenemos

$h=\sqrt{x^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4x^2-y^2}$, por tanto: $A=1/2y.1/2\sqrt{4x^2-y^2}=\frac{1}{4}y\sqrt{4x^2-y^2}=\frac{1}{4}(5-2x)\sqrt{4x^2-(5-2x)^2}=\frac{1}{4}(5-2x)\sqrt{20x-25}$

Derivando obtenemos: $A'=\frac{1}{4}\left[-2\sqrt{20x-25}+(5-2x).\frac{20}{2\sqrt{20x-25}}\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{-4(20x-25)+20(5-2x)}{2\sqrt{20x-25}}\right]=\frac{-15x+25}{\sqrt{20x-25}}$

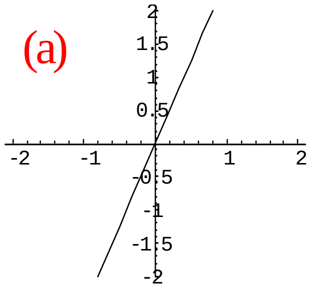
De A ‘ = 0, tenemos –15x + 25 = 0, es decir x = 5/3. Sustituyendo y = 5 – 2.(5/3) = 5/3, por tanto el triángulo es equilátero. Veamos que es un máximo

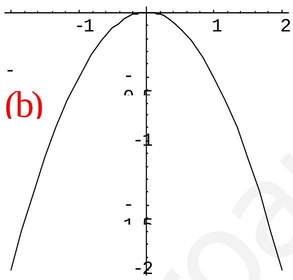
$$A''=\frac{-15(\sqrt{20x-25})-\left((-15x+25).\frac{20}{2\sqrt{20x-25})}\right)}{(\sqrt{20x-25})^2}$$

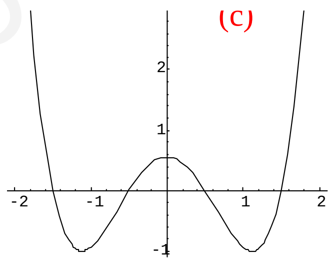
De donde A ‘’(5/3) < 0, luego es un máximo

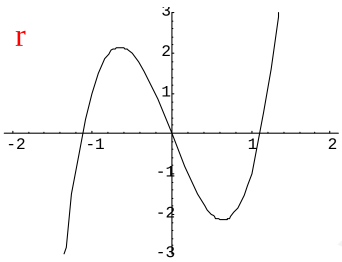
Modelo2 Ejercicio 2 opción B sobrantes 1996

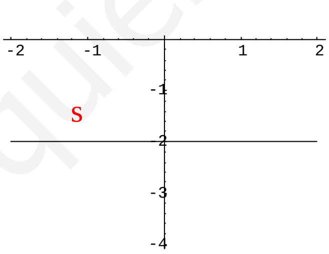
[2’5 puntos] Las gráficas (a), (b) y (c) corresponden, respectivamente, a tres funciones derivables f, g y h. ¿Podrían representar las gráficas (r), (s) o (t) a las gráficas de f ’ , g ’ o h ‘ (no necesariamente en ese orden)? Justifica la respuesta en cada caso.

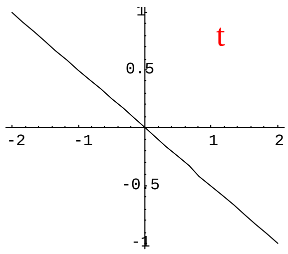












Solución

En la gráfica de r, que llamaremos m ‘(x), se observa que m ‘(0) = 0, pero como m ‘(0^-) > 0, la función m es creciente a la izquierda del 0 y próximo a él. Análogamente como m ‘(0^+) < 0, la función m es decreciente a la izquierda del 0 y próximo a él, luego en x = 0 hay un máximo.

En el punto $\alpha\in[-2,-1]$ donde atraviesa el eje OX, vemos que es un mínimo porque m ‘ (α) = 0, m ‘ (α^-) < 0 con lo cual la función m decrece a la izquierda de α y próximo a él., m ‘ (α^+) > 0 con lo cual la función m crece a la derecha de α y próximo a él.

Por análoga razón el punto $\beta\in[1,2]$, también es un mínimo

Luego esta función puede ser la gráfica de la derivada de la función que hay en el apartado (c)

En la gráfica de s, que llamaremos n ‘(x), se observa que siempre n ‘(x) < 0, luego la función n siempre es decreciente, y no se parece a ninguna de los apartados (a), (b) o (c).

En la gráfica de t, que llamaremos p ‘(x), se observa que p ‘(0) = 0, además si x < 0, p ‘(0) > 0 luego es creciente en x < 0. Como p ‘(0) < 0 en x >0, la función decrece en x > 0, luego la función que se le parece es la que hay en la gráfica (b).

Modelo2 Ejercicio 3 opción B sobrantes 1996

Un punto M se mueve en el espacio tridimensional de manera que en un instante de tiempo t se encuentra en el punto (1+t, 3+t, 6+2t)

(a) [0’5 puntos] ¿Es esta trayectoria una línea recta? Si es así, escribe sus ecuaciones de dos formas

distintas.
(b) [1 punto] Halla el instante de tiempo en el que el punto está en el plano dado por la ecuación x – 2y + z – 7 = 0..
(c) [1 punto] Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a la trayectoria de M y pasa por el punto (1,1,0)

Solución

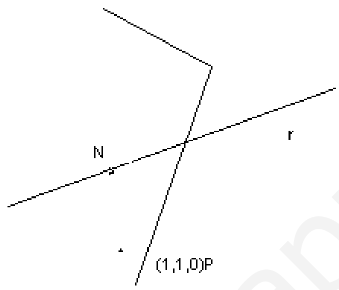
(a)

Es una recta M(1+t,3+t,6+2t) = (x,y,z). En paramétricas $r \equiv \begin{cases} x=1+t \\ y=3+t \\ z=6+2t \end{cases}$

En forma continua $r \equiv \frac{x-12}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-6}{2}=\lambda$

(b)
Sustituimos la ecuación de la recta en el plano
(1+t) – 2(3+t) + (6-2t) – 7 = 0, y operando obtenemos t = 6

(c)



Calculamos el plano Π perpendicular a la recta r por el punto (1,1,1,). La intersección con la recta es el punto N, y la recta que nos piden es la recta que pasa por los puntos P y N

$\Pi \equiv \begin{cases} P(1,1,1) \\ \vec{n}=\vec{v}=(1,1,2) \end{cases}$

$\Pi \equiv 1(x-1)+1(y-1)+2(z-0) = 0$, operando sale $\Pi \equiv x+y+2z-2 = 0$.
$N = r \cap \Pi$; (1+t)+(3+t)+2(6+2t)-2 = 0. Operando sale t = -7/3, de donde
N(1-7/3, 3-3/7, 6-14/3) = (-4/3, -1/3, 4/3)
La recta pedida es

$s \equiv \begin{cases} P(1,1,0) \\ \vec{PN}(-4/3-1,2/3-1,4/3-0)=(-7/3,\ -1/3,\ 4/3) \end{cases}$

$s \equiv \frac{x-1}{-7/3}=\frac{y-1}{-1/3}=\frac{z-0}{4/3}$

Modelo2 Ejercicio 4 opción B sobrantes 1996

(a) [1 punto] Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden que tienen inversa. Razona si su producto A.B también tiene inversa.

(b) [1'5 puntos] Dadas las matrices $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ determina si C.D tiene inversa y, en es caso, hállala.

Solución

(a)
Si existe A^{-1}, $\det(A) \neq 0$
Si existe B^{-1}, $\det(B) \neq 0$
Como A y B son cuadradas del mismo orden, existe el producto A.B y es del mismo orden que A y B.
Para que exista $(A:B)^{-1}$, tiene que ser $\det(A.B) \neq 0$, pero por las propiedades de los determinantes, det(A.B) = det(A).det(B) el cual es distinto de cero porque cada uno de ellos lo es por separado y su producto también
(b)

$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $M=C.D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

para que exista M^{-1}, $\det(M) \neq 0$, pero $\det(M) = 4 \neq 0$

$M^{-1}=\dfrac{1}{\det(M)}\text{Adj}(M^t)$, $M^t=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $\text{Adj}(M^t)=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $M^{-1}=\dfrac{1}{\det(M)}\text{Adj}(M^t)=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$