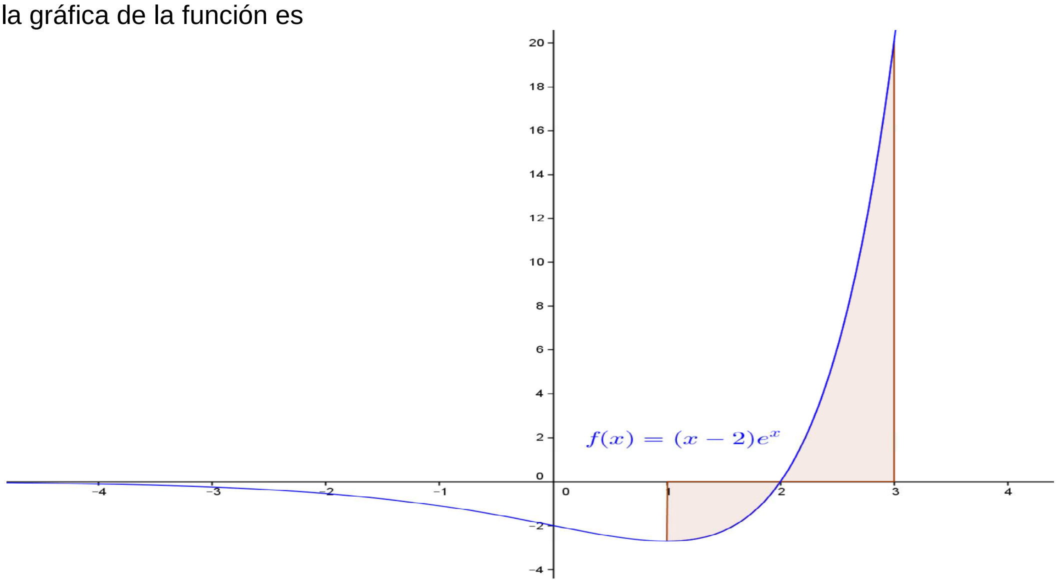
OPCIÓN A

Ejercicio 1 de la opción A del modelo 4 de 1998.

Considera la función f : R → R definida por $f(x) = (x – 2)e^x$.
(a) Determina los intervalos en los que la función f es creciente
(b) Dibuja la región limitada por la gráfica de f, el eje de abcisas y las rectas de ecuaciones x = 1 y x = 3.
(c) Halla el área de la región descrita en el apartado anterior

Solución

(a)
Estudiamos el signo de f ’ (x), con lo cual obtendremos también los extremos relativos
$f(x) = (x – 2)e^x$
$f'(x) = 1.e^x + (x – 2)e^x = e^x.(x – 1)$
f ‘ (x) = 0, como la exponencial no es cero nos resulta x = 1
Como f ‘ (x) < 0 si x < 1, f(x) es decreciente si x < 1
Como f ‘ (x) > 0 si x > 1, f(x) es creciente si x > 1
Por tanto por definición en x = 1 tiene un mínimo relativo, que vale f (1) = - e.
(b)
El dominio es R
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x – 2).e^x = \lim_{x\to+\infty} (-x – 2).e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} [(-x – 2)] / e^x = 0$
luego la recta y = 0 es una asíntota horizontal en - ∞
Por tanto la gráfica de la función es



(c)
La integral que sale en el área es por partes, la haremos antes
La integral $\int (x – 2).e^x\,dx$ es `por partes, tomamos u = (x – 2), dv = e^x dx, con lo cual du = dx, v = $\int e^x\,dx = e^x$, y nos resulta
$\int (x – 2).e^x\,dx = (x – 2).e^x - \int e^x\,dx = (x – 2).e^x – e^x = e^x.(x – 3)$. Por tanto

$$Area = -\int_1^2 (x-2)e^x dx + \int_2^3 (x-2)e^x dx = -\left[e^x(x-3)\right]_1^2 + \left[e^x(x-3)\right]_2^3 =$$

$= - [e^2(2-3) – e^1(-2)] + [e^3(3-3) – e^2(2-3)] = 2e^2 + e$ u.a.

Ejercicio 2 de la opción A del modelo 4 de 1998.

Una cierta función p se define como el cociente de dos funciones derivables f y g, es decir. p(x) = f(x)/g(x). En un punto a de su dominio la función p tiene un mínimo relativo y sabemos que f‘(a) = 6 y g‘(a) = 2. ¿Puedes obtener el valor de p‘(a)? Razona tu respuesta

Solución

p(x) = f(x) / g(x)
p ‘ (a) = 0, con f ‘ (a) = 6 y g ‘ (a) = 2
$p'(x) = [(f'(x).g(x) - f(x).g'(x)) / (g(x))^2]$
Como p ‘ (a) = 0, tenemos f ‘ (a).g(a) - f(a).g ‘ (a) = 0, de donde
6/2 = f ‘ (a) / g ‘ (a) = f(a) / g(a) = p(a)

Ejercicio 3 de la opción A del modelo 4 de 1998.

Sabiendo que la matriz A verifica la relación $A+2\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}$ resuelve el sistema $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

Solución

$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}$

De $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$, obtenemos $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

Veamos el calculo de A^{-1}

$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}$; $|A| = -1$; $A^t=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}$; $Adj(A^t)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}$; $A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj(A^t)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}$

Ejercicio 4 de la opción A del modelo 4 de 1998.

Considera el tetraedro formado por el origen de coordenadas y los tres puntos en los que el plano $\Pi : 2x + 3y + 6z - 6 = 0$ corta a los ejes coordenados.

(a) Describe un procedimiento para calcular el volumen del tetraedro y calcula efectivamente su valor.

(b) Calcula razonadamente las coordenadas del punto simétrico al origen de coordenadas respecto al plano Π.

Solución

(a)

Sabemos que el volumen de un paralelepípedo es el valor absoluto del producto mixto de los 3 vectores que parten de un vértice hacia los ejes coordenados, y que un paralelepípedo contiene 6 ortoedros, por tanto el volumen de un ortoedro es un sexto del valor absoluto del producto mixto de tres vectores que partan de un vértice, es decir

V = 1/6 $|[\,\mathbf{OA},\mathbf{OB},\mathbf{OC}\,]|$ u. v.

0(0,0,0) es el origen de coordenadas

Haciendo x = y = 0, obtenemos el punto A(0,0,1) = **OA**

Haciendo x = z = 0, obtenemos el punto B(0,2,0) = **OB**

Haciendo z = y = 0, obtenemos el punto C(3,0,0) = **OC**

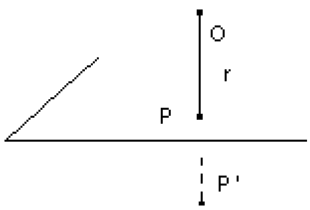
$$[\,\mathbf{OA},\mathbf{OB},\mathbf{OC}\,] = \begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 2 & 0\\3 & 0 & 0\end{vmatrix} = -6$$

Por tanto V = 1/6 $|[\,\mathbf{OA},\mathbf{OB},\mathbf{OC}\,]|$ = 1/6.| -6| = 6/6 = 1 u. v.

(b)

Para calcular el punto simétrico del origen respecto del plano Π, calculamos la recta r perpendicular al plano Π por el origen, a continuación hallamos el punto P intersección de la recta r con el plano Π, y dicho punto es el punto medio de O y su simétrico P ‘ pedido

En la figura se medio explica



$\Pi \equiv 2x + 3y + 6z - 6 = 0$, su vector normal es **n** = (2,3,6)

La recta r perpendicular al plano Π, pasa por el punto O(0,0,0) y tiene vector director **v** = **n** = (2,3,6), luego su ecuación es $(x,y,z) = (2\lambda,3\lambda,6\lambda)$

$P = r \cap \Pi$

$2(2\lambda) + 3(3\lambda) + 6(6\lambda) = 0$, de donde $\lambda = 6/49$, y el punto P es

P(2.(6/49), 3.(6/49), 6.(6/49)) = (12/49, 18/49, 36/49)

Como P es el punto medio de O y su simétrico P ‘, tenemos que

(12/49, 18/49, 36/49) = ((x+0)/2, (y+0)/2, (z+0)/2) , de donde

P ‘ (x,y,z) = P ‘ (24/79, 36/49, 72,49)

OPCIÓN B

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 4 de 1998.

Una locomotora sale de una estación y viaja durante una hora a lo largo de una trayectoria rectilínea. La velocidad de la locomotora al cabo de t horas viene dada en km./h., por la fórmula

$$v(t) = 400t^3 - 1200t^2 + 800t \quad (0 \le t \le 1)$$

(a) Calcula el espacio total que recorre la locomotora.
(b) Determina la velocidad máxima que alcanza la locomotora y el instante en el que lo hace.

Solución

(a)
Sabemos que $v(t) = 400t^3 - 1200t^2 + 800t$ $(0 \le t \le 1)$ y que $v(t) = e'(t)$, por tanto aplicando el teorema fundamental del cálculo integral tenemos

$e(t) = \int v(t)\,dt = \int (400t^3 - 1200t^2 + 800t)\,dt = 400.t^4/(4) - 1200\,t^3/(3) + 800\,t^2/(2)$

de donde $e(1) = 400/4 - 1200/3 + 800/2 = 100$ Km.

(b)
La velocidad máxima la calcularemos determinando los máximos de la función v(t)
$v(t) = 400t^3 - 1200t^2 + 800t$
$v'(t) = 1200t^2 - 2400t + 800 = 0$, simplificando tenemos
$3t^2 - 6t + 2 = 0$, y resolviéndola nos da
$t = 1 \pm \sqrt{1/3}$
$v''(t) = 2400t - 2400$
$v''(1 + \sqrt{1/3}) > 0$, luego es un mínimo
$v''(1 - \sqrt{1/3}) < 0$, luego es un máximo, y el instante es $t = 1 + \sqrt{1/3}$ y la velocidad máxima es $v(t) = 400t^3 - 1200t^2 + 800t = v(t) = 400(1 + \sqrt{1/3})^3 - 1200(1 + \sqrt{1/3})^2 + 800(1 + \sqrt{1/3})$ Km/h.

Ejercicio 2 de la opción B del modelo 4 de 1998.

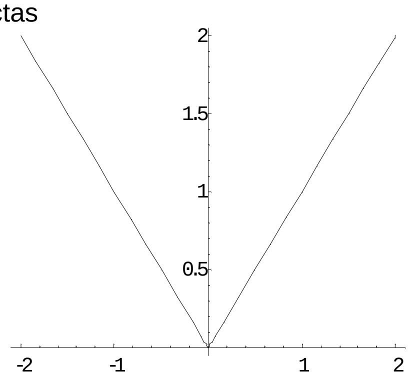
Considera la función valor absoluto, es decir, la función $f : \Re \to \Re$ dada por $f(x) = |x|$.
(a) Estudia la derivabilidad de f.
(b) Dibuja la gráfica de f.
(b) Halla $\int_{-2}^{2} |x|\,dx$

Solución

(a)
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \ge 0 \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases}; \quad f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ -1 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

Tenemos que ver si existe $f'(0)$, es decir si $f'(0^+) = f'(0^-)$
$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0+} (1) = 1$
$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0+} (-1) = -1$
Como $f'(0^+) \ne f'(0^-)$, no existe $f'(0)$.

(b)
La gráfica de f(x) son dos trozos de rectas



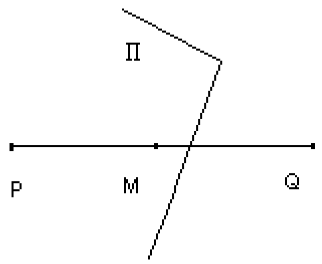
(c)
$$\int_{-2}^{2} |x|\,dx = \int_{-2}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{2} x\,dx = \left[\frac{-x^2}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} = (0) - (-2) + (2) - 0 = 4$$

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 4 de 1998.

Considera los puntos P = (1, 1, 1) y Q = (-1, -1, 2)
(a) Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos que se encuentran a igual distancia del punto P que del punto Q..
(b) Halla la ecuación del plano que corta perpendicularmente y en su punto medio al segmento que une los puntos P y Q.

Solución

(a)
Los punto X que están a igual distancia verifican d(P,X) = d(Q,X)
PX = (x-1, y-1, z-1), luego $|\mathbf{PX}|$ = $[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2]^{(1/2)}$
QX = (x+1, y+1, z-2), luego $|\mathbf{QX}|$ = $[(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2]^{(1/2)}$
Igualando $|\mathbf{PX}| = |\mathbf{QX}|$, y elevando al cuadrado tenemos
$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2$ desarrollando y simplificando sale
0 = 4x + 4y – 2z – 3, que es un plano.
(b)



El plano Π pedido pasa por el punto M((1-1)/2, (1-1)/2, (1+2)/2) = M(0,0,3/2), y tiene como vector normal **n** = **PQ** = (-2,-2,1)
$\Pi \equiv -2(x-0) - 2(y-0) + 1(z-3/2) = -2x - 2y + z - 3/2 = 0$

Ejercicio 4 de la opción B del modelo 4 de 1998.

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

(a) Comprueba que se verifica $A^2 - 2A + I = O$, siendo I la matriz identidad de orden 3.
(b) Usando la igualdad anterior, calcula razonadamente A^{-1} y A^2.

Solución

(a)
$$A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^2=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 2A + I_3 = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -10 & 8 & -4 \\ -4 & 2 & -2 \\ 8 & -8 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)
$A^2 = 2A - I$. Multiplicando por la derecha por A^{-1}
$A^2 . A^{-1} = 2A . A^{-1} - I . A^{-1}$. operando sale

$$A^{-1} = 2I - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$A^4 = A^2 . A^2 = (2A - I).(2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I^2 = 4A^2 - 4A + I = 4(2A - I) - 4A + I = 4A - 3I =$

$$=4\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$