

Opción A**Ejercicio 1 de la Opción A del modelo 5 de 2001.**

[2'5 puntos] Calcula una primitiva de la función f definida por $f(x) = \frac{2x^2+10x}{x^2+2x-3}$ para $x \neq 1$ y $x \neq -3$.

Solución

Como $f(x) = \frac{2x^2+10x}{x^2+2x-3}$ tiene igual grado numerador y denominador para calcular una primitiva al ser un integral racional primero tenemos que efectuar la división para obtener el cociente y el resto.

$2x^2+10x$	x^2+2x-3
$-2x^2-4x+6$	2
$6x+6$	

$$I = \int \frac{2x^2+10x}{x^2+2x-3} dx = \int (2) dx + \int \frac{6x+6}{x^2+2x-3} dx = 2x + I_1; \quad x^2+2x-3 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases}$$

$$\frac{6x+6}{x^2+2x-3} = \frac{6x+6}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)} \rightarrow 6x+6 = A(x+3) + B(x-1)$$

$$\text{Si } x=1 \rightarrow 12 = A(4) \rightarrow A=3$$

$$\text{Si } x=-3 \rightarrow -12 = B(-4) \rightarrow B=3$$

$$I_1 = \int \frac{6x+6}{x^2+2x-3} dx = \int \frac{A}{x-1} dx + \int \frac{B}{x+3} dx = A \cdot \ln|x-1| + B \cdot \ln|x+3| = 3 \cdot \ln|x-1| + 3 \cdot \ln|x+3|$$

$$\text{Luego } I = 2x + I_1 = 2x + 3 \cdot \ln|x-1| + 3 \cdot \ln|x+3| + K$$

Ejercicio 2 de la Opción A del modelo 5 de 2001.

[2'5 puntos] Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} 3ax+b & \text{si } x \leq 0 \\ e^{x(ax+b)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Determina a y b sabiendo que f es derivable.

Solución

Como $f(x)$ es derivable también es continua, en particular en $x=0$

$$\text{Como es continua en } x=0 \rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3ax+b) = b; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{x(ax+b)}) = e^0 = 1$$

Por tanto igualando $b=1$

Como $f(x)$ es derivable en $x=0 \rightarrow f'(0^+) = f'(0^-)$

$$f'(x) = \begin{cases} 3a & \text{si } x \leq 0 \\ e^{x(ax+b)} \cdot [(ax+b)+x(a)] & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{x(ax+b)}) [(ax+b)+x(a)] = e^0(b) = 1 \cdot b = b$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3a) = 3a$$

Como $f'(0^+) = f'(0^-)$, tenemos que $3a = b$, y de la continuidad tenemos que $3a = 1$. Luego $a = 1/3$.

Ejercicio 3 de la Opción A del modelo 5 de 2001.

$$\text{Considera } A = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -m \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) [1 punto] ¿Para que valores de m tiene inversa la matriz A ?

(b) [1'5 puntos] Resuelve, para $m=2$, el sistema de ecuaciones $AX=C$.

Solución

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -m \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a)

Para que exista A^{-1} $\det(A) = |A| \neq 0$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} m & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -m \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \{ (1^a F + 2^a F \text{ y } 1^a F(2) + 3^a F) \} = \begin{vmatrix} m & -1 & 1 \\ m+2 & 0 & -m+1 \\ 2m+3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(-1) \cdot \begin{vmatrix} m+2 & -m+1 \\ 2m+3 & 0 \end{vmatrix} = -(-m+1)(2m+3) = (m-1)(2m+3)$$

$(m-1)(2m+3) = 0 \rightarrow m-1=0$ de donde $m=1$ y $2m+3=0$ de donde $m=-3/2$
por tanto existe A^{-1} si $m \neq 1$ y $m \neq -3/2$

(b)

Si $m=2$ el sistema $AX=C$ es $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Como para $m=2$, $|A| = (m-1)(2m+3) = (1)(7) = 7 \neq 0$ luego existe A^{-1} . Multiplicamos $AX=C$ por la izquierda por A^{-1}

$$A^{-1}AX = A^{-1}C \rightarrow I \cdot X = A^{-1}C \rightarrow X = A^{-1}C$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A^t); \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -7 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

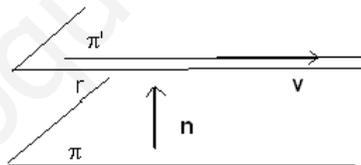
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A^t) = (1/7) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -7 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}C \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1/7) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -7 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1/7) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/7 \\ -5/7 \\ -1/7 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 de la Opción A del modelo 5 de 2001

[2'5 puntos] Determina la recta que no corta al plano de ecuación $x - y + z = 7$ y cuyo punto más cercano al origen es $(1,2,3)$.

Solución



Como la recta r no corta al plano π la recta r ha de ser paralela al plano π luego su vector director v es perpendicular al vector normal del plano $n = (1, -1, 1)$

Consideramos el plano π' paralelo al dado pero que contenga a la recta r

$\pi' \equiv x - y + z = k$. Como contiene al punto $A(1,2,3)$

$(1) - (2) + (3) = k$ de donde $k = 2$, es decir $\pi' \equiv x - y + z = 2$

Consideramos ahora el plano π'' más próximo al origen que pasa por el punto $(1,2,3)$. Este plano tiene como vector normal $n'' = (1,2,3)$ luego su ecuación es

$\pi'' \equiv (1)(x-1) + (2)(y-2) + (3)(z-3) = x + 2y + 3z - 14 = 0$

La recta pedida r es la intersección de los planos π' y π'' , es decir

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ x + 2y + 3z - 14 = 0 \end{cases}$$

Opción B

Ejercicio 1 de la Opción B del modelo 5 de 2001.

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 3$ y sea r la recta de ecuación $2x + y = 6$.

(a) [1'5 puntos] Determina, si es posible, un punto de la gráfica de f en el que la recta tangente sea r .

(b) [1 punto] ¿Hay algún punto de la gráfica de f en el que la recta normal a la gráfica sea r ? Justifica la respuesta.

Solución

(a)

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 3$ y sea r la recta de ecuación $2x + y = 6$.

La pendiente de la recta es $y' = -2$

Veamos don se cortan $f(x)$ y la recta

$$x^3 - 5x^2 + 5x + 3 = -2x + 6 \rightarrow x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$$

Por Ruffinni

1	1	-5	7	-3
		1	-4	-3
	1	-4	3	0

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x-1)(x^2 - 4x + 3) = 0$$

de $x-1 = 0$ tenemos $x = 1$

de $x^2 - 4x + 3 = 0$ tenemos $x = 1$ y $x = 3$

Vamos a calcular las rectas tangentes a $f(x)$ en $x = 1$ y $x = 3$

Recta tangente en $x = 1 \rightarrow y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 3 \rightarrow f(1) = 4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 5 \rightarrow f'(1) = -2$$

La recta tangente en $x = 1$ es $y - 4 = (-2)(x-1)$. Operando $y = -2x + 6$, que es la que me han dado

Recta tangente en $x = 3 \rightarrow y - f(3) = f'(3)(x-3)$

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 3 \rightarrow f(3) = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 5 \rightarrow f'(3) = 2$$

La recta tangente en $x = 3$ es $y - 0 = (2)(x-3)$. Operando $y = 2x - 6$.

(b)

Para que la recta dada $y = -2x + 6$ fuese normal a $f(x)$ en $x = 1$ o $x = 3$, como la recta normal tiene de ecuación en $x = a$ $y - f(a) = (-1/f'(a))(x-a)$ la pendiente de la recta tendría que ser $(-1/f'(1)) = (-1/-2) = 1/2$, que no coincide con -2 que es la pendiente de la recta dada o $(-1/f'(3)) = (-1/2) = -1/2$, que tampoco coincide con -2 que es la pendiente de la recta dada, por tanto la recta dada no puede ser normal a $f(x)$ en $x = 1$ o $x = 3$.

Ejercicio 2 de la Opción B del modelo 5 de 2001.

Considera la curva de ecuación $y = \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 2x - 3}$.

(a) [1'5 puntos] Determina sus asíntotas.

(b) [1 punto] ¿Corta la curva a alguna de sus asíntotas en algún punto? Justifica la respuesta.

Solución

(a)

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 2x - 3}$$

Como es un cociente de funciones polinómicas las posibles asíntotas verticales (A.V.) son los números que anulan el denominador si al calcular su límite nos resulta ∞

$$x^2 - 2x - 3 = 0. \text{ Resolviendo nos queda } x = -1 \text{ y } x = 3$$

Como

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 2x - 3} = \frac{-3}{0^-} = +\infty, x = -1 \text{ es una A.V. de } f(x)$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 2x - 3} = \frac{33}{0^+} = +\infty, x = 3 \text{ es una A.V. de } f(x)$$

La función no corta a sus asíntotas verticales porque en dichos puntos la función no está definida.

Tiene una asíntota oblicua (A.O.) $y = mx + n$ porque es una cociente con el numerador de grado una unidad más que el denominador, con

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x}{x^3 - 2x^2 - 3x} = 1 \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 2x}{x^2 - 2x - 3} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 2x - x^3 + 2x^2 + 6x}{x^2 - 2x - 3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 8x}{x^2 - 2x - 3} \right) = 2. \text{ luego la A.O. es } y = mx + n = x + 2, \text{ que es la misma}$$

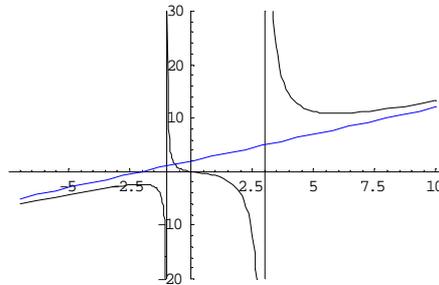
en $\pm \infty$ por ser un cociente de funciones polinómicas. Se puede hacer rápidamente dividiendo numerador entre denominador, y la A.O. es el cociente.

$$\begin{array}{r} x^3+2x \quad | \quad x^2-2x-3 \\ -x^3+2x^2+3x \quad | \quad x+2 \\ \hline 2x^2+5x \\ -2x^2+4x+6 \\ \hline 9x+6 \end{array}$$

Para ver si la función corta a la asíntota oblicua resolvemos el sistema

$$\frac{x^3+2x}{x^2-2x-3} = x+2 \rightarrow x^3+2x = x^3-2x^2-4x+2x^2-3x-6 \rightarrow 9x = -6 \rightarrow x = -6/9 = -2/3$$

La función f(x) y la A.O. se cortan en el punto (-2/3, 4/3)
Aunque no la piden la gráfica es



Ejercicio 3 de la Opción B del modelo 5 de 2001.

Denotamos por M^t a la matriz traspuesta de una matriz M. Considera

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, B = (1 \ 4 \ 3) \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -2 & 9 & -6 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (a) [1'5 puntos] Calcula (AB)^t y (BA)^t.
- (b) [1 punto] Determina una matriz X que verifique la relación 1/2 · X + (AB)^t = C.

Solución

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, B = (1 \ 4 \ 3) \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -2 & 9 & -6 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \ 4 \ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}; (AB)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & -4 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}; BA = (1 \ 4 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (1 + 8 - 3) = (6)$$

$$(BA)^t = (6)$$

(b)

$$1/2 \cdot X + (AB)^t = C$$

$$1/2 \cdot X + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & -4 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -2 & 9 & -6 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$1/2 \cdot X = - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & -4 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -2 & 9 & -6 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -6 & 1 & -2 \\ -2 & -10 & 7 \end{pmatrix}; X = 2 \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -6 & 1 & -2 \\ -2 & -10 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 \\ -12 & 2 & -4 \\ -4 & -20 & 14 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 de la Opción B del modelo 5 de 2001.

[2'5 puntos] Sabiendo que las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y-z = 1 \\ x-y = 2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x-2y-z = a \\ 2x+z = a \end{cases}$ se cortan, determina a y el punto de corte.

Solución

Como las rectas nos las han dado en forma implícita como intersección de dos planos cada una, discutiremos y resolveremos el sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas

$$x+y-z = 1$$

$$x-y = 2$$

$$x-2y-z = a$$

$$2x+z = a$$

sabiendo que para que se corten $\text{rango}(M) = \text{rango}(M^*) = 3$ por el teorema de Rouché, siendo

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ la matriz de los coeficientes y } M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & a \\ 2 & 0 & 1 & a \end{pmatrix} \text{ la matriz ampliada}$$

$$\text{En } M \text{ como } \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \{(3^a F - 1^a F)\} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} \quad (-1)(-3) = 3 \neq 0, \text{ rango}(M) = 3$$

$$\text{En } M^* \text{ para que } \text{rango}(M^*) = 3, |M^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & a \\ 2 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} = \{(4^a F + 3^a F \text{ y } 4^a F + 1^a F)\} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & a+1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 2a \\ 2 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} = (1)(-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & a+1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2a \end{vmatrix} = \{(2^a F + 1^a F \text{ y } 3^a F + (2)1^a F)\} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & a+1 \\ 4 & 0 & a+3 \\ 9 & 0 & 4a+2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)(1)(-1)(16a+8-9a-27) = 7a - 19 = 0 \rightarrow a = 19/7 \text{ para que las rectas se corten.}$$

Para obtener el punto de corte resolvemos el sistema que nos queda con $a = 19/7$, y como $\text{rango}(M) = \text{rango}(M^*) = 3$ solo tenemos 3 ecuaciones y 3 incógnitas principales. Nos quedamos con las tres primeras ecuaciones

$$x + y - z = 1$$

$$x - y = 2 \rightarrow 2^a - 1^a$$

$$x - 2y - z = 19/7 \rightarrow 3^a - 1^a$$

Con lo cual nos queda

$$x + y - z = 1$$

$$0 - 2y + z = 1$$

$$0 - 3y + 0 = 19/7 - 1 = 12/7 \rightarrow y = -4/7$$

$$(-2)(-4/7) + z = 1 \rightarrow z = -1/7$$

$$x + (-4/7) + (-1/7) = 1 \rightarrow x = 10/7$$

Las recta se cortan en el punto $(x,y,z) = (10/7, -4/7, -1/7)$