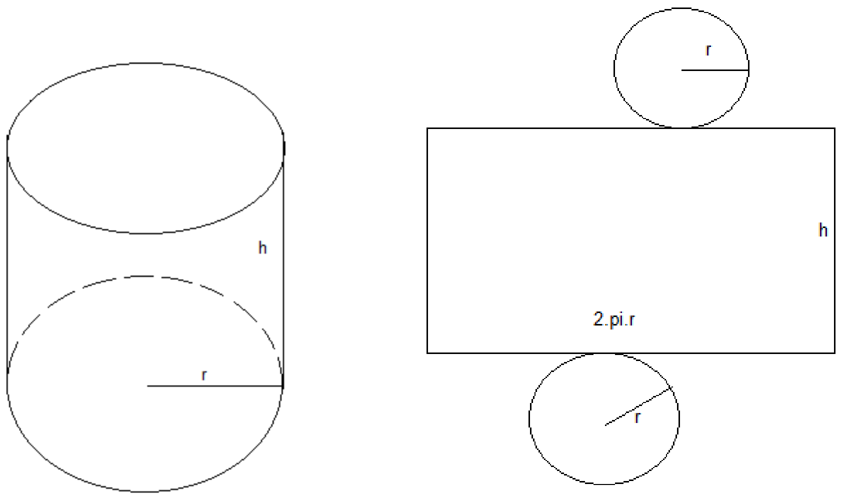
Opción A

Junio 2011 común ejercicio 1 opción A

[2'5 puntos] Se desea construir un depósito cilíndrico cerrado de área total igual a 54 m^2. Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que éste tenga volumen máximo.

Solución



Función a maximizar Volumen = V = (área base).altura = $(\pi r^2).h$

Relación entre las variables área total = 54 = $(2\pi r).h + 2.(\pi r^2)$, de donde $h = \dfrac{54 - 2\pi r^2}{2\pi r}$ y simplificando nos queda $h = 27/(\pi r) - r$.

Función a maximizar $V(r) = (\pi r^2).h = (\pi r^2).[27/(\pi r) - r] = 27r - \pi r^3$.

Si V'(b) = 0 y V''(b) < 0, x = b es un máximo de V(r)

$V'(r) = 27 - 3\pi r^2$. De V'(r) = 0, tenemos $27 - 3\pi r^2 = 0$, es decir $r^2 = 9/\pi$, de donde $x = \pm\sqrt{(9/\pi)}$, y como "r" es una longitud tenemos $r = 3/\sqrt{(\pi)}$ m.

Las dimensiones del depósito son $r = 3/\sqrt{(\pi)}$ m y $h = 27/(\pi r) - r = 9/\sqrt{(\pi)} - 3/\sqrt{(\pi)} = 6/\sqrt{(\pi)}$m, lo cual es cierto pues la altura tiene que ser igual al diámetro .

Veamos que $r = 3/\sqrt{(\pi)}$ es un máximo, viendo que $V''(3/\sqrt{(\pi)}) < 0$

$V'(r) = 27 - 3\pi r^2$.

$V'(r) = - 6\pi r$.

Sustituyendo "$3/\sqrt{(\pi)}$)" por "r" en V''(r) obtenemos $V''(3/\sqrt{(\pi)}) = - 18\sqrt{(\pi)} < 0$, luego es un máximo.

Junio 2011 común ejercicio 2 opción A

Sea $f :(-1,+\infty) \rightarrow R$ la función definida como f(x) = ln(x + 1), donde ln denota la función logaritmo neperiano.

(a) [0'75 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, el eje OY y la recta y = 1. Calcula los puntos de corte de las gráficas.

(b) [1'75 puntos] Halla el área del recinto anterior.

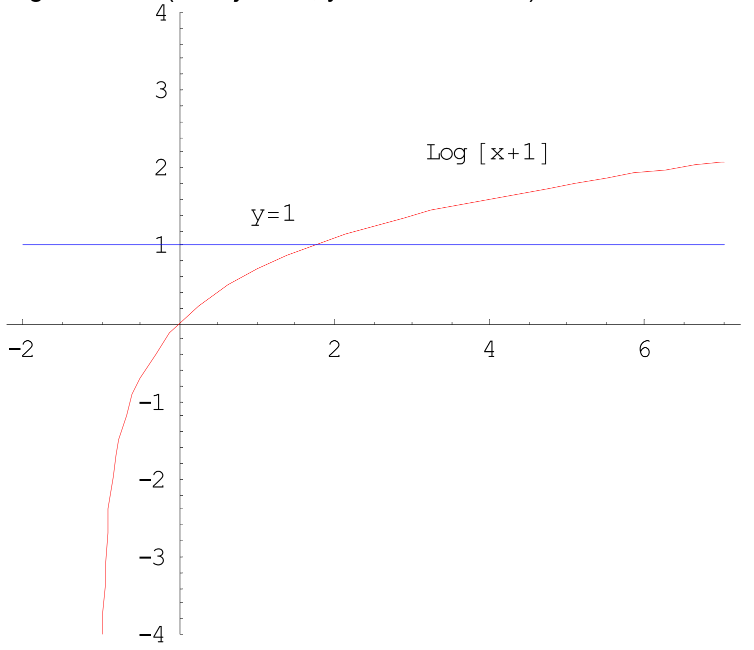
Solución

Sabemos que la gráfica de ln(x + 1) es exactamente igual que la de ln(x), pero desplazada una unidad a la izquierda en el eje OX, es decir tiene una asíntota vertical en x = -1 (ln(x) la tiene en x = 0), siempre es creciente, y corta al eje OX en el punto de abscisa x = 0, (ln(x) corta al eje OX en x = 1).

El corte de f con OY se obtiene igualando a cero la función, es decir ln(x + 1) = 0, pero recordamos que ln(1) = 0, por x + 1 = 1, de donde x = 0, y f(0) = ln(1) = 0.

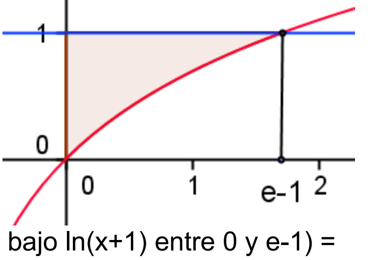
El corte de f con la recta y = 1, se obtiene resolviendo ln(x + 1) = 1, pero recordamos que ln(e) = 1, de donde x + 1 = e, y tenemos que se cortan en la abscisa x = e – 1.

Un esbozo de las gráficas es (en rojo el ln, y en azul la recta)



(b)

El área que me piden, es la que se muestra en la siguiente figura



Área = (área rectángulo) – (área bajo ln(x+1) entre 0 y e-1) =

= (e -1).1 - $\int_0^{e-1}$ ln(x+1)dx =**= (e-1).1 – [x.ln(x+1) – x + ln|x+1|]$_0^{e-1}$ =

= (e -1) – ((e-1).ln(e) – (e -1) + ln(e)) – (0 – 0 + 0)) = (e -1) – ((e -1) – (e -1) + 1) =

= (e -1) – 1 = (e – 2) u^2.

** ∫ ln(x + 2).dx, que es una integral por partes (∫u.dv = u.v - ∫v.du)

Tomamos u = ln(x+1) de donde du = dx/(x+1), y dv = dx de donde v = ∫dx = x, luego nos resulta

∫ ln(x + 1).dx = x.ln(x+1) - ∫[x/(x+1)]dx = x.ln(x+1) - ∫[(x+1-1)/(x+1)]dx = x.ln(x+1) - ∫[1 -1/(x+1)]dx = x.ln(x+1) – x + ln|x+1| + K.

Junio 2011 común ejercicio 3 opción A

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$-\lambda x + y + z = 1$$
$$x + \lambda y + z = 2$$
$$\lambda x + y + z = 1$$

(a) [1'75 puntos] Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.

(b) [0'75 puntos] Resuelve el sistema para λ = 0.

Solución

(a)

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1\lambda & 1 & \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$A^* = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1\lambda & 1 & 2 & \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Si det(A) = |A| $\neq$ 0, rango(A) = rango(A^*) = 3. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$$|A| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1\lambda & 1 & = \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (-\lambda)(\lambda-1)-(1)(1-\lambda)+(1)(1-\lambda^2) = (-\lambda)(\lambda-1)+(1)(\lambda-1)+(1)(1+\lambda).(1-\lambda) =$$

= (λ-1)(- λ+1-1- λ) = (λ-1)(- 2λ)

(Lo he desarrollado por los adjuntos de la 1ª fila)

Resolvemos |A| = 0, es decir (λ-1)(- 2λ)= 0, de donde λ = 1 y λ = 0

Si **λ ≠ 1** y **λ ≠ 0**, tenemos |A| ≠ 0 con lo cual rango(A) = rango(A^*) = 3, y por el teorema de *Rouche el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.*

Si **λ = 1**, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2+F_1 \\ F_3+F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(4-6) = 2 \neq 0$,tenemos rango($A^*$) = 3

Como rango(A)= 2 ≠ rango(A^*)= 3, por el teorema de Rouche el sistema es incompatible, y no tiene solución.

Si **λ = 0**, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(1-1) =$,tenemos rango(A^*) = 2

Como rango(A)= 2 = rango(A^*)< nº de incógnitas, por el teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.

(b)

Nos piden resolverlo si **λ = 0**.

Hemos visto que c*omo rango(A)= 2 = rango(A^*), por el teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.*

Como rango(A)= rango(A^*) = 2 < nº de incógnitas, tenemos sólo dos ecuaciones (las dos primeras, con las que hemos calculado el rango de A, y dos incógnitas principales.

y + z = 1

x + z = 2. Tomamos z = λ nº real, y obtenemos x = 2- λ e y = 1- λ.

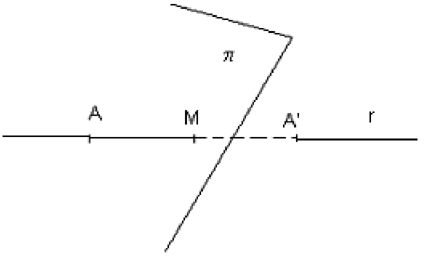
La solución del sistema es (x, y, z)= (2- λ, 1- λ, λ) con λ nº real.

Junio 2011 común ejercicio 4 opción A

[2'5 puntos] Determina el punto simétrico del punto A(-3,1,6) respecto de la recta $x - 1 = (y + 3)/2 = (z + 1)/2$.

Solución

Simétrico de A(-3,1,6) respecto a la recta $x - 1 = (y + 3)/2 = (z + 1)/2$



Calculamos el punto M proyección ortogonal del punto A sobre la recta r. M es el punto medio del segmento AA', siendo A' el punto simétrico buscado

(1)

Determinamos el plano π que pasa por A(-3,1,6) y es perpendicular a la recta "r" por tanto su vector normal **n** es el vector director de la recta **v**, es decir **n** = **v** = (1,2,2)

La determinación normal del plano es $\mathbf{n}\bullet(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0 = 1(x+3) + 2(y-1) + (2)(z-6)$.

Operando nos queda $\pi \equiv x + 2y + 2z - 11 = 0$

(2)

Calculamos el punto M intersección de la recta r con el plano π, sustituyendo la ecuación de la recta en el plano.

$r \equiv (x,y,z) = (1+ \lambda,-3+2\lambda,-1+2\lambda)$, pues un punto de la recta es (1,-3,-1)

$1(1+ \lambda) + 2(-3+2\lambda) +2 (-1+2\lambda) - 11 = 0$. Operando sale $9\lambda - 18 = 0$, de donde $\lambda = 2$, y tenemos $M(1+ (2),-3+2(2),-1+2(2)) = M(3,1,3)$

(3)

El punto M es el punto medio de AA'

$(3,1,3) = ((-3+x)/2, (1+y)/2, (6+z)/2)$

De $3 = (-3+x)/2$, obtenemos $x = 9$

De $1 = (1+y)/2$, obtenemos $y = 1$

De $3 = (6+z)/2$, obtenemos $z = 0$

Luego el simétrico es A'(9, 1,0)

Opción B

Junio 2011 común ejercicio 1 opción B

[2'5 puntos] Sea $f :[1,+\infty) \to R$ la función definida como $f(x) = \sqrt{x - 1}$. Determina el punto P de la gráfica de f que se encuentra a menor distancia del punto A(2,0). ¿Cuál es la distancia?

Solución

Tenemos que hacer mínima la distancia del punto A(2,0) al punto $X(x,\sqrt{(x-1)})$.

$d(A,X) = d(x) = ||\mathbf{AX}|| = +\sqrt{[(x-2)^2 + (\sqrt{(x-1)})^2]} = +\sqrt{[(x-2)^2 + (x-1)]}$

Si $d'(b) = 0$ y $d''(b) >0$, $x = b$ es un mínimo de $d(x)$

$d'(x) = (2(x-2)+1) / (2.\sqrt{[(x-2)^2 + (x-1)}) = (2x-3) / (2.\sqrt{[(x-2)^2 + (x-1)})$

De $d'(x) = 0$, tenemos $2x-3 = 0$, de donde $x = 3/2$. (Posible mínimo)

El punto pedido sería $X(3/2, \sqrt{((3/2)-1)}) = X(3/2, ,\sqrt{(1/2)})$, y por tanto la distancia es $d(x) = ||\mathbf{AX}|| = +\sqrt{[(3/2-2)^2 + (3/2-1)]} = +\sqrt{(1/4 + 1/2)} = +\sqrt{(3/4)}$ u.l.

Veamos que es un mínimo, es decir $d''(3/2) > 0$

$d'(x) = (2x-3) / (2.\sqrt{[(x-2)^2 + (x-1)})$

$d''(x) = ([4.\sqrt{[(x-2)^2 + (x-1)]} - (2x-3).\{2. (2x-3) / 4.\sqrt{[(x-2)^2 + (x-1)]}\}) / (4.[(x-2)^2+(x-1))$

$d''(3/2) = ([4.\sqrt{(3/4)}] - 0) / (4.(3/4)) > 0$, luego es un mínimo.

Junio 2011 común ejercicio 2 opción B

[2'5 puntos] Halla $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^{2x}-1)(e^x+1)}dx$

Sugerencia: efectúa el cambio $t = e^x$.

Solución

(a)

Del cambio $t = e^x$, tenemos $dt = e^x.\ dx$".

Entramos ya en la integral

$I = \int e^x /[(e^{2x} – 1)(e^x + 1)]dx$ = {cambio $t = e^x$, tenemos $dt = e^x.\ dx$"} =

$= \int dt/([t^2 – 1)(t + 1)] = \int dt/[(t – 1)(t + 1)(t + 1)] = \int dt/[(t – 1)(t + 1)^2]$, que es una integral racional con raíces reales, una simple el "-1" y otra doble, el"1".

$I = \int dt/[(t – 1)(t + 1)^2] = \int A.dt/(t – 1) + \int B.dt/(t + 1) + \int C.dt/(t + 1)^2 =$

$= A.\ln|t – 1| + B.\ln|t + 1| + C.(t + 1)^{-2+1}/(-2+1) + K = A.\ln|t – 1| + B.\ln|t + 1| - C/(t + 1) + K =$ {quito cambio $t = e^x$} $= A.\ln|e^x – 1| + B.\ln|e^x + 1| - C/(e^x + 1) + K$, donde A, B y B son constantes que vamos a calcular a continuación:

$1 = A/(t – 1) + B/(t + 1) + C/(t + 1)^2 = [A(t+1)^2 + B(t+1)(t-1) + C(t-1)] / (t-1)(t+1)^2$.

Igualando numeradores tenemos $1 = A(t+1)^2 + B(t+1)(t-1) + C(t-1)$

Para t = 1, tenemos 1 = 4A, de donde A = 1/4

Para t = -1, tenemos 1 = -2C, de donde C = -1/2.

Para t = 0, tenemos 1 = 1/4 + B(-1) + (-1/2)(-1) = -B + 3/4, de donde B = 3/4 - 1 = -1/4.

La integral pedida es $I = A.\ln|e^x – 1| + B.\ln|e^x + 1| - C/(e^x + 1) + K =$

$= (1/4).\ln|e^x – 1| - (1/4).\ln|e^x + 1| + 1/(2.(e^x + 1)) + K$

Junio 2011 común ejercicio 3 opción B

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(a) [1'25 puntos] Determina los valores de λ para los que la matriz $A^2 + 3A$ no tiene inversa.

(b) [1'25 puntos] Para λ = 0, halla la matriz X que verifica la ecuación AX + A = 2I, siendo I la matriz identidad de orden 2.

Solución

(a)

$A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $A^2 = A.A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda+1)^2 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$, $3A = \begin{pmatrix} 3\lambda+3 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

$B = A^2 + 3A = \begin{pmatrix} (\lambda+1)^2 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\lambda+3 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda+1)^2+(3\lambda+3) & 0 \\ \lambda+3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2+5\lambda+4 & 0 \\ \lambda+3 & -2 \end{pmatrix}$

Para que B no tenga inversa B^{-1}, su determinante (| |) tiene que ser cero.

$|B| = \begin{vmatrix} \lambda^2+5\lambda+4 & 0 \\ \lambda+3 & -2 \end{vmatrix} = -2(4\lambda^2+ 5\lambda +4) - 0 = 0$, es decir $\lambda^2+ 5\lambda + 4 = 0$. Resolviendo esta ecuación de 2º grado tenemos λ = -1 y λ = -4.

B no tenga inversa B^{-1}, si λ = -1 y λ = -4.

(b)

Para λ = 0, halla la matriz X que verifica la ecuación AX + A = 2I

Para λ = 0, tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Como $\det(A) = |A| = -1 \neq 0$, existe la matriz inversa de A que

es $A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^t)$.
De la expression AX + A = 2I, tenemos AX = 2I – A. Multiplicando esta expresión por la izquierda por A^{-1} tenemos $A^{-1}.AX = A^{-1}.(2I – A)$, es decir $X = A^{-1}.(2I – A)$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\ Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}Adj(A^t) = \frac{1}{-1}.\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2I - A = 2.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto $X = A^{-1}.(2I – A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

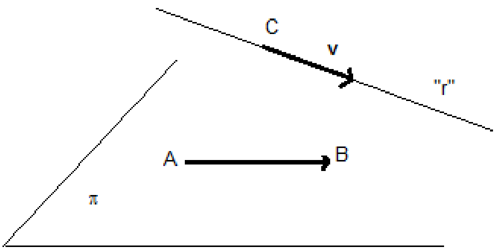
Junio 2011 común ejercicio 4 opción B

Considera los puntos A(1,0,-1) y B(2,1,0), y la recta “r” dada por $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$.

(a) [1’75 puntos] Determina la ecuación del plano que es paralelo a r y pasa por A y B.
(b) [0’75 puntos] Determina si la recta que pasa por los puntos P(1,2,1) y Q(3,4,1) está contenido en dicho plano.

Solución

(a)
Un plano π está determinado por un punto, el A y dos vectores independientes, el **AB** y el vector director de la recta **v** (puesto que el plano es paralelo a la recta).



Ponemos la recta “r” en paramétricas haciendo x = λ nº real, con lo cual
x = λ
y = 1 - λ
z = 2 - λ, de donde un punto de la recta es el C(0,1,2) y un vector director **v** = (1,-1,-1)

El plano π tiene de ecuación 0 = det(π**AX**,**AB**,**v**)
A(1,0,-1); B(2,1,0), **AB** = (1,1,1), **v** = (1,-1,-1)

$$0 = \det(\pi \mathbf{AX},\mathbf{AB},\mathbf{v}) = \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = (x-1)(0) – y(-2) + (z+1)(-2) = 2y-2z-2=0,$$ o bien

simplificando π tiene de ecuación y – z – 1 = 0

(b)
Para ver si la recta que pasa por los puntos P(1,2,1) y Q(3,4,1) está contenido en dicho plano, sólo tenemos que ver si los puntos P y Q pertenecen al plano.
Entrando con P en π tenemos (2) – (1) – 1 = 0, lo cual es cierto
Entrando con Q en π tenemos (4) – (1) – 1 = 0, lo cual es falso, por tanto la recta no está contenida en el plano.