Opción A

Ejercicio 1 de la opción A del modelo 5 de sobrantes de 2007.

Sea f : R → R la función definida por $f(x) = (x - 3)e^x$.
(a) [1 punto] Calcula los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).
(b) [1'5 puntos] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión.

Solución

(a)
Recuerdo que:
Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, x = a es un máximo relativo
Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, x = a es un mínimo relativo

$f(x) = (x - 3)e^x$.
$f'(x) = e^x + (x - 3)e^x = (1 + x - 3)e^x = (x - 2)e^x$.
De $f'(x) = 0$, tenemos $(x - 2) = 0$ de donde x = 2 (la exponencial $e^x > 0$ siempre), que será el posible extremo relativo
$f''(x) = e^x + (x - 2)e^x = (1 + x - 2)e^x = (x - 1)e^x$.
Como $f''(2) = (2 - 1)e^2 = e^2 > 0$, x = 2 es un mínimo relativo que vale $f(2) = f(x) = (2 - 3)e^2 = -e^2$.
(b)
Los puntos de inflexión verifican $f''(x) = 0$
$f''(x) = (x - 1)e^x$.
De $f''(x) = 0$, tenemos $x – 1 = 0$, de donde x = 1 (la exponencial $e^x > 0$ siempre), que es el punto donde piden la recta tangente.
Recta tangente en x = 1 es $y - f(1) = f'(1)(x – 1)$
$f(x) = (x - 3)e^x$, luego $f(1) = (1 - 3)e^1 = -2e$.
$f'(x) = (x - 2)e^x$, luego $f'(1) = (1 - 2)e^1 = -e$.
La recta tangente pedida es $y – (-2e) = -e(x – 1)$

Ejercicio 2 de la opción A del modelo 5 de sobrantes de 2007.

Sea f : R → R la función definida por $f(x) = \begin{cases} 1+\alpha x & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

(a) [1 punto] Determina el valor de α sabiendo que f es derivable.
(b) [0'5 puntos] Haz un esbozo de la gráfica de f.
(c) [1 punto] Calcula $\int_{-1}^{+1} f(x)dx$.

Solución

(a)
Como es derivable también es continua, en particular en x = 0. En este caso la continuidad no nos ayuda mucho por tanto vamos directamente a la derivabilidad.

$f(x) = \begin{cases} 1+\alpha x & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, $f'(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x < 0 \\ -e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

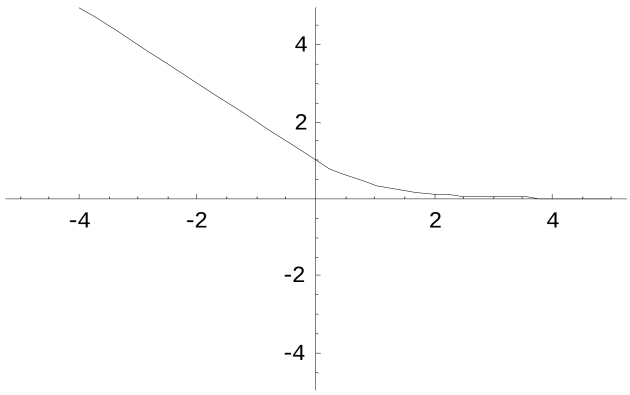
Como es derivable en x =0, tenemos que $f'(0^+) = f'(0^-)$

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(-e^{-x}\right) = -e^0 = -1$$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\alpha\right) = \alpha$$

Igualando $f'(0^+) = f'(0^-) = 1$, tenemos $\alpha = -1$, y la función es $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

(b)
Para hacer un esbozo de la gráfica tenemos en cuenta que 1 – x es una recta y con dos puntos nos basta para dibujarla, en concreto $(0^-, 1)$ y (-1, -2)
La gráfica de e^{-x} es exactamente igual que la de la exponencial e^x pero simétrica respecto al eje de ordenadas OY.
Un esbozo sería:



(c)

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = \int_{-1}^{0}(1-x)dx + \int_{0}^{+1} e^{-x}dx = \left[x-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[-e^{-x}\right]_{0}^{1} =$$

= (0) – (-1 – 1/2) + (– e^{-1} – (– e^{0})) = 1 + 1/2 – 1/e + 1 = 5/2 – 1/e

Ejercicio 3 de la opción A del modelo 5 de sobrantes de 2007.

(a) [1'5 puntos] Calcula el valor de m para el que la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & m\end{pmatrix}$ verifica la relación $2A^2$ - A = I y determina A^{-1} para dicho valor de m.

(b) [1 punto] Si M es una matriz cuadrada que verifica la relación $2M^2$ - M = I, determina la expresión de M^{-1} en función de M y de I.

Solución

(a)

$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & m\end{pmatrix}$; $A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & m\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1+m & m^2\end{pmatrix}$;

$2A^2 - A = 2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1+m & m^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2+2m & 2m^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2m+1 & 2m^2-m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

De 2m + 1 = 0, tenemos m = - 1/2

De $2m^2$ - m = 1, resolviendo la ecuación $2m^2$ – m – 1 = 0, tenemos m = - 1/2 y m = 1, por tanto la única solución común es m = -1/2.

Para **m = - 1/2**, $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1/2\end{pmatrix}$; det(A) = |A| = -1/2, luego existe A^{-1}.

Recordamos que A^{-1} = (1/|A|). Adj(A^t)

$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1/2\end{pmatrix}$, $A^t=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1/2\end{pmatrix}$, Adj($A^t$) = $\begin{pmatrix}-1/2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$,

A^{-1} = (1/|A|). Adj(A^t) = (1/ (-1/2)).$\begin{pmatrix}-1/2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ = –2.$\begin{pmatrix}-1/2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix}$

(b)

Si M es una matriz cuadrada que verifica la relación $2M^2$ - M = I, para obtener M^{-1} tenemos que tener en cuenta que. Si M es cuadrada y M.B = I, entonces por definición B es la matriz inversa de M.

De $2M^2$ – M, sacando factor común la matriz M por la izquierda tenemos M(2M – I) = I. Por tanto por definición la matriz inversa es M^{-1} = 2M – I, siendo I la matriz unidad del mismo orden que M.

Ejercicio 4 de la opción A del modelo 5 de sobrantes de 2007.

(a) [1'5 puntos] Encuentra la ecuación de la recta r que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a los planos π_1 de ecuación x + y + z =3√3 y π_2 de ecuación - x + y + z =2.

(b) [1 punto] Halla la distancia de la recta r al plano π_1.

Solución

(a)

Origen de coordenadas O(0,0,0)

Plano π_1 de ecuación x + y + z =3√3. Su vector normal es **n** = (1,1,1)

Plano π_2 de ecuación - x + y + z =2. Su vector normal es **n'** = (-1,1,1)
Como la recta "r" pedida es paralela a ambos planos su vector director **u** es el producto vectorial de los vectores **n** y **n'**.

u = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = **i**(1-1) – **j**(1+1) + **k**(1+1) = (0, -2, 2)

La recta "r" pedida en paramétricas es (pasa por el origen de coordenadas)

x= 0
y = -2m
z= 2m,

con m $\in \Re$

(b)
El vector director de la recta "r" es **u** = (0, -2, 2), que por su construcción es perpendicular al vector normal **n** del plano π_1, por tanto la recta y el plano son paralelos con lo cual la distancia de la recta "r" al plano "π_1" es la distancia de cualquier punto de la recta (el origen) al plano, es decir

$$d(r,\pi_1) = d(O,\pi_1) = \frac{|0+0+0+3\sqrt{3}|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3u.l.$$

Opción B

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 5 de sobrantes de 2007.

Sea f la función definida, para x ≠ 2 y x ≠ - 2, por f(x) = $(x^2 + 3)/(x^2 – 4)$.
(a) [1 punto] Determina las asíntotas de la gráfica de f.
(b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).
(c) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f.

Solución

(a)
f(x) = $(x^2 + 3)/(x^2 – 4)$
Las asíntotas verticales suelen ser lo números que anulan el denominador (tendremos que calcular el límite). En nuestro caso x = 2 y x = - 2.

Como $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+3}{x^2-4} = \frac{7}{0^+} = +\infty$, x = 2 es asíntota vertical de f(x)

$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+3}{x^2-4} = \frac{7}{0^-} = -\infty$

Como $\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+3}{x^2-4} = \frac{7}{0^-} = -\infty$, x = - 2 es asíntota vertical de f(x)

$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+3}{x^2-4} = \frac{7}{0^+} = +\infty$

Como tenemos un cociente de polinomios de igual grado en el numerador y en el denominador tenemos una asíntota horizontal y = b (A.H.), y será la misma en $\pm\infty$

Como $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3}{x^2-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty}(1) = 1$, la recta y = 1 es una A.H. de f(x)

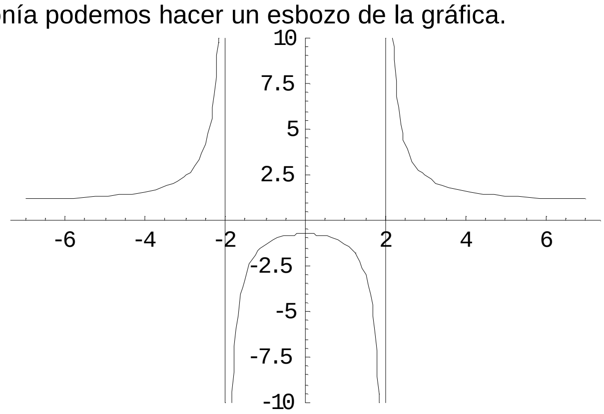
Como $\lim_{x\to \pm\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2-4} - 1\right) = 0^+$, f(x) está por encima de la A.H. en $\pm\infty$

(b)
La monotonía sale del estudio de f '(x)
f(x) = $(x^2 + 3)/(x^2 – 4)$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4)-(x^2+3).2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-14x}{(x^2-4)^2}$$

De f '(x) = 0, tenemos -14x = 0, de donde x = 0 que será el posible extremo relativo

Como f '(-1) = 14/(+) > 0, tenemos f '(x) > 0 en (- ∞, -2)∪(-2,0). No olvidemos que la función no existe en x = -2, por tanto f(x) crece en (- ∞, -2)∪(-2,0).
Como f '(1) = -14/(+) < 0, tenemos f '(x) < 0 en (0, 2)∪(2,+ ∞). No olvidemos que la función no existe en x = 2, por tanto f(x) decrece en (0, 2)∪(2,+ ∞).
Por definición x = 0 es un máximo relativo que vale f(0) = -3/4
(c)
Con las asíntotas y la monotonía podemos hacer un esbozo de la gráfica.



Ejercicio 2 de la opción B del modelo 5 de sobrantes de 2007.

Calcula

(a) [1 punto] $\int \frac{3x+4}{x^2+1}dx.$

(b) [1'5 puntos] $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x.\cos(2x)dx$

Solución

(a)

$\int \frac{3x+4}{x^2+1}dx = 3\int \frac{x}{x^2+1}dx + 4\int \frac{1}{x^2+1}dx =$ (3/2)Ln(x^2 + 1) + 4artag(x) + K

(b)

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x.\cos(2x)dx$

Calculamos primero la integral $\int x.\cos(2x)dx$ que es un integral por partes

I = $\int x.\cos(2x)dx$ es una integral por partes. Aplicaremos $\int udv = uv - \int vdu$, siendo u y v funciones con derivada continua.

u = x., de donde du = x

dv = cos(2x)dx, de donde $v = \int \cos(2x)dx$ = (1/2)sen(2x)

I = $\int x.\cos(2x)dx$ = (x)((1/2)sen(2x)) –- $\int (1/2).sen(2x)dx$ = (1/2).x.sen(2x) + (1/4)cos(2x)

Por tanto $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x.\cos(2x)dx = \left[\frac{1}{2}x.sen(2x) + \frac{1}{4}.\cos(2x)\right]_0^{\pi/4} =$

= ((1/2).(π/4).sen(π/2) + (1/4).cos(π/2)) – (0 + (1/4).cos(0)) = π /8 – 1/4

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 5 de sobrantes de 2007.

[2'5 puntos] Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones para los valores de m que lo hacen compatible:

x+ my = m
mx+ y = m
mx+ my = 1

Solución

x+ my = m
mx+ y = m
mx+ my = 1

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 \\ m & m \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{pmatrix}$

Como el sistema es compatible tiene tres ecuaciones con dos incógnitas el determinante de la matriz ampliada det(A^*) = |A^*| tiene que ser cero. Para los valores que nos salgan de "m"· estudiaremos el sistema.

det(A^*) = $\left|A^*\right| = \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{vmatrix} = 1(1 - m^2) - m(m - m^2) + m(m^2 - m) = 2m^3 - 3m^2 + 1 = 0$

Para resolver $2m^3 - 3m^2 + 1 = 0$, aplicamos primero Ruffini

	2	- 3	0	1
1		2	-1	-1
	2	- 1	-1	0

Cociente $2m^2 - m - 1 = 0$, que es una ecuación de 2º grado y sus soluciones son m = 1 y m = -1/2. Nos han salido como soluciones de m el 1 (doble) y el -1/2.

Si **m = 1** tengo tres ecuaciones iguales, por tanto elijo solo una
x + y = 1. Tomo y = λ con lo cual x = 1- λ.
Solución (x,y) = (1 - λ, λ) con $\lambda \in \Re$

Si **m = -1/2** tomo sólo dos ecuaciones, la 2ª y la 3ª.
(-1/2)x + y = -1/2.
(-1/2)x + (-1/2)y = 1. Resolviendo esta sistema sale x = -1 e y = -1
Solución (x,y) = (- 1,-1)

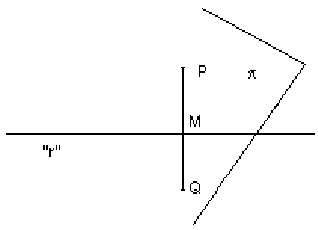
Ejercicio 4 de la opción B del modelo 5 de sobrantes de 2007.

Considera el punto P(1,0, - 2) y la recta r definida por $\begin{cases} 2x-y=5 \\ 2x+y-4z=7 \end{cases}$

(a) [1'5 puntos] Determina la recta perpendicular a r que pasa por P.
(b) [1 punto] Halla la distancia entre el punto P y su simétrico Q respecto de la recta r.

Solución

(a)



Punto P(1,0, - 2) y la recta r definida por $\begin{cases} 2x-y=5 \\ 2x+y-4z=7 \end{cases}$

Para calcular la "s" perpendicular a la recta "r" por el punto P, calculamos la proyección ortogonal del punto P sobre la recta "r" que será el punto M. La recta pedida es la recta que pasa por los puntos P y M.

Calculo el plano π perpendicular a la recta "r" que pasa por P. Su vector normal **n** es el vector director de la recta "r" el **u** que lo calcularemos como un producto vectorial.

n = **u =** $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$ = **i**(4) – **j**(-8) + **k**(2 + 2) = (4,8,4)

El plano pedido es 4x + 8y + 4z + K = 0 y le imponemos la condición de que pase por el punto P(1,0, - 2)
4(1) + 8(0) + 4(-2) + K = 0, de donde K = 4, luego el plano π es 4x + 8y + 4z + K = 0 y simplificándolo un poco nos queda x + 2y + z + 1 = 0.

Calculamos ya M que es la intersección de “r” con “π”, para lo cual ponemos la recta ”r” 1º en paramétricas.
$2x - y = 5$
$2x + y - 4z = 7$. Tomo $x = \lambda$ con lo cual $y = 2\lambda - 5$ y $z = \lambda - 3$

$x = \lambda$
$y = -5 + 2\lambda$
$z = -3 + \lambda$

$(\lambda) + 2(-5 + 2\lambda) + (-3 + \lambda) + 1 = 0$, de donde $\lambda = 2$

El punto M es M((2), -5 + 2(2),. -3 + (2)) = M(2, -1, -1)
La recta “s” pedida es la que pasa por P(1,0, - 2) y M(2, -1, -1). Tomo como punto el P(1,0, - 2) y como vector director el **PM** = (2 – 1, -1 – 0, -1 – (-2)) = (1, -1, 1)

La recta “s” pedida en continua es (x – 1)/1 = (y – 0)/(-1) = (z + 2)/1
(b)
Según la construcción que hemos hecho en el apartado (a) resulta que el punto M (proyección ortogonal del punto P sobre la recta “r”) es el punto medio del punto P y de su simétrico Q, por tanto:
d(P, Q) = 2.d(P,M) = 2.||**PM**|| = $2.\sqrt{1^2+1^2+1^2} = 2.\sqrt{3}$ u.l.