

Opción A

Ejercicio 1 de la Opción A del Modelo 4 de Sobrantes de 2008

[2'5 puntos] Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x + 1)/e^x$, determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión.

Solución

Los puntos de inflexión verifican que $f''(x) = 0$, después tendremos que estudiar el signo de la 2ª derivada a izquierda y derecha de ellos. Si cambia el signo, sí es punto de inflexión.

$$f(x) = (x + 1)/e^x,$$

$$f'(x) = [e^x - e^x(x + 1)]/e^{2x} = (-x)/e^x,$$

$$f''(x) = [-e^x - (-x)e^x]/e^{2x} = (x - 1)/e^x,$$

De $f''(x) = 0$, tenemos $(x - 1)/e^x = 0$, de donde $x = 1$ (posible punto de inflexión)

Como $f''(0) = -1/e^0 < 0$ y $f''(2) = 1/e^2 > 0$, $x = 1$ es punto de inflexión.

La recta tangente en $x = 1$ es $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$$f(x) = (x + 1)/e^x, \text{ de donde } f(1) = 2/e$$

$$f'(x) = (-x)/e^x, \text{ de donde } f'(1) = -1/e$$

La recta tangente es $y - (2/e) = (-1/e)(x - 1)$

Ejercicio 2 de la Opción A del Modelo 4 de Sobrantes de 2008

Sean $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas mediante

$$f(x) = x^3 - 4x \quad \text{y} \quad g(x) = 3x - 6$$

(a) [0'75 puntos] Determina los puntos de corte de las gráficas de f y g .

(b) [1'75 puntos] Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas.

Solución

(a)

Los puntos de corte se obtienen resolviendo la ecuación $f(x) = g(x)$ es decir $x^3 - 4x = 3x - 6$. Pasándolo a un miembro nos queda

$x^3 - 7x + 6 = 0$. Obtenemos una solución por Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Tenemos como solución $x = 1$. Resolviendo la ecuación $x^2 + x - 6 = 0$, obtenemos $x = 2$ y $x = -3$

(b)

Como $f(x) = y$ y $g(x)$ se cortan en $x = -3$, $x = 1$ y $x = 2$, el área encerrada por ambas funciones es:

$$\text{El área pedida es } \left| \int_{-3}^1 (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_1^2 (f(x) - g(x)) dx \right| = \left| \int_{-3}^1 (x^3 - 7x + 6) dx \right| + \left| \int_1^2 (x^3 - 7x + 6) dx \right| =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^2}{2} + 6x \right]_{-3}^1 + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^2}{2} + 6x \right]_1^2 = \left| (1/4 - 7/2 + 6) - (81/4 - 63/2 - 18) \right| +$$

$$+ \left| (16/4 - 28/2 + 12) - (1/4 - 7/2 + 6) \right| = |32| + |-3/4| = 32 + 3/4 = 131/4 \text{ u}^2$$

Ejercicio 3 de la Opción A del Modelo 4 de Sobrantes de 2008

Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$x + y = 1$$

$$ky + z = 0$$

$$x + (k + 1)y + kz = k + 1$$

(a) [1'25 puntos] Determina el valor del parámetro k para que sea incompatible.

(b) [1'25 puntos] Halla el valor del parámetro k para que la solución del sistema tenga $z = 2$.

Solución

$$x + y = 1$$

$$ky + z = 0$$

$$x + (k + 1)y + kz = k + 1$$

(a)

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & k+1 & k \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 1 & k+1 & k & k+1 \end{pmatrix}$.

Para que el sistema sea incompatible $\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A^*)$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & k+1 & k \end{vmatrix} = (1)(k^2 - k - 1) - (1)(-1) = k^2 - k.$$

Resolvemos $|A| = 0$, es decir $k^2 - k = 0$, de donde $k = 0$ y $k = 1$.

Si $k \neq 0$ y $k \neq 1$, tenemos $|A| \neq 0$ con lo cual $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$, y por el teorema de Rouché el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$$\text{Si } \lambda = 0, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2$

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, porque dos filas son iguales, tenemos $\text{rango}(A^*) = 2$

Como $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A^*)$, por el teorema de Rouché el sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.

$$\text{Si } \lambda = 1, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2$

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1(2) = 2 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A^*) = 3$

Como $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$, por el teorema de Rouché el sistema es incompatible, y no tiene solución.

(b)

Resolvemos el sistema forzando $z = 2$

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ ky + 2 &= 0 \\ x + (k+1)y + 2k &= k+1 \end{aligned}$$

Tenemos tres ecuaciones con dos incógnitas, por tanto para que el sistema tenga solución el determinante de la

matriz ampliada $B^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & -2 \\ 1 & k+1 & 1-k \end{pmatrix}$ tiene que ser 0.

$$|B^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & -2 \\ 1 & k+1 & 1-k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & -2 \\ 0 & 1 & -k \end{vmatrix} = -k^2 + 2k = 0, \text{ de donde } k = 0 \text{ y } k = 2$$

Como en el apartado (a) hemos que el sistema era incompatible para $k = 0$, sólo nos queda la solución $k = 2$.

Ejercicio 4 de la Opción A del Modelo 4 de Sobrantes de 2008

Considera la recta r definida por $\begin{cases} x = 0 \\ 3y + z = 3 \end{cases}$ y la recta s definida por $\begin{cases} 2x - z = 3 \\ y = 0 \end{cases}$

- (a) [1 punto] Estudia la posición relativa de r y s .
 (b) [1'5 puntos] Halla la ecuación general de un plano que contiene a s y es paralelo a r .

Solución

(a)

Tomamos de cada recta un punto y un vector director, para lo cual pongo ambas ecuaciones en paramétricas.

$$r \equiv \begin{cases} x=0 \\ 3y+z=3 \end{cases}, \text{ tomando } y = \lambda, \text{ sus ecuaciones paramétricas son } r \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=\lambda \\ z=3-3\lambda \end{cases}$$

De la recta r , un punto es $A(0,0,3)$ y un vector director $\mathbf{u} = (0,1,-3)$

$$s \equiv \begin{cases} 2x-z=3 \\ y=0 \end{cases}, \text{ tomando } x = \mu, \text{ sus ecuaciones paramétricas son } s \equiv \begin{cases} x=\mu \\ y=0 \\ z=-3+2\mu \end{cases}$$

De la recta s , un punto es $B(0,0,-3)$ y un vector director $\mathbf{v} = (1,0,2)$ Como $\mathbf{u} \neq m\mathbf{v}$, es decir los vectores directores no son proporcionales, las rectas r y s se cortan o se cruzan.Si $\det(\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$, las rectas se cortan en un puntoSi $\det(\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 0$, las rectas se cruzan.

$$\mathbf{AB} = (0,0,-6)$$

$$\text{Como } \det(\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6(-1) = 6 \neq 0, \text{ las rectas se cruzan.}$$

(b)

Como el plano contiene a la recta s , tomo como punto para el plano el $B(0,0,-3)$ y un vector el $\mathbf{v} = (1,0,2)$. Como el plano es paralelo a la recta s , el otro vector paralelo independiente para el plano es $\mathbf{u} = (0,1,-3)$.

$$\text{Las ecuaciones paramétricas del plano son } \begin{cases} x=0+1.\lambda+0.\mu \\ y=0+0.\lambda+1.\mu \\ x=-3+2.\lambda-3.\mu \end{cases} = \begin{cases} x=\lambda \\ y=\mu \\ x=-3+2.\lambda-3.\mu \end{cases}, \text{ con } \lambda, \mu \in \mathfrak{R}$$

La ecuación general del plano es $\det(\mathbf{BX}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 = 2x - 3y - z - 3 = 0$ **Opción B****Ejercicio 1 de la Opción B del Modelo 4 de Sobrantes de 2008**Sea la función $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ cx + 1 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

(a) [2 puntos] Determina a , b y c sabiendo que f es continua en el intervalo cerrado $[0, 4]$, derivable en el intervalo abierto $(0, 4)$ y que $f(0) = f(4)$.

(b) [0'5 puntos] ¿En qué punto del intervalo se anula la derivada de la función?

Solución

(a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ cx + 1 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Como $f(x)$ es continua en $[0, 4]$, es continua en $x = 2$, es decir $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (cx + 1) = 2c + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax + b) = 4 + 2a + b$$

Igualando tenemos la ecuación $2c + 1 = 4 + 2a + b$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } 0 < x < 2 \\ c & \text{si } 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

Como es derivable en (0,4), es derivable $x = 2$, luego $f'(2^+) = f'(2^-)$

$$f'(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x + a) = 4 + a$$

$$f'(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (c) = c$$

Igualando tenemos la ecuación $4 + a = c$

Como $f(0) = f(4)$, tenemos $b = 4c + 1$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} 2c + 1 = 4 + 2a + b \\ c = 4 + a \\ b = 4c + 1 \end{cases}$, obtenemos $a = -3$, $b = 5$ y $c = 1$, por tanto la función pedida es

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x + 1 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases} \text{ y su derivada } f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

(b)

Veamos donde $f'(x) = 0$, es decir $2x - 3 = 0$, de donde $x = 3/2$.

Lo que nos han preguntado es que se calcule los valores de a , b y c para que $f(x)$ verifique el Teorema de Rolle y el punto donde lo cumple.

Ejercicio 2 de la Opción B del Modelo 4 de Sobrantes de 2008

[2'5 puntos] Calcula $\int_0^1 x \cdot \ln(x+1) dx$ (\ln denota la función logaritmo neperiano).

Solución

Calculamos primero la integral indefinida, que es una integral por partes ($\int u dv = uv - \int v du$)

$$\int x \ln(x+1) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(x+1) \rightarrow du = \frac{dx}{x+1} \\ dv = x dx \rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \ln|x+1| - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{2} I_1$$

La integral $I_1 = \int \frac{x^2}{x+1} dx$, es una integral racional. Dividimos primero

$$\begin{array}{r} x^2 \quad | \quad x+1 \\ -x^2 - x \quad | \quad x-1 \\ \hline -x \quad | \quad \\ x+1 \quad | \quad \\ \hline 1 \end{array}$$

$$I_1 = \int \frac{x^2}{x+1} dx = \int \left(x-1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|$$

$$I = \frac{x^2}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{2} I_1 = \frac{x^2}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| \right) =$$

La integral indefinida es

$$= \frac{x^2}{2} \ln|x+1| - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{\ln|x+1|}{2}$$

$$\text{Por tanto } \int_0^1 x \cdot \ln(x+1) dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln|x+1| - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{\ln|x+1|}{2} \right]_0^1 = \left[\left(\frac{1}{2} \right) \ln(2) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \right) \ln(2) \right] - (0) = 1/4$$

Ejercicio 3 de la Opción B del Modelo 4 de Sobrantes de 2008

[2'5 puntos] Halla los valores del parámetro m que hacen compatible el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -x + 2y - 2z &= 2 \\ 2x + y + z &= m \\ x + 3y - z &= m \end{aligned}$$

Solución

$$\begin{aligned} -x + 2y - 2z &= 2 \\ 2x + y + z &= m \\ x + 3y - z &= m \end{aligned}$$

(a)

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & m \\ 1 & 3 & -1 & m^2 \end{pmatrix}$.

Para que el sistema sea compatible tiene que ser $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*)$.

En A como $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, por lo menos $\text{rango}(A) = 2$

En A como $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2^a+1^a(2) \\ 3^a+1^a(1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0$, porque dos filas son iguales, tenemos $\text{rango}(A) = 2$

En A^* para que el rango sea 2, el determinante $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & 3 & m^2 \end{vmatrix}$ tiene que ser 0.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & 3 & m^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2^a+1^a(2) \\ 3^a+1^a(1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 4+m \\ 0 & 5 & 2+m^2 \end{vmatrix} = -5(m^2 + 2 - 4 - m) = -5(m^2 - m - 2).$$

Resolviendo la ecuación $m^2 - m - 2 = 0$, obtenemos $m = -1$ y $m = 2$.

Para $m = -1$ y $m = 2$, el sistema dado es compatible.

Ejercicio 4 de la Opción B del Modelo 4 de Sobrantes de 2008

[2'5 puntos] Sea la recta r definida por $\begin{cases} x = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$

y sean los planos π_1 , de ecuación $x + y + z = 0$, y π_2 , de ecuación $y + z = 0$. Halla la recta contenida en el plano π_1 , que es paralela al plano π_2 y que corta a la recta r.

Solución

Como la recta pedida s está contenida en el plano π_1 , y es paralela al plano π_2 , su vector director \mathbf{v} tiene que ser a la vez perpendicular al vector normal del plano π_1 , $\mathbf{n}_1 = (1, 1, 1)$ y al vector normal del plano π_2 , $\mathbf{n}_2 = (0, 1, 1)$. Es decir \mathbf{v} es el producto vectorial de los vectores \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 .

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(0) - \vec{j}(1) + \vec{k}(1) = (0, -1, 1)$$

La recta pedida es de la forma $s \equiv \begin{cases} x = a \\ y = b - \lambda \\ z = c + \lambda \end{cases}$, con $\lambda \in \mathfrak{R}$ y $A(a, b, c)$ un punto de ella que vamos a determinar.

Como "s" corta a "r", verifica su ecuación, es decir

$$x = 1 = a, \text{ de donde } \mathbf{a} = \mathbf{1}$$

$$x = y, \text{ es decir } 1 = b - \lambda, \text{ de donde } \mathbf{b} = \mathbf{1} + \lambda$$

por tanto la recta es por ahora $s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - \lambda + \lambda \\ z = c + \lambda \end{cases} = \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = c + \lambda \end{cases}$, es decir $\mathbf{b} = \mathbf{1}$, y además como la recta está

contenida en el plano π_1 , verifica su ecuación, es decir $x + y + z = 0$, en nuestro caso $1 + 1 + c + \lambda = 0$, de donde $c = -2 - \lambda$. Sustituyendo este valor en la z de la recta, tenemos $z = -2 - \lambda + \lambda = -2$, por tanto $\mathbf{c} = -2$, el punto de

la recta es $A(a,b,c) = A(1,1,-2)$ y la recta pedida es $s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - \lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathfrak{R}$