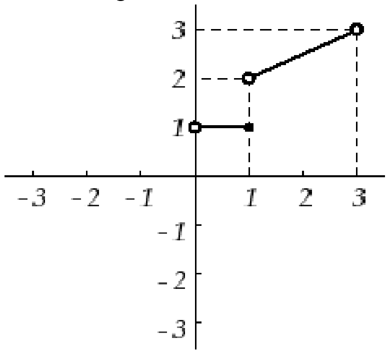
Opción A

Ejercicio 1 de la Opción A del modelo 2 de 2003.

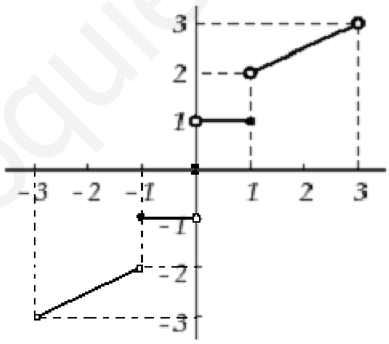
En la figura adjunta puedes ver representada parte de la gráfica de una función *f* que está definida en el intervalo (-3, 3) y que es simétrica respecto al origen de coordenadas.



(a) [0'75 puntos] Razona cual debe ser el valor de *f*(0).
(b) [0'75 puntos] Completa la gráfica de *f*.
(c) [1 punto] Halla f '(x) para los x ∈ (-3, 3) en los que dicha derivada exista.

Solución

(a)
Como la función f(x) es simétrica respecto al origen (0, 0) sabemos que f(-x) = - f(x), es dcir al punto de coordenadas (x,y) del semiplano x > 0 le corresponde el punto (- x, - y) en el semiplano x < 0, es decir:
Al punto (1,1) le corresponde el punto (-1,-1)
Al punto (0^+,1) le corresponde el punto (0^-, -1)
Al punto (1^+,2) le corresponde el punto (-1^-, -2)
Al punto (3^- , 3^-) le corresponde el punto (-3^+ , -3^+)
A una recta le cooresponde una recta
Como la función está definida en (-3,3) y es simétrica respecto al (0,0) la única posiblilidad que nos queda para definir f(0), es que sea 0.
Por tanto la gráfica de f(x) es la siguiente



De la gráfica se observa que los límites laterales en x = 0 son los los siguientes
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +1$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$, por tanto no existe $\lim_{x\to 0} f(x)$, con lo cual no es continua en x = 0..

(b)
La gráfica de f(x) es la que ya he dibujado en el apartado (a)
Vamos a calcular su expresión analítica:
Si –3 < x < -1 la función es una recta y = mx+n que pasa por los puntos (-3,-3) y (-1,-2). Entrando con estos valores en y = mx+n tenemos el sistema
-2 = -m+n
-3 = -3m+n. Resolviendolo obtenemos m = (1/2) y n = -(3/2) , por tanto y = (1/2)x – (3/2)

Si –1 ≤ x < 0, la función es la constante f(x)= -1.

Si 0 < x ≤ 1, la función es la constante f(x)= 1.

Si 1 < x < 3 la función es una recta y = mx+n que pasa por los puntos (3, 3) y (1, 2). Entrando con estos valores en y = mx+n tenemos el sistema
2 = m+n
3 = 3m+n. Resolviendolo obtenemos m = (1/2) y n = (3/2) , por tanto y = (1/2)x + (3/2)

Resumiendo:

$$f(x)=\begin{cases}(1/2)x-(3/2) & si \quad -3<x<-1\\ -1 & si \quad -1<x<0\\ 0 & si \quad x=0\\ 1 & si \quad 0<x<1\\ (1/2)x+(3/2) & si \quad 1<x<3\end{cases}$$

(c)

Como f(x) no es contínua en x =0, x = -1 y x = 1, tampoco es derivable en dicchos puntos.

La función derivada sería $f'(x)=\begin{cases}(1/2) & si \quad -3<x<-1\\ 0 & si \quad -1<x<0\\ 0 & si \quad 0<x<1\\ (1/2) & si \quad 1<x<3\end{cases}$

Ejercicio 2 de la Opción A del modelo 2 de 2003.

[2'5 puntos] Se sabe que la función f : R $\rightarrow$ R definida por f(x) = ax^2 + bx + c tiene máximo absoluto en el punto de abscisa x = 1, que su gráfica pasa por el punto (1, 4) y que $\int_{-1}^{3}$ f(x) dx = 32/2. Halla a, b y c.

Solución

La función que me han dado f(x) = ax^2 + bx + c es polinómica por tanto continua y derivable las veces que haga falta en $\Re$.

Como x = 1 es un máximo absoluto, tambien es un máximo relativo luego f '(1) = 0

Como pasa ppor (1,4) tenemos que f(1) = 4

Tambien tenemos $\int_{-1}^{3}$ f(x) dx = 32/2 = 16, con estas tres condiciones calcularemos a, b y c

f(x) = ax^2 + bx + c

f '(x) = 2ax + b

De f '(1) = 0 tenemos 0 = 2a + b, luego b = - 2a

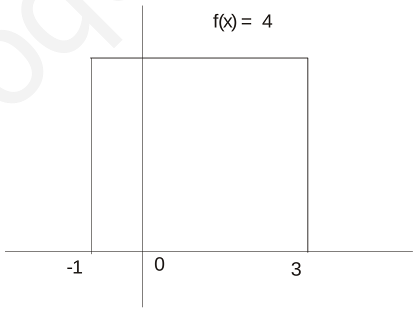
De f(1) = 4 tenemos 4 = a + b + c = a – 2a + c = - a + c = 4, luego c = 4 + a

De $\int_{-1}^{3}$ f(x) dx = 16 tenemos 16 = $\int_{-1}^{3}$ [ax^2 + bx + c] dx = $[ax^3/3 + bx^2/2 + cx]^3_{-1}$ =

= (9a + (9/2)(-2a) + 3(4 + a)) - (-a/3 +(1/2)(-2a) –1(4+a)) = 9a – 9a +12 +3a +a/3 +a + 4 + a

Es decir 16 = 16 + 5a + a/3 = 16 + a(5 + 1/3), es decir a(5 + 1/3) = 0, de donde a = 0, b = 0 y c = 4. Por tanto la función que me han dado es la constante f(x) = 4.

Su gráfica, aunque no lo piden es



Ejercicio 3 de la Opción A del modelo 2 de 2003.

[2'5 puntos] Determina razonadamente los valores de m para los que el sistema de ecuaciones

$$2x + y + z = mx$$
$$x + 2y + z = my$$
$$x + 2y + 4z = mz$$

tiene más de una solución.

Solución

El sistema

$$2x + y + z = mx$$
$$x + 2y + z = my$$
$$x + 2y + 4z = mz$$

, pasándolo todo a un miembro,m y sacando factor común, es elsistema homogeneo

$$(2-m)x + y + z = 0$$
$$x + (2-m)y + z = 0$$
$$x + 2y + (4-m)z = 0$$

Sabemos que un sistema homogeneo de tres ecucaiones con tres incógnitas tiene solución distinta de la trivial (0,0,0) si y solo si el determinante de la matrizz de los coeficients es cero, es dcir

$$\begin{vmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 2 & 4-m \end{vmatrix} = 0 = \text{\{Desarrollo por los adjuntos de la primera fila\}} =$$

= (2-m)[(2-m)(4-m) – 2] – 1(4-m – 1) + 1[2-(2-m) = (2-m)[m^2 – 6m + 6) +m – 3 + m =
= - m^3 + $8m^2$ –16m + 9
Sacamos una raiz po Ruffini

	-1	8	-16	9
1		-1	7	-9
	-1	7	-9	0

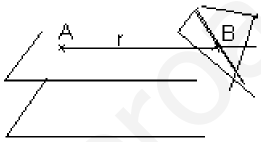
Luego - m^3 + $8m^2$ –16m + 9 = (x – 1)(-x^2 + 7x – 9) = 0, de donde
x - 1 = 0, que nos da como solución x = 1
-x^2 + 7x – 9 = 0, que nos dan como soluciones x = $\dfrac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Por tanto para x = 1, x = $\dfrac{7 + \sqrt{13}}{2}$ y x = $\dfrac{7 - \sqrt{13}}{2}$, el sistema homogeneo dado tiene solcuión distinta de la trivial y es compatible e indeterminado, y tiene mas de una solución.

Ejercicio 4 de la *Opción A* del modelo de 2003.-

[2’5 puntos] Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (3, 1, -1), es paralela al plano *3x – y + z = 4* y corta a la recta intersección de los planos *x + z* = 4 y x - 2y + z = 1.

Solución



Trazamos el plano paralelo a *3x – y + z = 4* que pasa por el punto A(3, 1, -1), que es
3x – y + z = k, le imponemos ka condición de que pase por (3, 1, -1)
3(3) – (1) + (-1) = k, de donde k = 7, es decir el plano es 3x – y + z = 7
Como la rfecta r está contenida en el palno 3x – y + z = 7, y corta a la recta interswcciíon de los planos *x + z* = 4 y x - 2y + z = 1, la rfecta r pasa por el punto B punto de corte de los planos 3x – y + z = 7, *x + z* = 4 y x - 2y + z = 1.
Resolvemos el sistema
3x – y + z = 7
x + z = 4
x - 2y + z = 1, para calcular el punto B
3x – y + z = 7

x + z = 4
x - 2y + z = 1
3x – y + z = 7 {2ª +1ª(-1); 3ª + 1ª(-3)}
x + z = 4
0 - 2y + 0 = -3
0 – y + -2z = -5
y = 3/2,
2z = 15 – y = 5 – 3/2 = 7/2, de donde z = 7/4
x = 4 – x = 4 – 7/4 = 9/4
Luego elpunto de corte es B(9/4, 3/2, 7/4)
La recta que me piden es la que oasa por los punto A y B, luego tomo como punto el A y como vector **v = AB** = (9/4 – 3 , 3/2 – 1 , 7/4 + 1) = (– 3/4 , 1/2 , 11/4). Otoro vector paralelo a la recta es **w** =(-3,2,11)
La recta pedida es r ≡ (x – 3)/(-3) = (y – 1)/(2) = (z + 1)/(11)

Opción B

Ejercicio 1 de la *Opción* B del modelo 2 de 2003

[2’5 puntos] Se sabe que la función *f* : R → R definida por *f*(*x*) = ax^3 + bx^2 + cx + d es tal que *f*(0) = 4 y que su gráfica tiene un punto de inflexión en (1, 2). Conociendo además que la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x* = 0 es horizontal, calcula *a*, *b*, *c* y *d*.

Solución

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Nos dan f(0) = 4

Como (1, 2) es un punto de inflexión tenemos f ''(1) = 0 y además f(1) = 2

Como x = 0 es un punto de tangencia horizontal tenemos f '(0)= 0

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

De f '(0)= 0, tenemos 0 = 0 + 0 + c, luego c = 0

De f ''(1)= 0, tenemos 0 = 6a + 2b, luego b = - 3a

De f(1) = 2, tenemos 2 = a + b + c + d = a – 3a + d = -2a + d = 2

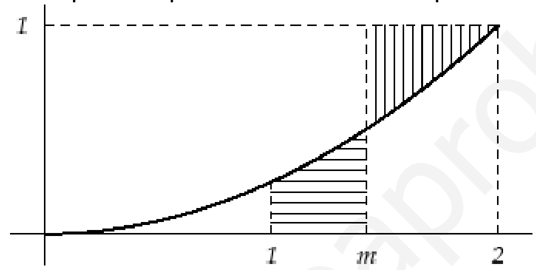
De f(0) = 4, tenemos 4 = 0 + 0 + 0 + d , luego d = 4

Operando tenemos 2a = 2 – d = 2 – 4 = 2, luego a = 1 y b = -3a = -3(1) = -3

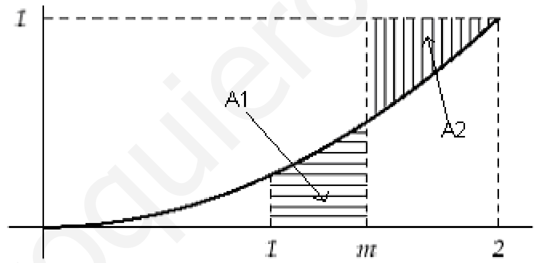
Por tanto los coeficientes pedidos son a = 1, b = - 3 , c = 0 y d = 4

Ejercicio 2 de la Opción B del modelo 2 de 2003.

[2'5 puntos] En la figura adjunta puedes ver representada en el intervalo [0*;* 2] la gráfica de la parábola de ecuación $y = x^2/4$. Halla el valor de *m* para el que las áreas de las superficies rayadas son iguales.



Solución



$A_1 = \int_1^m (x^2/4)\,dx = [x^3/12]^m_1 = m^3/12 – 1/12$

A_2 = área del rectángulo – área bajo curva =

$= (2 – m)(1) - \int_m^2 (x^2/4)\,dx = [x^3/12]^2_m = (2 – m) – [8/12 - m^3/12]$

Igualando $A_1 = A_2$, tenemos

$m^3/12 – 1/12 = (2 – m) – [8/12 - m^3/12]$. Operando tenemos m = 17/12

Ejercicio 3 de la Opción B del modelo 2 de 2003.

(a) [1 punto] Se sabe que el determinante de una matriz cuadrada *A* de orden 3 vale -2 ¿Cuánto vale el determinante de la matriz 4*A*?

(b) [1'5 puntos] Dada la matriz B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, ¿para qué valores de λ la matriz $3B + B^2$ no tiene inversa?

Solución

(a)

Sabemos que si A es una matriz cuadrada de orden n, entonces el determinante

$|k.A| = k^n . |A|$, puesto que la k sale una vez por cada fila o coilumna multiplicancdo, luego

$|4.A| = 4^3.|A| = 64(-2) = - 128$, puesto que el orden de A es 3

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = B.B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & 2 & 2 \\ \lambda & 2\lambda+1 & -2 \\ \lambda & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$3B + B^2 = 3. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+2\lambda & 2 & 2 \\ \lambda & 2\lambda+1 & -2 \\ \lambda & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2\lambda & 8 & 2 \\ 4\lambda & 2\lambda+1 & 1 \\ \lambda & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Para que $3B + B^2$ no tenga inversa el determinante $|3B + B^2|$ tiene que ser cero.
Desarrollamos el determiante por los adjuntos de la primera fila

$$\begin{vmatrix} 4+2\lambda & 8 & 2 \\ 4\lambda & 2\lambda+1 & 1 \\ \lambda & 1 & -1 \end{vmatrix} = (4 + 2\lambda). \begin{vmatrix} 2\lambda+1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 8. \begin{vmatrix} 4\lambda & 1 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} + 2. \begin{vmatrix} 4\lambda & 2\lambda+1 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} =$$

$= (4 + 2\lambda).(-2\lambda - 2) - 8(-4\lambda - \lambda) + 2(3\lambda - 2\lambda^2) = - 8\lambda^2 + 34\lambda - 8 = 0$

Resolviendo la ecuación de segundo grado $- 8\lambda^2 + 34\lambda - 8 = 0$, se obtiene $\lambda = 4$ y $\lambda = 1/4$, luego la matriz $3B + B^2$ no tiene inversa si $\lambda = 4$ y $\lambda = 1/4$.

Ejercicio 4 de la Opción B del modelo 2 de 2003.

Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x+y-z = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x - 2y + z = 0$.

(a) [1 punto] Calcula el haz de planos que contienen a la recta *r*.

(b) [1'5 puntos] Halla el plano que contiene a la recta *r* y corta al plano π en una recta paralela al plano $z = 0$.

Solución

recta $r \equiv \begin{cases} x+y-z = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x - 2y + z = 0$.

(a)

El haz de planos que contiene a la recta r es $(x + y - z - 1) + \lambda(y - 2) = 0$ con $\lambda \in \Re$

$(x + y - z - 1) + \lambda(y - 2) = x + (1 + \lambda)y - z - (1 + 2\lambda) = 0$

(b)

El plano que contiene a la recta r es de la forma $x + (1 + \lambda)y - z - (1 + 2\lambda) = 0$

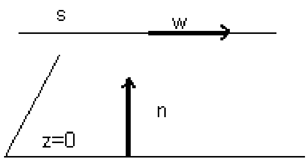
La recta s que corta al plano anterior (falta determinar el λ) y al plano $\pi \equiv x - 2y + z = 0$, tiene de ecuaciones en implícita:

$x + (1 + \lambda)y - z - (1 + 2\lambda) = 0$

$x - 2y + z = 0$

Un vector director **w** de dicha recta s es

$$\mathbf{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1+\lambda & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(1+\lambda-2) - \mathbf{j}(1+1) + \mathbf{k}(-2-1-\lambda) = (\lambda - 1, - 2, -3 -\lambda)$$



Si la recta s es paralela al plano $z = 0$, el vector director **w** de s es perpendicular al vector normal **n** de $z = 0$, luego su producto escalar es cero, es decir

$\mathbf{w} \bullet \mathbf{n} = (\lambda - 1, - 2, -3 -\lambda) \bullet (0,0,1) = -3 - \lambda = 0$, de donde $\lambda = -3$, y el plano pedido es

$x + (1 + (-3))y - z - (1 + 2(-3)\lambda) = x - 2y - z + 5 = 0$.