Opción A

Ejercicio 1 de la Opción A del Modelo 1 de Sobrantes de 2008

Sean f : R → R y g : R → R las funciones definidas por

$$f(x) = x^2 + ax + b \quad \text{y} \quad g(x) = ce^{-(x+1)}$$

Se sabe que las gráficas de f y g se cortan en el punto (−1, 2) y tienen en ese punto la misma recta tangente.
(a) [2 puntos] Calcula los valores de a, b y c.
(b) [0'5 puntos] Halla la ecuación de dicha recta tangente.

Solución

(a)

$$f(x) = x^2 + ax + b \quad \text{y} \quad g(x) = ce^{-(x+1)}$$

Como se cortan en el punto (−1, 2), tenemos f(-1) = g(-1) = 2
Como en el punto (−1, 2) tienen la misma recta tangente, tienen la misma pendiente, es decir f'(-1) = g'(-1)
De f(-1) = g(-1) = 2
f(-1) = 1-a+b = 2
g(-1) = c.e^0 = 2, de donde **c = 2**
De f'(-1) = g'(-1)
f'(x) = 2x + a, de donde f'(-1) = -2 + a
g'(x) = (-1)2$e^{-(x+1)}$, de donde g'(-1) = (-1)2e^0 = -2 , igualando tenemos -2 + a = -2, por tanto **a = 0.**
Entrando en 1-a+b = 2 con a = 0, nos resulta **b = 1**.
Las funciones son f(x) = x^2 + 1 y g(x) = 2$e^{-(x+1)}$
(b)
La recta tangente a f(x) en x = -1 es y – f(-1) = f'(-1(x-(-1)).
f(x) = x^2 + 1, f(-1) = 2.
f'(x) = 2x, f'(-1) = -2.
Sustituyendo tenemos que la recta tangente es y – 2 = – 2(x + 1)

Ejercicio 2 de la Opción A del Modelo 1 de Sobrantes de 2008

[2'5 puntos] Dadas las funciones f : [0,+ ∞) → R y g : [0, + ∞) → R definidas por

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt[3]{x}$$

calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Solución

El área pedida es $\left|\int_a^b (f(x)-g(x))dx\right|$, siendo a y b las soluciones de f(x) = g(x)

De f(x) = g(x), obtenemos $\sqrt{x} = \sqrt[3]{x}$, elevando a la sexta resulta $x^3 = x^2$, de donde $x^3 - x^2 = 0 = x^2(x-1)$. Las soluciones son x = 0(doble) y x = 1.

$$\text{Área} = \left|\int_0^1 (\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})dx\right| = \left|\int_0^1 (x^{1/2}-x^{1/3})dx\right| = \left|\left[\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1}-\frac{x^{1/3+1}}{1/3+1}\right]_0^1\right| = \left|\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right| = \left|-\frac{1}{12}\right| = \frac{1}{12}u^2$$

Ejercicio 3 de la Opción A del Modelo 1 de Sobrantes de 2008

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x + \lambda y - z &= 0 \\ 2x + y + \lambda z &= 0 \\ x + 5y - \lambda z &= \lambda + 1 \end{aligned}$$

(a) [1'5 puntos] Clasifícalo según los valores del parámetro λ.
(b) [1 punto] Resuélvelo λ = −1.

Solución

$$\begin{aligned} x + \lambda y - z &= 0 \\ 2x + y + \lambda z &= 0 \\ x + 5y - \lambda z &= \lambda + 1 \end{aligned}$$

(a)

La matriz de los coeficientes del sistema es A = $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2 & 1 & \lambda \\ 1 & 5 & -\lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada A^* = $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 0 \\ 2 & 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 5 & -\lambda & \lambda+1 \end{pmatrix}$.

Si det(A) = |A| ≠ 0, rango(A) = rango(A^*) = 3. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2 & 1 & \lambda \\ 1 & 5 & -\lambda \end{vmatrix}$ = (1)(-λ - 5λ) – (λ)(-2λ - λ) + (-1)(9) = $3\lambda^2$ - 6λ - 9. (Lo he desarrollado por los adjuntos de la 1ª fila)

Resolvemos |A| = 0, es decir $3\lambda^2$ - 6λ - 9 = 0, de donde λ = -1 y λ = 3

*Si **λ ≠ -1 y λ ≠ 3** , tenemos |A| ≠ 0 con lo cual rango(A) = rango(A^*) = 3, y por el teorema de Rouche el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.*

Si **λ = -1**, A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ y A^* = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$ = 9 ≠ 0, tenemos rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$, porque una columna es nula, tenemos rango(A^*) = 2

Como rango(A)= 2 = rango(A^*), por el teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.

Si **λ = 3**, A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ y A^* = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$ = 9 ≠ 0, tenemos rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ = 4(1 – 6) = - 20 ≠ 0, tenemos rango(A^*) = 3

Como rango(A)= 2 ≠ rango(A^*) = 3, por el teorema de Rouche el sistema es incompatible, y no tiene solución.

(b)

Nos piden resolverlo si λ = -1.

Hemos visto que *como rango(A)= 2 = rango(A^*), por el teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.*

Como rango(A)= rango(A^*) = 2, tenemos sólo dos ecuaciones (las dos últimas, con las que hemos calculado el rango de A) y dos incógnitas principales..

2x + y – z = 0

x + 5y + z = 0. Tomamos z = λ ∈ ℜ

A la 1ª ecuación le sumo la 2ª multiplicada por -2, y tenemos –9y = 3λ. De donde y = (-1/3) λ.

Sustituyendo en x + 5y + z = 0, nos resulta x = (2/3) λ.

La solución del sistema es (x, y, z)= ((2/3) λ, (-1/3) λ, λ) con λ ∈ ℜ

Ejercicio 4 de la Opción A del Modelo 1 de Sobrantes de 2008

Los puntos A(−2, 3, 1), B(2, −1, 3) y C(0, 1, −2) son vértices consecutivos del paralelogramo ABCD.

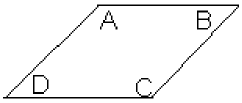
(a) [1 punto] Halla las coordenadas del vértice D.

(b) [1 punto] Encuentra la ecuación de la recta que pasa por B y es paralela a la diagonal AC.

(c) [0'5 puntos] Halla la ecuación del plano que contiene a dicho paralelogramo.

Solución

A(−2,3,1), B(2,−1,3) y C(0,1,−2) son vértices consecutivos del paralelogramo ABCD



(a)
Si ABCD son los vértices de un paralelogramo. Los vectores libres **AB** y **DC** son iguales:
AB = (4, -4, 2)
DC = (-x, 1 – y, -2 –z)
Igualando coordenadas tenemos x = -4, y = 5 y z = -4. El punto que falta es D(-4, 5, -4)
(b)
La recta tiene por punto el B(2,-1,3) y como vector director el **AC** = (2,-2, -3). Su ecuación continua es

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-3}$$

(c)
Tomamos para el plano como punto el B(2,-1,3) y como vectores paralelos independientes el **BA** = (-4,4,-2) y **BC** = (-2,2,5). Su ecuación paramétrica es

$$\begin{cases} x = 2 - 4\lambda - 2\mu \\ y = -1 + 4\lambda + 2\mu \\ z = 3 - 2\lambda - 5\mu \end{cases}, \text{ con } \lambda, \mu \in \Re$$

Opción B

Ejercicio 1 de la Opción B del Modelo 1 de Sobrantes de 2008

[2'5 puntos] Sea f : R → R la función definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Se sabe que f tiene un máximo local en x = 1, que el punto (0, 1) es un punto de inflexión de su gráfica y que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{9}{4}$. Calcula a, b, c y d.

Solución

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Esta función es continua y derivable, las veces que sean necesarias, en $\Re$.
Como tiene un máximo local en x = 1, nos dice que f '(1) = 0
Como (0, 1) es un punto de inflexión, nos dice que f(0) = 1 y que f ''(0) = 0.
Además $\int_0^1 f(x)dx = \frac{9}{4}$
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$.
De f (0) = 1, tenemos 1 = d, por tanto **d = 1**
De f '(1) = 0, tenemos 0 = 3a + 2b + c
De f ''(0) = 0, tenemos 0 = 2b, por tanto **b = 0**
Sustituyendo los valores encontrados tenemos c = - 3a, por tanto $f(x) = ax^3 – 3ax + 1$

De $\int_0^1 f(x)dx = \frac{9}{4}$ resulta $\frac{9}{4} = \int_0^1 (ax^3 - 3ax + 1)dx = \left[\frac{ax^4}{4} - \frac{3ax^2}{2} + x\right]_0^1 = a/4 – (3a)/2 + 1$

Resolviendo la ecuación 9/4 = a/4 –(3a)/2 + 1, obtenemos **a = -1** y por tanto **c =** -3(-1) **= 3**.

La función pedida es $f(x) = -x^3 + 3x + 1$

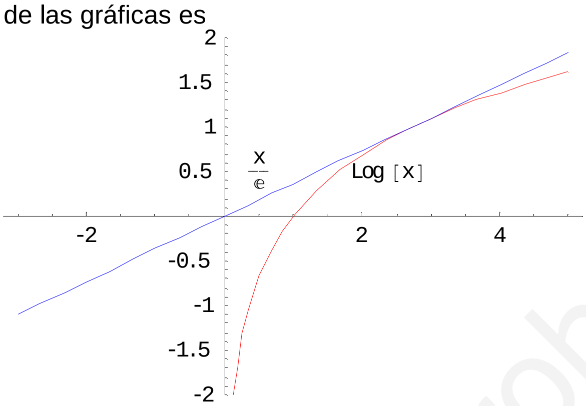
Ejercicio 2 de la Opción B del Modelo 1 de Sobrantes de 2008

Sea g : (0, +∞) → R la función dada por g(x) = ln x (ln denota logaritmo neperiano).
(a) [0'75 puntos] Justifica que la recta de ecuación y = (1/e)x es la recta tangente a la gráfica de g en el punto de abscisa x = e.
(b) [1'75 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de g, el eje de abscisas y la recta tangente del apartado anterior.

Solución

(a)

La recta tangente a g(x) en x = e es y – g(e) = g'(e)(x - e).
g(x) = ln(x), g(e) = ln(e) = 1.
g '(x) = 1/x, g '(e) = 1/e.
Sustituyendo tenemos que la recta tangente es y – 1 = (1/e)(x – e), es decir y = (1/e)x.
(b)
Sabemos que g(x) = ln (x) pasa por (1,0) y tiene x = 0^+ como asíntota vertical.
Sabemos que y = (1/e)x es una recta que pasa por (0,0) y coincide con g(x) = ln(x) en x = e., y que está por encima.
Aunque no lo piden un esbozo de las gráficas es



El área pedida es Área = $\int_0^e$(recta tangente)dx - $\int_1^e$(función)dx = $\int_0^e (\frac{x}{e})dx$ - $\int_1^e \ln(x)dx = \left[\frac{x^2}{e.2}\right]_0^e - [x.\ln(x)-x]_1^e =$

= $(e^2)/(2e)$ – [(eln(e) - e) – (1ln(1) – 1)] = [(e/2) – 1] u^2

Recordamos que $\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x$ es una integral por partes ($\int udv = uv - \int vdu$)

$$\int \ln(x)dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(x) \rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{array} \right\} = x\ln(x) - \int x.\frac{dx}{x} = x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x$$

Ejercicio 3 de la Opción B del Modelo 1 de Sobrantes de 2008

[2'5 puntos] Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula la matriz P que verifica AP − B = C^T (C^T es la matriz traspuesta de C).

Solución

Como |A| = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1(2-1) = 1 \neq 0$, A tiene matriz inversa A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^T)

AP − B = C^T, AP = B + C^T. Multiplicando esta expresión por la izquierda por A^{-1} tenemos
A^{-1}(AP) = A^{-1} (B + C^T). Operando queda P = A^{-1} (B + C^T).
Hacemos los cálculos

$$(B + C^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = A^{-1}(B + C^T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 de la Opción B del Modelo 1 de Sobrantes de 2008

Sea la recta r dada por

$$\begin{matrix} 2x + y - mz = 2 \\ x - y - z = -m \end{matrix}$$

y el plano π definido por $x + my - z = 1$

(a) [1 punto] ¿Existe algún valor de m para el que π y r son paralelos ?

(b) [1 punto] ¿Para qué valor de m está la recta contenida en el plano ?

(c) [0'5 puntos] ¿Cuál es la posición relativa de la recta y el plano cuando m = 0?

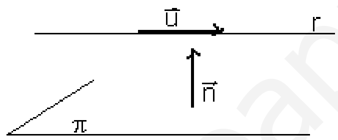
Solución

Recta $\begin{matrix} 2x + y - mz = 2 \\ x - y - z = -m \end{matrix}$

Un vector director es el producto vectorial de los vectores normales de cada plano

$$\mathbf{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -m \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-1 - m) - \mathbf{j}(-2 + m) + \mathbf{k}(-3) = (-1 - m, +2 - m, -3)$$

Plano $x + my - z = 1$. Un vector normal es $\mathbf{n} = (1, m, -1)$



(a)

Si la recta "r" es paralela al plano "π", el vector director de "r", **u**, es perpendicular al vector normal de "π", **n**, por tanto su producto escalar es cero

$\mathbf{u} \bullet \mathbf{n} = 0 = (-1 - m, +2 - m, -3) \bullet (1, m, -1) = -m^2 + m + 2 = 0$. Resolviendo la ecuación resulta m = - 1 y m = 2.

Es decir para m = - 1 y m = 2, la recta "r" es paralela al plano "π".

(b)

Para que la recta esté contenida en el plano, tiene que ser paralela y por el apartado (a) hemos visto que m = - 1 o m = 2. Resolvemos el sistema recta – plano para m = -1 y m = 2 y aquel en el cual tenga infinitas soluciones (dos ecuaciones y tres incógnitas) será el valor de m buscado.

Si **m = - 1**, el sistema es

$2x + y + z = 2$

$x - y - z = 1$

$x - y - z = 1$. Si nos damos cuenta la 2ª y la 3ª ecuación son iguales y el sistema es

$2x + y + z = 2$

$x - y - z = 1$, Sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas. Luego para **m = -1** la recta r stá contenida en el plano π.

Si **m = 2**, el sistema es

$2x + y - 2z = 2$

$x - y - z = -2$

$x + 2y - z = 1$. Si sumamos la 2ª y la 3ª ecuación, y después se la restamos a la primera nos queda

$0x + 0y + 0z = 3$, lo cual es absurdo, por tanto para **m = 2** la recta es paralela al plano pero no está contenida en él.

(c)

Para **m = 0**, la recta corta al plano en un punto, que se obtiene resolviendo el sistema

$2x + y = 2$

$x - y - z = 0$

$x - z = 1$. 3ª ecuación – 2ª ecuación nos resulta **y = 1**, entrando en la 1ª ecuación x = 1/2, y después entrando en la 2ª ecuación nos queda **z = - 1/2**. **El punto de corte es (x, y, z) = (1/2, 1, - 1/2).**