Opción A

Ejercicio 1 de la Opción A de junio, modelo 4 de 2002.

Considera la función f : R $\rightarrow$ R definida por $f(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$

(a) [1 punto] Calcula las asíntotas de la gráfica de f

(b) [1'5 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valor que alcanzan).

Solución

(a) Asíntotas

$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{2x}{x^2+1}} = e^0 = 1$, luego y = 1 es una asíntota horizontal (A.H.) en + ∞

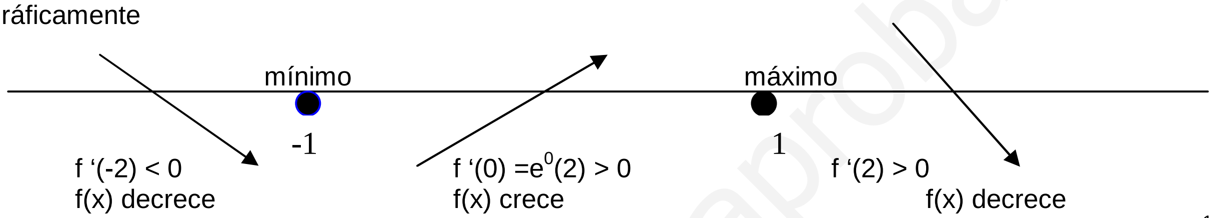
$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{2x}{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-2x}{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{2x}{x^2+1}}} = \frac{1}{e^0}$ = 1/1 = 1, luego y = 1 es una A.H. en - ∞

(b) Monotonía. Estudio de f '(x)

$$f'(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}} \cdot \left[\frac{2(x^2+1) - 2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}\right] = e^{\frac{2x}{x^2+1}} \cdot \left[\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}\right]$$

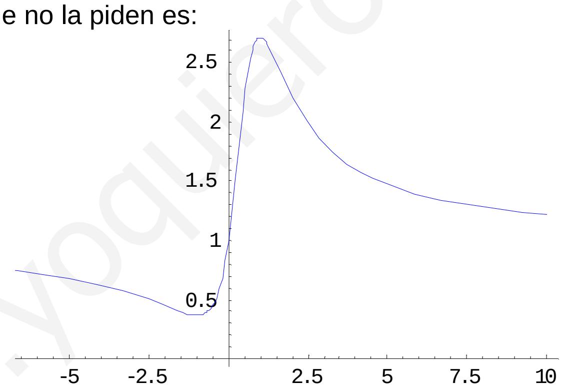
f '(x) = 0 $\Rightarrow$ $-2x^2+2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$, que serán los posibles máximos o mínimos

Gráficamente



f(x) decrece en (- ∞, -1)∪(1, + ∞), rece en (-1, 1), tendría un máximo relativo en x = 1 con valor $f(1) = e^1 = e$, y un mínimo relativo en x = -1 con valor $f(-1) = e^{-1} = 1/e$.

La gráfica de la función aunque no la piden es:



Ejercicio 2 de la Opción A de junio, modelo 4 de 2002.

[1'5 puntos] Determina un polinomio P(x) de segundo grado sabiendo que P(0) = P(2) = 1 y $\int_0^2 P(x)dx = 1/3$.

Solución

$P(x) = ax^2 + bx + c$

P(0) = 1 = c, luego c = 1

P(2) = 1 = 4a+2b+1, luego 4a +2b= 0; de donde b = -2a

$\int_0^2 (ax^2+bx+c)\,dx = 1/3 = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_0^2$ =(8/3)a + 2b + 2c = 1/3

Sustituyendo b = -2a, tenemos (8/3)a + 2(-2a) + 2c = 1/3 y operando obtenemos a = -5/4 y b = 10/4, luego el polinomio pedido es $P(x) = (-5/4)x^2 + (10/4)x + 1$

Ejercicio 3 de la Opción A de junio, modelo 4 de 2002.

[2'5 puntos] Determina luna matriz A simétrica (A coincide con su traspuesta) sabiendo que Det(A) = - 7

y $A\cdot\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Solución

Como A es una matriz simétrica tiene que ser cuadrada y de la forma A = $\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$

$|A|$ = -7, es decir $\begin{vmatrix} x & y \\ y & z \end{vmatrix}$ =xz – y^2 = -7

$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ Operando

$\begin{pmatrix} 2x-y & 6x-3y \\ 2y-z & 6y-3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, de donde obtenemos 2x-y = -4; 2y – z=1; 6x-3y = -12, 6y –3z = 3. si observamos de las cuatro ecuaciones dos son iguales por tanto el sistema a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} 2x-y=-4 \\ 2x-z=1 \\ xz-y^2=-7 \end{cases}$$

De 2x – y = -4 tenemos x =(y-4)/2
De 2y – z = 1 tenemos z = 2y – 1. Entrando con esta x y z en la ecuación xz – y^2 = -7 tenemos
[(y-4)/2]·(2y –1) – y^2 = -7.
Operando se van los términos en y^2 y nos queda y = 2, luego x =(y-4)/2 = = - 1 y z = 2y – 1 = 3, de donde la matriz pedida es A = $\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4 de la Opción A de junio, modelo 4 de 2002.-

[2'5 puntos] Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi \equiv x+y-z+6=0$ con la recta s ≡ x/3 = y-2 = z+1 y es paralela a la recta r ≡ $\begin{cases} 3x+y-4 = 0 \\ 4x-3y+z-1 = 0 \end{cases}$

Solución

P = s ∩ π;

s ≡ x/3 = y-2 = z+1 la ponemos en paramétrica s ≡ $\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases}$

3λ + (2+λ) – (-1+λ) + 6 = 0, de donde λ = - 3 y tenemos P(3(-3), 2-3, -1-3) = P(-9, -1, -4)

El vector director es $\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ = **i**(1) – **j**(3) + **k**(-9-4) = (1,-3,-13)

La recta pedida es $\frac{x-(-9)}{1} = \frac{y-(-1)}{-3} = \frac{z-(-4)}{-13}$.

Opción B

Ejercicio 1 de la Opción B de junio, modelo 4 de 2002.

Sea f la función f(x) = $\frac{9x-3}{x^2-2x}$ para x ≠ 0 y x ≠ 2.

(a) [1 punto] Calcula las asíntotas de la gráfica de f
(b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
(c) [0'5 puntos] Con los datos obtenidos esboza la gráfica de f .

Solución

(a) Asíntotas

Como $\lim_{x\to 0^+} \frac{9x-3}{x^2-2x} = \frac{-3}{0^-}$ = + ∞; la recta x = 0 es una A.V. $\lim_{x\to 0^-} \frac{9x-3}{x^2-2x} = \frac{-3}{0^+}$ = - ∞;

Como $\lim_{x\to 2^+} \frac{9x-3}{x^2-2x} = \frac{15}{0^+}$ = + ∞; la recta x = 2 es una A.V. $\lim_{x\to 2^-} \frac{9x-3}{x^2-2x} = \frac{15}{0^-}$ = - ∞;

Como $\lim_{x\to \infty} \frac{9x-3}{x^2-2x}$ =0; la recta y = 0 es una A.H. en ± ∞ de f(x).

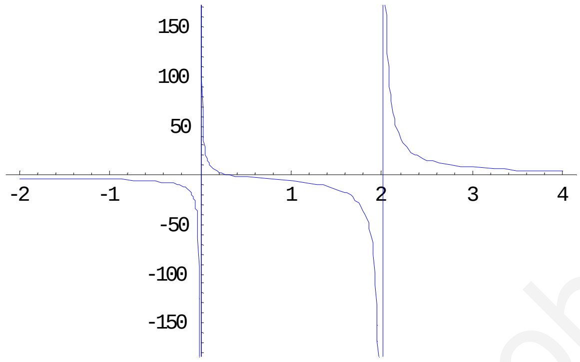
(b) Monotonía. Estudio de f '(x)

f '(x) = $\dfrac{9(x^2-2x)-(9x-3)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \dfrac{-9x^2+6x-6}{(x^2-2x)^2}$

f '(x) = 0; $-9x^2+6x-6=0$ o bien $3x^2-2x+2=0$, de donde x = $\dfrac{2\pm\sqrt{4-24}}{6}$ que no tiene soluciones reales, por tanto la función siempre es creciente o decreciente para lo cual sustituiremos un nº cualquiera en la primera derivada. Si nos da positivo la función es creciente y si nos da negativo la función es decreciente siempre.

Probamos el 1, f '(1) = -9/1 = -9 < 0, luego la función siempre es decreciente.

Aunque no la piden la gráfica es



Ejercicio 2 de la Opción B de junio, modelo 4 de 2002.

[2'5 puntos] Sea f : R → R la función definida por f(x) = $x\cdot e^{-x}$. Esboza el recinto limitado por la curva y = f(x), los ejes coordenados y la recta x = -1. Calcula su área.

Solución

f(x) = $x\cdot e^{-x} = \dfrac{x}{e^{x}}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^{x}} = \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$ = {L´Hôpital } = $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{e^{x}} = \dfrac{1}{\infty}$ = 0, luego y = 0 es una A. H. en + ∞

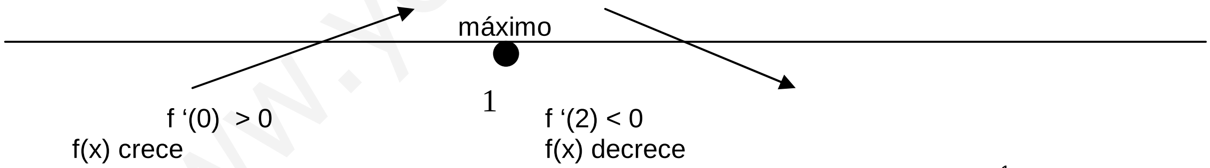
$\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} (-x)\cdot e^{-(-x)} = \lim\limits_{x\to\infty} (-x)\cdot e^{x} = (-\infty)\cdot\infty = -\infty$

Estudiemos f '(x) para ver su monotonía

f '(x) = $1.e^{-x} + x.e^{-x}.(-1) = e^{-x}(1-x)$

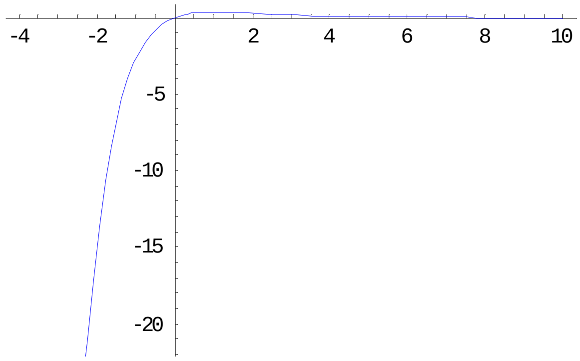
f '(x) = 0; i – x = 0 de donde x = 1 que será el posible máximo o mínimo

Gráficamente



f crece en (- ∞, 1) y decrece en (1,+ ∞) por tanto x = 1 es un máximo que vale f(1)= e^{-1}.

Su gráfica es



Área = $\left|\int_{-1}^{0} xe^{-x}dx\right| = \left|\left[-e^{-x}(x+1)\right]_{-1}^{0}\right|$ = | [(-1(1)) – (-e(0))] | = | - 1 | = 1 u.a.

I = $\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x}$

u = x ; du = dx

$dv = e^{-x}$; $v = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$

Ejercicio 3 de la Opción B de junio, modelo 4 de 2002.

[2'5 puntos] Determina una matriz X que verifique la ecuación AX = X – B siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solución

AX = X – B; AX – X = - B; (A – I)·X = - B

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;;\; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \;;\; A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como $|A - I| = -1(1) - 0 + 1(-1) = -2 \neq 0$, existe $(A - I)^{-1}$ y por tanto $X = -(A - I)^{-1}\cdot B$

$$(A - I)^{-1} = \frac{1}{|A-I|}\cdot \mathrm{Adj}(A - I)^{t}$$

$$(A - I)^{t} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \;;\; \mathrm{Adj}(A - I)^{t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;;\; (A - i)^{-1} = \frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = -(A - I)^{-1}\cdot B = -\frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 de la Opción B de junio, modelo 4 de 2002.

[2'5 puntos] Calcula el área del triángulo de vértices A(1,1,2), B(1,0,-1) y C(1,-3,2)

Solución

Área $\Delta = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = (1/2)\cdot\sqrt{12^2} = (1/2)\cdot(12) = 6$ u.a.

$$\overrightarrow{AB} = (0,-1,-3) \;;\; \overrightarrow{AC} = (0,-4,0) \;;\; \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-12) - \mathbf{j}(0) + \mathbf{k}(0) = (-12,0,0)$$