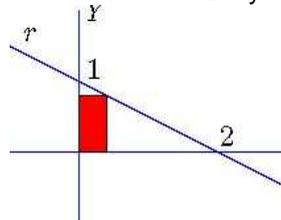


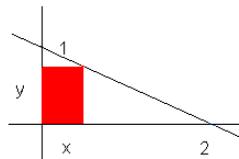
Opción A

Ejercicio 1 de la opción A del modelo 4 de sobrantes de 2007.

[2'5 puntos] De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos de sus lados sobre los ejes coordenados y un vértice en la recta r de ecuación $x/2 + y = 1$ (ver figura), determina el que tiene mayor



Solución



Función a optimizar Área = xy

Relación entre las variables $x/2 + y = 1$, de donde $y = 1 - x/2$

Recuerdo que:

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, $x = a$ es un máximo relativo

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, $x = a$ es un mínimo relativo

$$A(x) = x(1 - x/2) = x - x^2/2$$

$$A'(x) = 1 - x, \quad A'(x) = 0 \text{ nos da } 1 - x = 0, \text{ de donde } x = 1, \text{ con lo cual } y = 1 - 1/2 = 1/2$$

Veamos que es un máximo

$$A''(x) = -1 < 0, \text{ luego es un máximo.}$$

Las dimensiones del rectángulo son $x = 1$ e $y = 1/2$

Ejercicio 2 de la opción A del modelo 4 de sobrantes de 2007.

$$\text{Sea } \int \frac{2}{2 - e^x} dx$$

(a) [1 punto] Expresa I haciendo el cambio de variable $t = e^x$.

(b) [1'5 puntos] Calcula I.

Solución

(a) y (b)

$$I = \int \frac{2}{2 - e^x} dx$$

Cambio $t = e^x$ de donde $\ln(t) = x$ y por tanto $(1/t) \cdot dt = dx$

$$\int \frac{2}{2 - e^x} dx = \int \frac{2}{2 - t} (1/t) dt = 2 \int \frac{dt}{t(2 - t)} = 2 \int \frac{dt}{t(2 - t)}$$

$$2 \left[\int \frac{A}{t} dt + \int \frac{B}{(2 - t)} dt \right] = 2(A \ln(t) - B \ln|2 - t|) + K = 2(A \ln(e^x) - B \ln|2 - e^x|) + K$$

La integral pedida es $I = 2Ax - 2B \ln|2 - e^x| + K$

Vamos a calcular los coeficientes A y B para terminar

$$\frac{1}{t(2 - t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{2 - t} = \frac{A(2 - t) + Bt}{t(2 - t)}$$

Para $t = 0$, $1 = 2A$, de donde $A = 1/2$

Para $t = 2$, $1 = 2B$, de donde $B = 1/2$

$$\text{La integral pedida es } I = \int \frac{2}{2 - e^x} dx = 2(1/2)x - 2(1/2) \ln|2 - e^x| + K = x - \ln|2 - e^x| + K$$

Ejercicio 3 de la opción A del modelo 4 de sobrantes de 2007.

[2'5 puntos] Clasifica y resuelve el siguiente sistema según los valores de a ,

$$\begin{aligned}x + y + z &= 0 \\(a + 1)y + 2z &= y \\x - 2y + (2 - a)z &= 2z\end{aligned}$$

Solución

$$\begin{aligned}x + y + z &= 0 & \rightarrow & x + y + z = 0 \\(a + 1)y + 2z &= y & \rightarrow & ay + 2z = 0 \\x - 2y + (2 - a)z &= 2z & \rightarrow & x - 2y - az = 0\end{aligned}$$

Como vemos es un sistema homogéneo con matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & -2 & -a \end{pmatrix}$

Para que este sistema tenga solución distinta de la trivial $(0, 0, 0)$ el determinante de la matriz de los coeficientes ha de ser 0, es decir $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & -2 & -a \end{vmatrix} \stackrel{3^a F - 1^a F}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & -3 & -a-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & -2 & -a \end{vmatrix} = -a^2 - a + 6$$

Igualando a cero $-a^2 - a + 6 = 0$, tenemos como soluciones $a = 2$ y $a = -3$

Si $a = 2$ y $a = -3$ el sistema es compatible e indeterminado.

Si $a = 2$, como $\text{rango}(A) = 2$, tenemos un sistema compatible indeterminado y para resolverlo solo necesitamos dos ecuaciones. Tomo las dos primeras

$$x + y + z = 0$$

$$2y + 2z = 0. \text{ de donde tomando } z = m \text{ tenemos } y = -m \quad y \quad x = 0$$

Solución $(x, y, z) = (0, -m, m)$ con $m \in \mathfrak{R}$

Si $a = -3$, como $\text{rango}(A) = 2$, tenemos un sistema compatible indeterminado y para resolverlo solo necesitamos dos ecuaciones. Tomo las dos primeras

$$x + y + z = 0$$

$$-3y + 2z = 0. \text{ de donde tomando } z = m \text{ tenemos } y = (2/3)m \quad y \quad x = (-5/3)m$$

Solución $(x, y, z) = ((-5/3)m, (2/3)m, m)$ con $m \in \mathfrak{R}$

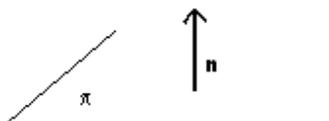
Ejercicio 4 de la opción A del modelo 4 de sobrantes de 2007.

Considera la recta r definida por $\frac{x-1}{\alpha} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$ y el plano π de ecuación $2x - y + \beta z = 0$. Determina α y β en

cada uno de los siguientes casos:

(a) [1 punto] La recta r es perpendicular al plano π .

(b) [1'5 puntos] La recta r está contenida en el plano π .

Solución

π de ecuación $2x - y + \beta z = 0$. Vector normal $\mathbf{n} = (2, -1, \beta)$

r definida por $\frac{x-1}{\alpha} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$. Punto $A(1,0,1)$ y vector director $\mathbf{u} = (\alpha, 4, 2)$

(a)

Para que la recta r sea perpendicular al plano π , el vector normal del plano \mathbf{n} y el vector director de la recta \mathbf{u} han de ser paralelos, por tanto sus coordenadas proporcionales.

$$\alpha/2 = 4/-1 = 2/\beta.$$

Igualando y operando tenemos.

$$\text{De } \alpha/2 = 4/-1, \text{ obtenemos } \alpha = -8$$

$$\text{De } 4/-1 = 2/\beta, \text{ obtenemos } \beta = -1/2$$

(b)

Para que la recta r esté contenida en el plano π , el punto de la recta debe pertenecer al plano y los vectores \mathbf{n} y \mathbf{u} han de ser perpendiculares, es decir su producto escalar valer 0.

Si $A(1,0,1) \in \pi$, sustituyendo obtenemos $2 + \beta = 0$, de donde $\beta = -2$

Como \mathbf{n} y \mathbf{u} son perpendiculares, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = ((2, -1, \beta) \cdot (\alpha, 4, 2)) = 2\alpha - 4 + 2\beta = 0$. Sustituyendo el valor de $\beta = -2$, nos resulta $\alpha = 4$

Opción B

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 4 de sobrantes de 2007.

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 e^{-x}$.

(a) [1'5 puntos] Determina los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

(b) [1 punto] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .

Solución

$$f(x) = x^2 e^{-x} = (x^2)/(e^x)$$

(a)

Estudiamos $f'(x)$

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x} + x^2(-1) \cdot e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2)$$

$f'(x) = 0$, $e^{-x}(2x - x^2) = 0$, de donde $2x - x^2 = x(2 - x) = 0$, con lo cual los posibles extremos relativos serán $x=0$, y $x=2$. (La exponencial e^{-x} no se anula nunca porque siempre es > 0)

Recuerdo que:

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, $x = a$ es un máximo relativo

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, $x = a$ es un mínimo relativo

$$f'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$$

$$f''(x) = e^{-x}(-1)(2x - x^2) + e^{-x}(2 - 2x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$$

Como $f''(0) = 2 > 0$, $x = 0$ es un mínimo relativo de $f(x)$ que vale $f(0) = 0$

Como $f''(2) = e^{-2}(4 - 8 + 2) < 0$, $x = 2$ es un máximo relativo de $f(x)$ que vale $f(2) = 4/(e^2) \cong 0'54$

(b)

Asíntotas verticales no tiene (no ha y ningún número que anule el denominador)

[La regla de L'Hôpital (L'H) nos dice que si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas y derivables en un entorno de

"a", $f(a) = g(a) = 0$ y existe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. La regla se puede reiterar, y se puede

aplicar si sale $0/0$, ∞/∞ , y si el límite tiende a ∞]

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, aplicándole la Regla de L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right). \text{ Volviéndole a aplicar la Regla}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0, \text{ la recta } y = 0 \text{ es una asíntota horizontal (A.H.) en } +\infty$$

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{e^x} - 0\right) = 0^+$, $f(x)$ está por encima de la A.H.

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (-x)^2 \cdot e^{-(-x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot e^x = \infty \cdot \infty = \infty$, no A.H. en $-\infty$

Ejercicio 2 de la opción B del modelo 4 de sobrantes de 2007.

Sea $f: (-2,0) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida mediante $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x} & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ \frac{x^2 - \beta}{2} & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$

(a) [1'5 puntos] Determina α y β sabiendo que f es derivable.

(b) [1 punto] Calcula $\int_{-2}^{-1} f(x)dx$

Solución

(a)

Como la función es derivable, también es continua en particular en $x = -1$

$f(x)$ es continua en $x = -1$ si y solo si $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

$$f(-1) = \alpha/2(-1) = -\alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - \beta}{2} = \frac{1 - \beta}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{-1} = -\alpha$$

Igualando tenemos $(1 - \beta)/2 = -\alpha$, de donde $\beta = 1 + 2\alpha$

Como es derivable

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2x} & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ \frac{x^2 - \beta}{2} & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}; \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{-2\alpha}{2x^2} & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ \frac{2x}{2} & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{-\alpha}{x^2} & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

Como es derivable en $x = -1$ tenemos que $f'(-1^+) = f'(-1^-)$

$$f'(-1^+) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x) = -1$$

$$f'(-1^-) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{-\alpha}{x^2}\right) = -\alpha$$

Igualando tenemos $\alpha = 1$, de donde $\beta = 1 + 2(1) = 3$

$$\text{La función es } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ \frac{x^2 - 3}{2} & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

(b)

$$\int_{-2}^{-1} f(x)dx = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} [\ln|x|]_{-2}^{-1} = \ln|-1| - \ln|-2| = \ln(1) - \ln(2) = 0 - \ln(2) = -\ln(2)$$

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 4 de sobrantes de 2007.

Se sabe que el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} -\lambda x + y + (\lambda + 1)z &= \lambda + 2 \\ x + y + z &= 0 \\ (1 - \lambda)x - \lambda y &= 0 \end{aligned}$$

tiene más de una solución.

(a) [1'5 puntos] Calcula, en dicho caso, el valor de la constante λ .

(b) [1 punto] Halla todas las soluciones del sistema.

Solución

(a) y (b) (Entiendo como todas las soluciones del sistema cuando tiene infinitas soluciones)

$$\begin{aligned} -\lambda x + y + (\lambda + 1)z &= \lambda + 2 \\ x + y + z &= 0 \\ (1 - \lambda)x - \lambda y &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{La matriz de los coeficientes es } A = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & \lambda + 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 - \lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix} \text{ y la ampliada } A^* = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & \lambda + 1 & \lambda + 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 - \lambda & -\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si tiene más de una solución tiene infinitas soluciones por tanto $\det(A) = 0$. Después para dichos valores estudiaremos el rango de A^* .

$$\det(A) = 0 = |A| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \lambda + 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 - \lambda & -\lambda & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1^a C - 2^a C \\ 3^a C - 2^a C \end{matrix} = \begin{vmatrix} -\lambda - 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda - 1 & \lambda \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} -\lambda - 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda(-\lambda - 1 - 1) = \lambda(-\lambda - 2)$$

$|A| = 0$, nos dice que $\lambda(-\lambda - 2) = 0$ de donde $\lambda = 0$ y $\lambda = -2$

Para que el sistema tenga **más de una solución** $\lambda = 0$ y $\lambda = -2$, con lo cual $\text{rango}(A) = 2$

Si $\lambda = 0$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, $\text{rango}(A) = 2$. En A^* como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (2)(-1) = -2 \neq 0$, $\text{rango}(A^*) = 3$

Como $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$, el sistema es incompatible (No es nuestro caso)

Si $\lambda = -2$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A^*)$, porque la última columna de A^* es de ceros.

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$, el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

Para $\lambda = -2$, nuestro sistema es

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ 3x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

Como solo necesitamos dos ecuaciones y dos incógnitas principales, al ser rango 2, tomo las dos primeras

$$2x + y - z = 0$$

$$x + y + z = 0, \text{ tomo } z = m \text{ y restando me queda } x - 2m = 0, \text{ de donde } x = 2m; \text{ con lo cual } y = -3m.$$

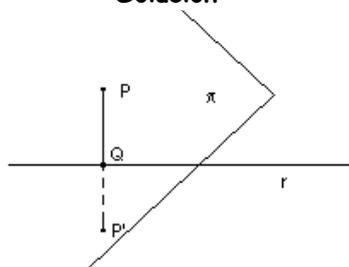
Solución $(x,y,z) = (2m, -3m, m)$ con $m \in \mathbb{R}$

Ejercicio 4 de la opción B del modelo 4 de sobrantes de 2007.

[2'5 puntos] Calcula la distancia del punto $P(1,-3,7)$ a su punto simétrico respecto de la recta definida por

$$\begin{aligned} 3x - y - z - 2 &= 0 \\ x + y - z + 6 &= 0 \end{aligned}$$

Solución



$d(P,P') = 2 \cdot d(P,Q)$, donde Q es la proyección ortogonal de P sobre la recta "r" y P' es el simétrico del punto P respecto de la recta "r"

De la recta "r"

$$\begin{aligned} 3x - y - z - 2 &= 0 \\ x + y - z + 6 &= 0 \end{aligned}$$

Tomamos un punto A y un vector director u

Para el punto A hacemos $x = 0$, con lo cual sumando sale $z = 2$ e $y = -4$, luego $A(0, -4, 2)$

$$\text{Un vector director de la recta es, } \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(1 + 1) - \mathbf{j}(-3 + 1) + \mathbf{k}(3 + 1) = (2, 2, 4)$$

Calculamos el plano π perpendicular a la recta "r" que pasa por el punto $P(1, -3, 7)$. Su vector normal \mathbf{n} es el vector director de la recta $\mathbf{u} = (2, 2, 4)$

El plano pedido es $2x + 2y + 4z + K = 0$. Le imponemos la condición de que pase por $P(1, -3, 7)$.

$2(1) + 2(-3) + 4(7) + k = 0$, de donde $K = -24$ y el plano es $2x + 2y + 4z - 24 = 0$. Simplificándolo $x + y + 2z - 12 = 0$

El punto Q es la intersección de la recta "r" con el plano, para lo cual ponemos la recta en paramétricas, y la sustituimos en el plano.

$$x = 0 + 2m$$

$$y = -4 + 2m$$

$$z = 2 + 4m$$

$$(2m) + (-4 + 2m) + 2(2 + 4m) - 12 = 0 = 2m + 2m + 8m - 12 = 0, \text{ de donde } m = 1 \text{ y el punto Q es } Q(2(1), -4 + 2(1), 2 + 4(1)) = Q(2, -2, 6)$$

$$d(P, Q) = \|\mathbf{PQ}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\mathbf{PQ} = (2 - 1, -2 - (-3), 6 - 7) = (1, 1, -1)$$

La distancia pedida es $d(P, P') = 2 \cdot d(P, Q) = 2\sqrt{3}$ u.l.