

**Opción A**

**Ejercicio 1**

Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = x^2 \cdot |x-3|$ .

- a) [1 punto] Estudia la continuidad y derivabilidad de  $f$
- b) [1'5 puntos] Estudia el crecimiento y decrecimiento de  $f$ . Calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan)

**Solución**

a)

$$x-3 > 0 \Rightarrow x > 3 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot (-1) \cdot (x-3) = x^2 \cdot (-x+3) & \text{si } x < 3 \\ x^2 \cdot (x-3) & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x^2 & \text{si } x < 3 \\ x^3 - 3x^2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -3^3 + 3 \cdot 3^2 = -27 + 27 = 0 \\ f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 = 27 - 27 = 0 \end{cases} \Rightarrow f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 0$$

Es continua

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 6x & \text{si } x < 3 \\ 3x^2 - 6x & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = -3 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 = -27 + 18 = -9 \\ f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 = 27 - 18 = 9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 9 \neq \lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = -9$$

No es derivable

b)

$$\text{Crecimiento} \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} -3x^2 + 6x > 0 \Rightarrow (-3) \cdot x \cdot (x-2) \Rightarrow \begin{cases} -3 < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ x > 0 \\ x > 2 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / x > 2 \end{cases} \\ 3x^2 - 6x > 0 \Rightarrow 3 \cdot x \cdot (x-2) \Rightarrow \begin{cases} 3 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ x > 0 \Rightarrow \text{No en el intervalo} \\ x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow \text{No en el intervalo} \end{cases} \end{cases}$$

**Crecimiento**  $\forall x \in \mathbb{R} / x > 3$

	$-\infty$	<b>0</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>-3 &gt; 0</b>		(-)	(-)	(-)
<b>x &gt; 2</b>		(-)	(-)	(+)
<b>x &gt; 0</b>		(-)	(+)	(+)
<b>Solución</b>		(-)	(+)	(-)

**Crecimiento**  $\forall x \in \mathbb{R} / (0 < x < 2) \cup (x > 3)$

**Decrecimiento**  $\forall x \in \mathbb{R} / (x < 0) \cup (2 < x < 3)$

Por definición hay un **Máximo** en  $x=2 \Rightarrow f(2) = -2^3 + 3 \cdot 2^2 = -8 + 12 = 4$ . De crecimiento a decrecimiento

Por definición hay un **Mínimo** en  $x=0 \Rightarrow f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0$ . De decrecimiento pasa a crecimiento

Por definición hay un **Mínimo** en  $x=3 \Rightarrow f(3) = -3^3 + 3 \cdot 3^2 = 0$ . De decrecimiento pasa a crecimiento

**Ejercicio 2**

Sea  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 1 + \ln(x)$ , siendo  $\ln$  la función logaritmo neperiano

a) [1 punto] Comprueba que la recta de ecuación  $y = 1 + \frac{1}{e}x$  es la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = e$

b) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de  $f$ , el eje de abscisa y la recta tangente del apartado a)

**Solución**

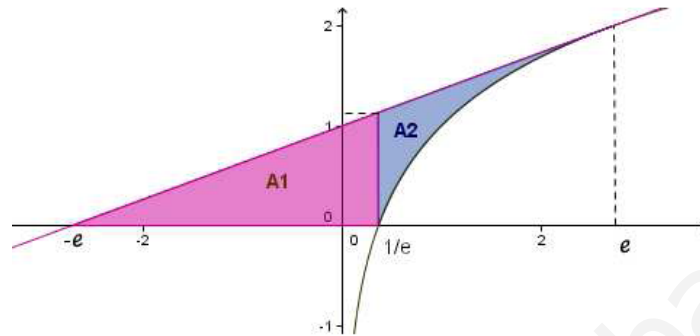
a)

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} f(e) = 1 + \ln e = 1 + 1 = 2 \\ f'(e) = \frac{1}{e} \end{cases} \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{e} \cdot (x - e) \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{e} \cdot x - \frac{e}{e} \Rightarrow y = \frac{1}{e} \cdot x - 1 + 2 \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{e} \cdot x + 1 \text{ (Comprobado)}$$

b)

Nos piden el área siguiente: (Esta solución es de Conchi Mérida)



La gráfica de una recta es inmediata, con dos puntos es suficiente para representarla, y la gráfica de  $f(x) = 1 + \ln(x)$  es igual que la de  $f(x)$  pero desplazada una unidad hacia arriba en ordenadas (OY), por eso el corte con abscisas ya no es en  $x = 1$ , sino en  $x = 1/e$ , porque de  $\ln(x) + 1 = 0$ , tenemos  $\ln(x) = -1$ , y por recíproca  $x = e^{-1} = 1/e$ .

Observando el dibujo: Área =  $A_1 + A_2 = \text{área triángulo} - \int_{1/e}^e (\text{recta tangente} - \text{función}) dx$

$$A_1 = (1/2) \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = (1/2)(1/e + e) \cdot (1 + 1/e^2) = (1/2)e + 1/e + 1/(2e^3) \text{ u.a.}$$

$$A_2 = \int_{1/e}^e (\text{recta tangente} - \text{función}) dx = \int_{1/e}^e [((1/e)x + 1) - (1 + \ln(x))] dx = \int_{1/e}^e [(1/e)x - \ln(x)] dx = (*) =$$

$$= [(1/2e)x^2 - x \ln|x| + x]_{1/e}^e = (e/2 - e + e) - (1/(2e^3) + 1/e + 1/e) = (1/2)e - 1/(2e^3) - 2/e \text{ u.a.}$$

$$(*) \int \ln(x) dx = \{ \text{es una integral por partes, } u = \ln(x) \text{ y } dv = dx, \text{ de donde } du = (dx)/x \text{ y } v = x \} =$$

$$= x \ln|x| - \int x \cdot (dx)/x = x \ln|x| - \int dx = x \ln|x| - x$$

Finalmente

$$\text{Área} = A_1 + A_2 = [(1/2)e + 1/e + 1/(2e^3)] + [(1/2)e - 1/(2e^3) - 2/e] = e - 1/e \text{ u.a.}$$

**Ejercicio 3**

Dada las matrices  $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

a) [1 puntos] Calcula, si existe, la matriz inversa de **A**

b) [1'5 puntos] Calcula las matrices **X** e **Y** que satisfacen las ecuaciones matriciales **XA = A + 2B** y **AY = A + 2B**

**Solución**

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 7 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{adj } A^t) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } A^t = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$XAA^{-1}=(A+2B)A^{-1} \Rightarrow XI=AA^{-1}+2BA^{-1} \Rightarrow X=I+2BA^{-1}$$

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+2 \cdot \begin{pmatrix} -5 & 16 \\ 10 & -34 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -10 & 32 \\ 20 & -68 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & 32 \\ 20 & -67 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}AY=A^{-1}(A+2B) \Rightarrow IY=A^{-1}A+2A^{-1}B \Rightarrow Y=I+2A^{-1}B$$

$$Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+2 \cdot \begin{pmatrix} -30 & 20 \\ 13 & -9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -60 & 40 \\ 26 & -18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -59 & 40 \\ 26 & -17 \end{pmatrix}$$

### Ejercicio 4

Considera el punto  $P(1, 0, -2)$ , la recta  $r$  definida por  $\begin{cases} x-2y-1=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}$  y el plano  $\pi$  de ecuación  $2x + y + 3z - 1$

$= 0$

a) [1'25 puntos] Halla la ecuación del plano que pasa por  $P$ , es paralelo a  $r$  y es perpendicular a  $\pi$

b) [1'25 puntos] Halla la ecuación de la recta que pasa por  $P$ , corta a  $r$  y es paralela a  $\pi$

### Solución

a) Plano  $\theta$  que es generado por los vectores directores de  $r$  y  $\pi$  y por el vector formado por el punto  $P$  de la recta  $r$  y el punto generador del plano

$$x=1+2y \Rightarrow z=2-y \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=2-\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r=(2, 1, -1)$$

$$\begin{cases} \vec{v}_r=(2, 1, -1) \\ \vec{v}_\pi=(2, 1, 3) \end{cases} \Rightarrow \theta \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$3 \cdot (x-1) - 2y + 2 \cdot (z+2) - 2 \cdot (z+2) + (x-1) - 6y = 0 \Rightarrow 4 \cdot (x-1) - 8y = 0 \Rightarrow 4x - 8y - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\theta \equiv x - 2y - 1 = 0$$

b)

Sea el vector director de la recta  $s$  pedida  $(a, b, 1)$

$$s \equiv \begin{cases} x=1+a\mu \\ y=b\mu \\ z=-2+\mu \end{cases}$$

$$\vec{v}_\pi \perp \vec{v}_s \Rightarrow \vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_s = 0 \Rightarrow (2, 1, 3) \cdot (a, b, 1) = 0 \Rightarrow 2a + b + 3 = 0$$

$$\begin{cases} s \equiv \begin{cases} x=1+a\mu \\ y=b\mu \\ z=-2+\mu \end{cases} \\ r \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=2-\lambda \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+a\mu=1+2\lambda \\ b\mu=\lambda \\ -2+\mu=2-\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+a\mu=1+2b\mu \\ -2+\mu=2-b\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2b \\ a-2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b+3=0 \\ -2a+4b=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$5b+3=0 \Rightarrow 5b=-3 \Rightarrow b=-\frac{3}{5} \Rightarrow a-2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = 0 \Rightarrow a+\frac{6}{5} = 0 \Rightarrow a=-\frac{6}{5} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_s = \left(-\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}, 1\right) \equiv (-6, -3, 5) \equiv (6, 3, -5) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=1+6\mu \\ y=3\mu \\ z=-2-5\mu \end{cases}$$

**Opción B**  
**Ejercicio 1**

**Ejercicio 1.-** Sea  $f:(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot (\ln x)^2}{(x-1)^2} & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x=1 \end{cases}$

- a) Sabiendo que  $f$  es continua, calcula  $a$   
 b) Estudia la existencia de asíntota horizontal para la grafica de esta función. En caso de que exista, determina su ecuación.

**Solución**

a)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \cdot (\ln x)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \cdot (\ln x)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \cdot (\ln x)^2}{(x-1)^2} = a \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \cdot (\ln x)^2}{(x-1)^2} = \frac{1 \cdot (\ln 1)^2}{(1-1)^2} = \frac{1 \cdot (0)^2}{0} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 \cdot (\ln x)^2 + x \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}}{2 \cdot (x-1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\ln x)^2 + 2 \cdot \ln x}{2 \cdot (x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\ln x + 2) \cdot \ln x}{2 \cdot (x-1)} = \frac{(\ln 1 + 2) \cdot \ln 1}{2 \cdot (1-1)} = \frac{(0+2) \cdot 0}{2 \cdot 0} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} \cdot \ln x + (\ln x + 2) \cdot \frac{1}{x}}{2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x + \ln x + 2}{2 \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 \ln x + 2}{2 \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 \cdot (\ln x + 1)}{2 \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x + 1}{x} =$$

$$= \frac{\ln 1 + 1}{1} = \frac{0 + 1}{1} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \cdot (\ln x)^2}{(x-1)^2} = 1 = a \Rightarrow a = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot (\ln x)^2}{(x-1)^2} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x=1 \end{cases}$$

b)

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot (\ln x)^2}{(x-1)^2} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot (\ln x)^2 + x \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}}{2 \cdot (x-1)}$$

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \cdot \ln x}{2 \cdot (x-1)} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x}}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot (\ln x + 1)}{2x}$$

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + 1}{x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Existe asíntota horizontal  $y = 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$

**Ejercicio 2**

Se consideran las funciones  $f:(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por:  $f(x) = \sqrt{3x}$ ,  $g(x) = \frac{1}{3}x^2$

- a) [0'5 puntos] Haz un esbozo de sus gráficas  
 b) [2 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráficas de ambas funciones.

**Solución**

a)

Tabla de valores para  $f(x)$

<b>x</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>f(x)</b>	<b>0</b>	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$	<b>3</b>	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{15}$

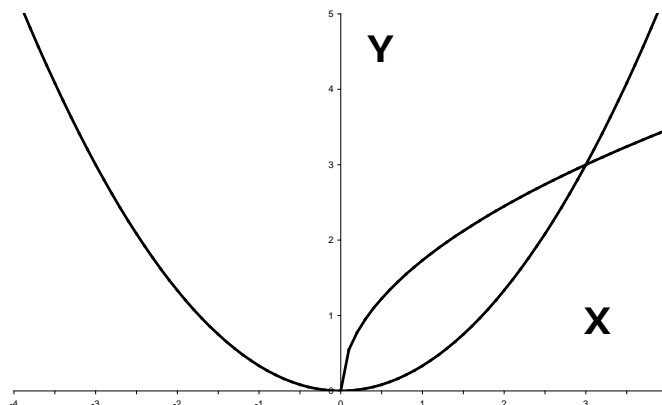
Elementos notables de  $g(x)$

$$\text{Puntos de corte} \rightarrow \begin{cases} \text{Con OX} \Rightarrow y=0 \Rightarrow 0 = \frac{x^2}{3} \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0 \\ \text{Con OY} \Rightarrow x=0 \Rightarrow y = \frac{0^2}{3} \Rightarrow y=0 \end{cases} \Rightarrow (0, 0)$$

$$\begin{cases} g'(x) = \frac{2}{3}x \Rightarrow g'(x)=0 \Rightarrow \frac{2}{3}x=0 \Rightarrow x=0 \\ g''(x) = \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \end{cases} \Rightarrow \text{Mínimo en } x=0 \Rightarrow g(0) = \frac{2}{3} \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

Tabla de valores para  $g(x)$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
g(x)	3	4/3	1/3	0	1/3	4/3	3



$$f(x)=g(x) \Rightarrow \sqrt{3x}=\frac{1}{3}x^2 \Rightarrow 3\sqrt{3x}=x^2 \Rightarrow (x^2)^2=(3\sqrt{3x})^2 \Rightarrow x^4=3^2x(\sqrt{3x})^2 \Rightarrow x^4=9x3x \Rightarrow$$

$$x^4-27x=0 \Rightarrow (x^3-27)x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^3-27=0 \Rightarrow x=\sqrt[3]{27}=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$A=\sqrt{3}\int_0^3 (x)^{\frac{1}{2}} dx - \frac{1}{3}\int_0^3 x^2 dx = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3/2} \cdot [x^{3/2}]_0^3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^3 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot (3^{3/2}-0^{3/2}) - \frac{1}{9} \cdot (3^3-0^3)$$

$$A=\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{9} \cdot 27 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3}{3} - 3 = 6 - 3 = 3 \text{ u}^2$$

### Ejercicio 3

Dado el sistema de ecuaciones lineales 
$$\begin{cases} x+\lambda y+z=4 \\ x+3y+z=5 \\ \lambda x+y+z=4 \end{cases}$$

- a) [1'75 puntos] Discútelo según los valores de parámetro  $\lambda$   
 b) [0'75 puntos] Resuélvelo en el caso  $\lambda=1$

### Solución

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + \lambda^2 + 1 - 3\lambda - 1 - \lambda = \lambda^2 - 4\lambda + 3 \Rightarrow$$

$$\text{Si } |A|=0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 12 = 4 > 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{4+2}{2} = 3 \\ \lambda = \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{1, 3\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número incógnitas} \Rightarrow$$

Si  $\lambda=3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & -2 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow 0z=1 \Rightarrow \text{No existe valor que lo resuelva. Sistema Incompatible}$$

Si  $\lambda=1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 0z=0 \Rightarrow \text{Infinitas soluciones. Sistema Compatible Indeterminado}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{2} \Rightarrow x+\frac{1}{2}+z=4 \Rightarrow x=4-\frac{1}{2}-z=\frac{7}{2}-z$$

Solución  $\left(\frac{7}{2}-\mu, \frac{1}{2}, \mu\right), \mu \in \mathbb{R}$

### Ejercicio 4

Considera el plano  $\pi$  de ecuación  $3x - 2y - 2z = 7$  y la recta  $r$  definida por  $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$

a) [1'25 puntos] Determina la ecuación del plano paralelo a  $\pi$  que contiene a  $r$

b) [1'25 puntos] Halla la ecuación de plano ortogonal a  $\pi$  que contiene a  $r$

### Solución

a) Comprobaremos si la recta es paralelo al plano, si es así el producto escalar de los vectores de la recta y el plano es nulo porque son perpendiculares. Sino es paralelo no tendrá solución el problema. Comprobado que la recta es paralela el nuevo plano tiene el mismo vector director que el plano de referencia  $\pi$ , calculando el valor del término independiente al tener que pasar por uno de los puntos de la recta

$$\text{Comprobación del paralelismo} \begin{cases} \vec{v}_r = (2, 1, 2) \\ \vec{v}_\pi = (3, -2, -2) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = (2, 1, 2) \cdot (3, -2, -2) = 6 - 2 - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{v}_r \perp \vec{v}_\pi \Rightarrow r \parallel \pi$$

$$\begin{cases} 3x - 2y - 2z + D = 0 \\ \text{Punto de } r \Rightarrow R(2, -1, 2) \end{cases} \Rightarrow 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 + D = 0 \Rightarrow 6 + 2 - 4 + D = 0 \Rightarrow D = -4 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 3x - 2y - 2z - 4 = 0$$

b) Es un plano generado por el vector director de la recta, el del plano y por el vector generador .formado por un punto cualquiera de la recta  $R$  y el punto genérico del plano  $G$

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (2, 1, 2) \\ R(2, -1, 2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (2, 1, 2) \\ \vec{v}_\pi = (3, -2, -2) \\ \overline{RG} = (x, y, z) - (2, -1, 2) = (x-2, y+1, z-2) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)(2) - (y+1)(-10) + (z-2)(-7) = 0 \Rightarrow 2x + 10y - 7z + (-4 + 10 + 14) = 0$$

$$\Rightarrow \pi \equiv 2x + 10y - 7z + 20 = 0$$