Opción A

Ejercicio n° 1 de la opción A del modelo 1 de 2004

Sea f : R → R la función definida por $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$.

(a) [0'75 puntos] Halla las asíntotas de la gráfica de f.

(b) [1'25 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

(c) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f .

Solución

(a)

Asíntotas de $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2} = \dfrac{x^2}{e^{x^2}}$

Calculamos el límite cuando x tiende a ± ∞ para ver si tiene asíntotas horizontales. Verticales no tiene puesto que no hay ningún número que anule el denominador, al ser el denominador una exponencial, que como sabemos no se anula nunca.

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot e^{-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Le aplicamos la regla de L'Hôpital, ((si "f" y "g" son funciones continuas en [a -δ, a + δ], derivables en (a -δ, a + δ), verificando que f(a) = g(a) = 0 y $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. Haciendo un cambio de variable se puede aplicar a ∞/∞)) tenemos que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x \cdot e^{x^2}} = \text{(simplificamos)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Por tanto

La recta y = 0 es una asíntota horizontal (AH) de f(x) en + ∞, y también en - ∞ puesto que también $\lim_{x\to -\infty} x^2 \cdot e^{-x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$

Como $\lim_{x\to \pm\infty} (f(x) - 0) = 0^+$, la función f(x) esta por encima de la AH en ± ∞

(b)

Para ver el crecimiento y decrecimiento de f(x) estudiamos su primera derivada f '(x).

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$$

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x^2} + x^2 \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x)$$

f '(x) = 0 , por tanto

$$0 = 2x \cdot e^{-x^2} + x^2 \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = e^{-x^2} \cdot (2x - 2x^3)$$

Como $e^{-x^2} \neq 0$ siempre, por ser una exponencial, lo que es cero es $2x - 2x^3$.

$0 = 2x - 2x^3 = 2x\cdot(1 - x^2)$. Por tanto las soluciones de f '(x) = 0 son x = 0, x = - 1 y x = +1.

Como f '(- 2) > 0, f(x) crece en (- ∞, - 1)

Como f '(- 0'1) < 0, f(x) decrece en (- 1, 0)

Como f '(+ 0'1) > 0, f(x) crece en (0, +1)

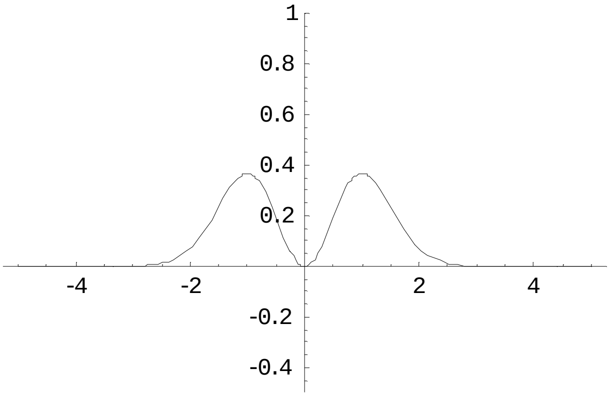
Como f '(+ 2) < 0, f(x) decrece en (1, + ∞)

Por definición x = -1 y x = + 1, son máximos relativos y valen $f(-1) = f(1) = 1\cdot e^{-1} = 1/e \cong 0'34$.

Por definición x = 0 es un mínimo relativos y vale $f(0) = 0\cdot e^0 = 1\cdot 0 = 0$.

(c)

Teniendo en cuenta los apartados (a) y (b) la gráfica de la función f(x) es



Ejercicio nº 2 de la opción A del modelo 1 de 2004

Considera la función f : R → R definida por f (x)= x·|x|.

(a) [0'75 puntos] Dibuja la región acotada del plano que está limitada por la gráfica de f y la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

(b) [1'75 puntos] Calcula el área de la región descrita en el apartado anterior.

Solución

(a)

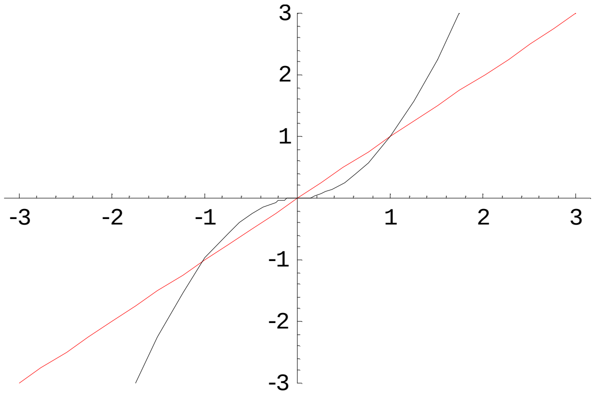
$$f(x) = x\cdot|x| = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La gráfica de x^2 es conocida (parábola con vértice en (0,0) y ramas hacia arriba

La gráfica de - x^2 es la misma que la de x^2 pero simétrica respecto al eje OX

La gráfica de x es conocida (bisectriz del primer y tercer cuadrante)

La gráfica pedida es



(b)

Para calcular el área primero calculamos los puntos de corte de ambas funciones (se está viendo que son – 1, 0 y +1)

De $x^2 = x$, tenemos $x^2 - x = 0 = x(x - 1)$. Por tanto las soluciones son x = 0 y x = 1

De $-x^2 = x$, tenemos $-x^2 - x = 0 = x(-x - 1)$. Por tanto las soluciones son x = 0 y x = - 1

$$\text{Área} = \int_{-1}^{0}(-x^2 - x)dx + \int_{0}^{1}(x - x^2)dx = \left[\frac{-x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{+1} =$$

= [(0) – (1/3 – 1/2)] + [(1/2 – 1/3) – (0)] = 1/6 + 1/6 = 1/3 unidades de área (u.a.)

Ejercicio nº 3 de la opción A del modelo 1 de 2004

Se sabe que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + \alpha y &= 1 \\ x + \alpha z &= 1 \\ y + z &= \alpha \end{aligned}$$

tiene una única solución.

(a) [1'25 puntos] Prueba que $\alpha \neq 0$.

(b) [1'25 puntos] Halla la solución del sistema.

Solución

(a)

Para que el sistema tenga una solución única, ha de ser compatible y determinado por lo tanto det(A) $\neq$ 0,

siendo A = $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes.

det(A) = $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = $-2\cdot\alpha$, que será distinto de cero si $\alpha \neq 0$.

(b)

La solución la calculo por Cramer ((en la "x", la primera columna del determinante del numerador la sustituyo por la columna de los términos independientes, para la "y" la segunda y para la "z" la tercera)).

x = $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}$ = $(- 2\alpha + \alpha^3) / (-2\alpha) = (- 2 + \alpha^2) / (- 2)$; y = $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{vmatrix}}{|A|}$ = $(-\alpha^2) / (-2\alpha) = (\alpha) / (2)$

z = $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{|A|}$ = $(-\alpha^2) / (-2\alpha) = (\alpha) / (2)$

Si $\alpha \neq 0$, la solución única es $(x,y,z) = ((- 2 + \alpha^2) / (- 2), (\alpha) / (2), (\alpha) / (2))$

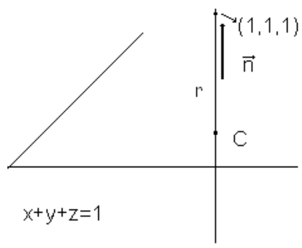
Ejercicio n° 4 de la opción A del modelo 1 de 2004

[2'5 puntos] Calcula el área del triángulo de vértices A(0, 0, 1), B(0, 1, 0) y C, siendo C la proyección ortogonal del punto (1, 1, 1) sobre el plano x + y + z = 1.

Solución

Calculamos primero la proyección ortogonal C, del punto (1,1,1) sobre el plano x+y+z = 1. Para ello determinamos una recta "r" perpendicular al plano $\pi \equiv x+y+z = 1$, que pase por el punto (1,1,1). Su vector director **v** será uno normal al plano π, es decir **v** = **n** = (1,1,1).

A continuación calculamos la intersección de la recta "r" con El plano "π", y dicho punto C es el buscado.



Recta "r": punto (1,1,1), vector director **v** = (1,1,1)

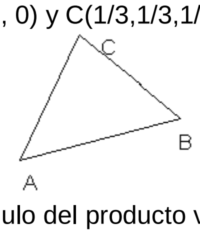
Su ecuación vectorial es $(x,y,z) = (1+\lambda, 1+\lambda, 1+\lambda)$

Intersección de "r" con "π".((sustituimos la ecuación de la recta en el plano))

$(1+\lambda) + (1+\lambda) + (1+\lambda) = 1$, de donde $3\lambda = - 2$, con lo cual $\lambda = -2/3$.

El punto C proyección ortogonal es C(1-2/3, 1-2/3,. 1-2/3)= C(1/3, 1/3, 1/3)

El área del triángulo ABC, con A(0, 0, 1), B(0, 1, 0) y C(1/3,1/3,1/3) es



Área = 1/2·**||ABxAC||**, es decir la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores **AB** y **AC**..

AB = (0,1,-1), **AC** = (1/3, 1/3, -2/3)

ABxAC = $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -1 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{vmatrix}$ = **i**(-2/3+1/3) – **j**(1/3) + **k**(-1/3) = (-1/3, -1/3, -1/3)

||**ABxAC**|| = $\sqrt{1/9+1/9+1/9} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Área = 1/2·||**ABxAC**|| = (1/2)·(√3/3) = (√3)/6 u.a.

Opción B

Ejercicio nº 1 de la opción B del modelo 1 de 2004

[2'5 puntos] Halla una función f : $\Re \rightarrow \Re$ tal que su gráfica pase por el punto M (0, 1), que la tangente en el punto M sea paralela a la recta 2x − y + 3 = 0 y que f '' (x) = $3x^2$.

Solución

f(x) pasa por M(0,1) luego f(0) = 1

Su recta tangente en el punto M es paralela a la recta y = 2x + 3, por tanto las pendientes de ambas recta son iguales. La pendiente de la recta tangente en M es f '(0), y la pendiente de la recta y = 2x + 3 es y ' = 2, por tanto f '(0) = 2

Aplicando el Teorema fundamental del Cálculo integral, ((Si f(x) es continua en [a,b] entonces la función F(x) = $\int_a^x f(t)\,dt$, con x ∈ (a,b), es derivable y su derivada es F '(x) = f(x). En nuestro caso f '(x) = ∫ f ''(x) dx)) tenemos:

f '(x) = ∫ f ''(x) dx = ∫ ($3x^2$) dx = x^3 + K

Como f '(0) = 2, tenemos 2 = 0 + K, de donde K = 2, y f '(x) = x^3 + 2.

Volviendo a aplicar el Teorema fundamental del cálculo integral

f(x) = ∫ f '(x) dx = ∫ (x^3 + 2) dx = (x^4)/4 + 2x + L

Como f (0) = 1, tenemos 1 = 0 + L, de donde L = 1, y f (x) = (x^4)/4 + 2x + 1.

Ejercicio nº 2 de la opción B del modelo 1 de 2004

Considera la función f : R → R definida por f(x) = $e^{x} + 4e^{-x}$.

(a) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y halla sus extremos absolutos o globales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

(b) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje de abscisas y las rectas x =0 y x = 2.

Solución

(a)

Como la función es continua y derivable en todo R, los extremos absolutos coinciden con sus extremos relativos. Por tanto para ver la monotonía de f(x) = $e^{x} + 4e^{-x}$, sólo estudiamos su primera derivada.

f(x) = $e^{x} + 4e^{-x}$.

f '(x) = $e^{x} - 4e^{-x}$.

Resolvemos f '(x) = 0, es decir $e^{x} - 4e^{-x} = 0$, de donde $e^{x} = 4e^{-x} = 4/(e^x)$, por tanto $e^{2x} = 4$. Aplicándole la función recíproca tenemos que 2x = Ln(4), y la solución de f '(x) = 0 es x = [Ln(4)]/2 ≅ 0'69, que será el posible máximo o mínimo relativo y absoluto.

Como f '(0) = $e^{0} - 4e^{-0}$ = 1 – 4 = -3 < 0, f(x) decrece en (- ∞, [Ln(4)]/2)

Como f '(1) = $e^{1} - 4e^{-1}$ = e – 4/e ≅ 4'12 > 0, f(x) crece en ([Ln(4)]/2 , + ∞)

Por definición x = [Ln(4)]/2 es un mínimo relativo y absoluto que vale f([Ln(4)]/2) =

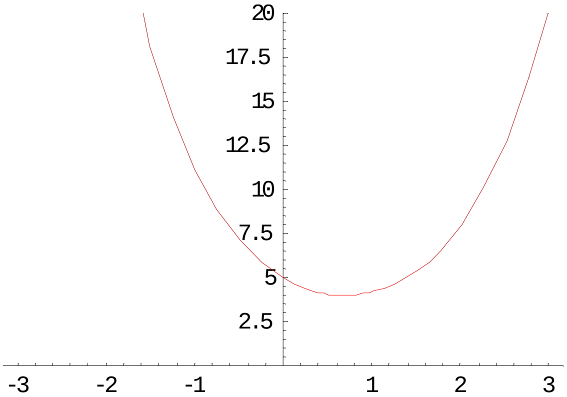
= $e^{\frac{1}{2}Ln(4)} + 4\cdot e^{-\frac{1}{2}Ln(4)}$ = $e^{Ln(4^{1/2})} + 4\cdot e^{Ln(4^{-1/2})}$ = (por recíproca) = $4^{1/2} + 4\cdot 4^{-1/2}$ = (√4) + 4/(√4) = 2 + 2 = 4.

(b)

El mínimo absoluto vale 4, por tanto la función siempre está por encima del eje OX y el área entre 0 y 2 es:

Área = $\int_0^2 (e^x + 4\cdot e^{-x})dx = \left[e^x - 4\cdot e^{-x}\right]_0^2$ = (e^2 – 4/e^2) – (1 – 4) = 3 + e^2 – 4/e^2 u.a.

Aunque no la piden la gráfica de f(x) = $e^{x} + 4e^{-x}$ es



Ejercicio nº 3 de la opción B del modelo 1 de 2004

Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix}$ = - 6 , calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

(a) [0'75 puntos] $\begin{vmatrix} -3x & -y & -z \\ 3t & u & v \\ 3a & b & c \end{vmatrix}$. (b) [0'75 puntos] $\begin{vmatrix} -2y & x & z \\ -2u & t & v \\ -2b & a & c \end{vmatrix}$. (c) [1 punto] $\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix}$

Solución

(a)

$$\begin{vmatrix} -3x & -y & -z \\ 3t & u & v \\ 3a & b & c \end{vmatrix} = (3)\cdot\begin{vmatrix} -x & -y & -z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = (-3)\cdot\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = (-3)(-6) = 18$$

Hemos aplicado la propiedad de que si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un mismo número, dicho número puede salir fuera del determinante multiplicándole.

(b)

$$\begin{vmatrix} -2y & x & z \\ -2u & t & v \\ -2b & a & c \end{vmatrix} = (-2)\cdot\begin{vmatrix} y & x & z \\ u & t & v \\ b & a & c \end{vmatrix} = (-2)(-1)\cdot\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = (-2)(-1)(-6) = -12$$

Hemos aplicado las propiedades:
+ Si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un mismo número, dicho número puede salir fuera del determinante multiplicándole.
+ Si intercambiamos entre si dos filas (columnas) de un determinante, el determinante cambia de signo (-1).

(c)

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ -a & -b & -c \end{vmatrix} =$$

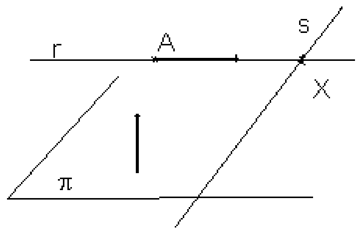
$$= 0 + (-1)\cdot\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = (-1)(-6) = 6$$

Hemos aplicado las propiedades:
+ Si una fila (columna) de un determinante es suma de dos sumandos dicho determinante se puede descomponer en la suma de dos determinantes, conteniendo en es fila (columna) respectivamente el primer y segundo sumando respectivamente.
+ Si un determinante tiene dos filas (columnas) proporcionales, el determinante es nulo (0).
+ Si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un mismo número, dicho número puede salir fuera del determinante multiplicándole.

Ejercicio nº 4 de la opción B del modelo 1 de 2004

[2'5 puntos] Considera el punto A(0, 1, − 1), la recta r ≡ $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x-z=-4 \end{cases}$ y el plano π ≡ x − 2y − z = 2. Halla la ecuación de la recta "s" que pasa por A, es paralela a π y corta a r.

Solución



Ponemos la recta r ≡ $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x-z=-4 \end{cases}$, en forma vectorial para lo cual tomamos z = λ, sustituimos y nos queda

x – 2y = - λ
2x = - 4 + λ, de donde x = - 2 + λ/2, y por tanto 2y = x + λ = - 2 + λ/2 + λ = -2 + (3/2) λ, con lo cual y = -1 + (3/4) λ.
La recta "r" en vectorial es (x,y,z) = (- 2 + (1/2)λ, -1 + (3/4)λ, λ)
La recta "s" que me piden corta a "r", por tanto tomo un punto genérico X de la recta "r" que sería :
X(x,y,z) = (- 2 + (1/2)λ, -1 + (3/4)λ, λ)
Otro punto de la recta "s" es A(0,1,-1)
Un vector director de la recta "s" sería **XA** = (+ 2 - (1/2)λ, 1 + 1 - (3/4)λ, -1 - λ)
Como la recta "s" es paralela al plano π ≡ x − 2y − z = 2, el vector director de la recta "s", **XA** , es perpendicular al vector normal del plano **n** = (1, -2, -1); por tanto su producto escalar es cero.
XA • n = 0
(+ 2 - (1/2)λ, 1 + 1 - (3/4)λ, -1 - λ)• (1,-2,-1) = 0 = -1 + 2λ, de donde λ =1/2
El punto X es X(- 2 + (1/2)(1/2), -1 + (3/4)(1/2), (1/2)) = X(-7/4, -5/8, 1/2)
El vector director es **XA** = (+ 2 - (1/2)(1/2), 1 + 1 - (3/4)(1/2), -1 – (1/2)) = (7/4, 13/8, -3/2)
La recta "s" pedida es (x,y,z) = (-7/4 +(7/4)·μ, -5/8 + (13/8) ·μ, 1/2 – (3/2) ·μ).