PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD MATEMÁTICAS II DE ANDALUCÍA
CURSO 2011-2012.

Opción A

Ejercicio 1, Opción A, Modelo 6 de 2012.

[2'5 puntos] Se considera la función derivable f : R → R definida por f(x) = $\begin{cases} 1+\dfrac{a}{x-2} & \text{si } x<1 \\ a+\dfrac{b}{\sqrt{x}} & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$.

Calcula los valores de a y b.

Solución

Si f es derivable, f es continua; en particular es continua y derivable en x = 1

$$f(x) = \begin{cases} 1+\dfrac{a}{x-2} & \text{si } x<1 \\ a+\dfrac{b}{\sqrt{x}} & \text{si } x\ge 1 \end{cases}. \qquad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-a}{(x-2)^2} & \text{si } x<1 \\ \dfrac{-b}{2\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x})^2} & \text{si } x\ge 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{-a}{(x-2)^2} & \text{si } x<1 \\ \dfrac{-b}{2x\sqrt{x}} & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$$

Como f es continua en x = 1, $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$

$$f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(a+\frac{b}{\sqrt{x}}\right) = a + b$$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(1+\dfrac{a}{x-2}\right) = 1 - a$. Igualando a + b = 1 – a, de donde 2a + b = 1.

Como f es derivable en x = 1, $f'(1^+) = f'(1^-)$. Vemos la continuidad de la derivada.

$$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{-b}{2x\sqrt{x}}\right) = -b/2$$

$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\dfrac{-a}{(x-2)^2}\right) = -a$. Igualando - a = – b/2, de donde b = 2a.

b = 2a, de donde 2a + 2a = 4a = 1 → **a = 1/4** y **b = 1/2**.

Ejercicio 2, Opción A, Modelo 6 de 2012.

[2'5 puntos] Sea la función f : R → R definida por $f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (-1, 0).

Solución

Una primitiva de $f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$ es $F(x) = I = \int (1 - x^2)e^{-x}dx$ = {Integral por partes por partes $\int udv = uv - \int vdz$. En nuestro caso $u = 1 - x^2$ y $dv = e^{-x}dx$, de donde $du = -2xdx$ y $v = \int dv = \int e^{-x} = -e^{-x}$ } $= (1- x^2)(-e^{-x}) - \int -e^{-x}(-2xdx) = - (1- x^2)e^{-x} - 2\int xe^{-x} = - (1- x^2)e^{-x} - 2I_1$

$I_1 = \int xe^{-x}dx$ = {Integral por partes por partes, en nuestro caso u = x y $dv = e^{-x}dx$, de donde du = dx y $v = -e^{-x}$} $= -x\cdot e^{-x} - \int -e^{-x}dx = -x\cdot e^{-x} + \int e^{-x}dx = -x\cdot e^{-x} - e^{-x}$, por tanto

$F(x) = I = \int (1 - x^2)e^{-x}dx = - (1- x^2)e^{-x} - 2I_1 = - (1- x^2)e^{-x} - 2(-x\cdot e^{-x} - e^{-x}) + K = e^{-x}(x^2 + 2x + 1) + K$

Como pasa por (-1,0), F(-1) = 0 → e(1 - 2 +1) + K = 0 = 0 + K = 0, de donde K = 0 y la primitiva pedida es $F(x) = e^{-x}(x^2 + 2x + 1)$

Ejercicio 3, Opción A, Modelo 6 de 2012.

Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería por la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

(a) [1'25 puntos] ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora? Razona las respuestas.

(b) [1'25 puntos] Si el precio del libro, la calculadora y el estuche hubieran sufrido un 50 %, un 20% y un 25% de descuento respectivamente, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio de cada artículo.

Solución

x = libro; y = calculadora y z = estuche

Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería por la compra de un libro, una calculadora y un estuche.
Traducción $x + y + z = 57$€.
Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.
Traducción $x = 2(y + z)$
(a)
¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora? Razona las respuestas.
Como tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas
$x + y + z = 57$€.
$x = 2(y + z)$, tenemos un sistema compatible e indeterminado que tiene infinitas soluciones.

Juan Carlos Schiemann Correia, me envío la solución de que si se puede saber el precio del libro pero nó el de la calculadora:

De $x = 2(y + z)$, tenemos $x/2 = y + z$, y entrando en la 1ª ecuación resulta $x + x/2 = 57$, de dónde $3x/2 = 57$ y nos sale **x = 38€.**
(b)
Si el precio del libro, la calculadora y el estuche hubieran sufrido un 50 %, un 20% y un 25% de descuento respectivamente, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio de cada artículo.
Traducción $0'5x + 0'8y + 0'75z = 34$ €
Sustituimos $x = 2(y + z)$, en las otras dos ecuaciones:
$2(y + z) + y + z = 57 \rightarrow 3y + 3z = 57 \rightarrow y + z = 19 \rightarrow y = 19 - z$
$0'5\cdot 2(y + z) + 0'8y + 0'75z = 34 \rightarrow 1'8y + 1'75z = 34 \rightarrow 1'8(19 - z) + 1'75z = 34 \rightarrow 34'2 - 0'05z) = 34$,
de donde $z = 4$ €, $y = 19 - 4 = 15$ € y $x = 2(19) = 38$ €.
Luego un libro vale x = 38 €, una calculadora y = 15 € y un estuche z = 4 €.

Ejercicio 4, Opción A, Modelo 6 de 2012.

[2'5 puntos] Determina el punto P de la recta $r \equiv (x+3)/2 = (y+5)/3 = (z+4)/3$ que equidista del origen de coordenadas y del punto A(3, 2, 1).

Solución

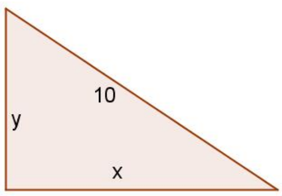
Ponemos la recta en paramétricas $r \equiv (x+3)/2 = (y+5)/3 = (z+4)/3 = \lambda \in \mathbb{R}$, de donde
$x = -3 + 2\lambda$
$y = -5 + 3\lambda$
$z = -4 + 3\lambda$.
Un punto genérico de la recta "r" es $P(x,y,z) = P(-3 + 2\lambda, -5 + 3\lambda, -4 + 3\lambda)$.
Me dicen que $d(O,P) = d(A,P)$, es decir $||\mathbf{OP}|| = ||\mathbf{AP}||$
$\mathbf{OP} = (-3 + 2\lambda, -5 + 3\lambda, -4 + 3\lambda) \rightarrow ||\mathbf{OX}|| = \sqrt{(-3+2\lambda)^2+(-5+3\lambda)^2+(-4+3\lambda)^2} = \sqrt{22\lambda^2 - 66\lambda + 50}$
$\mathbf{AP} = (-3 + 2\lambda - 3, -5 + 3\lambda - 2, -4 + 3\lambda - 1) = (-6 + 2\lambda, -7 + 3\lambda, -5 + 3\lambda)$
$\rightarrow ||\mathbf{AP}|| = \sqrt{(-6+2\lambda)^2+(-7+3\lambda)^2+(-5+3\lambda)^2} = \sqrt{22\lambda^2 - 96\lambda + 110}$.
Igualando y elevando al cuadrado tenemos $22\lambda^2 - 66\lambda + 50 = 22\lambda^2 - 96\lambda + 110 \rightarrow 30\lambda = 60$, de donde tenemos $\lambda = 2$, y **el punto es** P(-3 + 2(2), -5 + 3(2), -4 + 3(2)) = **P(1, 1, 2).**

Opción B

Ejercicio 1, Opción B, Modelo 6 de 2012.

[2'5 puntos] De entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 10 unidades, determina las dimensiones del de área máxima.

Solución



Función a optimizar = Área = $(1/2)xy$
Relación $y^2 + x^2 = 10^2$, de donde $y = \sqrt{100 - x^2}$, es (+) puesto que es una longitud.
Mi función es $A(x) = (1/2)x\cdot \sqrt{100 - x^2}$
El máximo anula la 1ª derivada A'(x)

$A'(x) = (1/2)\cdot\sqrt{100-x^2} + (1/2)x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}} = \dfrac{100-x^2-x^2}{2\sqrt{100-x^2}} = \dfrac{50-x^2}{\sqrt{100-x^2}}$

De A'(x) = 0, tenemos $50 - x^2 = 0$, de donde $x = +\sqrt{50}$, pues es una longitud.

Las dimensiones del triángulo son $x = +\sqrt{50}$ e $y = \sqrt{100-\left(\sqrt{50}\right)^2} = \sqrt{50}$, luego es un triángulo isósceles.

Veamos que es un máximo, es decir A($\sqrt{50}$) < 0.

$A'(x) = \dfrac{50-x^2}{\sqrt{100-x^2}}$

$A''(x) = \dfrac{-2x\cdot\sqrt{100-x^2} - (100-x^2).\left(\sqrt{100-x^2}\right)'}{\left(\sqrt{100-x^2}\right)^2}$

$A''(\sqrt{50}) = \dfrac{-2\sqrt{50}\cdot\sqrt{50} - (0).\left(\sqrt{100-x^2}\right)'}{(+)}$ < 0, luego es máximo.

Ejercicio 2, Opción B, Modelo 6 de 2012.

Sean las funciones f : R → R y g : [0;+∞) → R definidas por $f(x) = x^2/4$ y $g(x) = 2\cdot\sqrt{x}$ respectivamente.
(a) [0'75 puntos] Halla los puntos de corte de las gráficas de f y g. Realiza un esbozo del recinto que limitan.
(b) [1'75 puntos] Calcula el área de dicho recinto.

Solución

Sean las funciones f : R → R y g : [0;+∞) → R definidas por $f(x) = x^2/4$ y $g(x) = 2\cdot\sqrt{x}$ respectivamente.

(a)

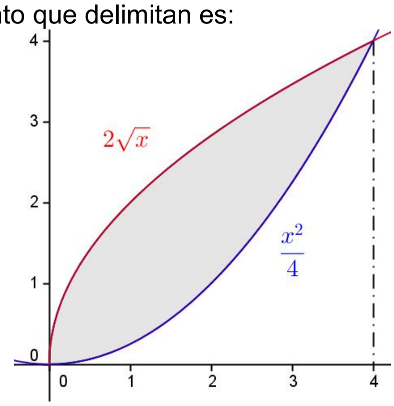
Halla los puntos de corte de las gráficas de f y g. Realiza un esbozo del recinto que limitan.

La gráfica de $f(x) = x^2/4$ es parecida a la de x^2 (vértice (0,0), ramas hacia arriba), pero un poco más abierta pues para x = 1 vale 1/4.

La gráfica de $g(x) = 2\cdot\sqrt{x}$ es parecida a la de $g(x) = 2\cdot\sqrt{x}$ (también es una parábola, pero horizontal en este caso), pero un poco más alargada pues para x = 1 vale 2.

Los corte los calculamos resolviendo la ecuación f(x) = g(x), es decir $x^2/4 = 2\cdot\sqrt{x}$. Elevando al cuadrado tenemos $x^4/16 = 4x$, luego $x^4 = 64x \to x^4 - 64x = x(x^3 - 64) = 0$, de donde x = 0 y $x = \sqrt[3]{64} = 4$

Un esbozo de sus gráficas y del recinto que delimitan es:



(b)

Calcula el área de dicho recinto.

Área = $\int_0^4 [(2\sqrt{x}) - (x^2/4)]dx + \int_0^4 [(2x^{1/2}) - (x^2/4)]dx = [2x^{1/2+1}/(1/2+1) - x^3/12]_0^4 = [\dfrac{4\sqrt{x^3}}{3} - x^3/12]_0^4 =$

$= \dfrac{4\sqrt{4^3}}{3} - 4^3/12 - (0) = \dfrac{16\sqrt{4}}{3} - \dfrac{64}{12} = \dfrac{16\sqrt{4}}{3} - \dfrac{16}{3} = \dfrac{16(\sqrt{4}-1)}{3} \cong 5'33\ u^2$.

Ejercicio 3, Opción B, Modelo 6 de 2012.

Considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ 2x + ky = 1 \\ y + 2z = k \end{cases}$.

(a) [1 punto] Clasifica el sistema según los valores del parámetro k.
(b) [0'75 puntos] Resuélvelo para k = 1.
(c) [0'75 puntos] Resuélvelo para k = -1.

Solución

(a)
Clasifica el sistema según los valores del parámetro k.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & k & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 2 & k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & k \end{pmatrix}$.

Si det(A) = |A| ≠ 0, rango(A) = rango(A) = 3 = nº de incógnitas. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.*

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & k & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera fila $= (0) - (1)(-2k) + (2)(k-2) = 2k + 2k - 4 = 4k - 4 \neq 0$,

Resolviendo la ecuación 4k - 4 = 0 = , obtenemos k = 1.

Si **k ≠ 1**, det(A) = |A| ≠ 0, rango(A) = rango(A*) = 3 = nº de incógnitas. **El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

(b)
Resuélvelo para k = 1.

Si **k = 1** tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, tenemos rango(A)=2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos columnas iguales, tenemos rango(A*) = 2. Como rango(A) = 2 = rango(A*) = 2, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Como el rango es 2, sólo necesitamos dos ecuaciones; la 2ª y la 3ª (con las que hemos formado el menor distinto de 0 de A).

2x + y = 1
y + 2z = 1. Tomando z = a ∈ R, tenemos y = 1 – 2a, con lo cual x = 1/2 -1/2 + 2a/2 = a.

La solución del sistema es (x,y,z) = (a, 1 – 2a, a) con a ∈ R.

(c)
Resuélvelo para el caso k = -1.

Ya hemos visto en el apartado (a) que si **k ≠ 1**, rango(A) = rango(A*) = 3. **El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

$\begin{array}{llll} x + y - z = 1 & x + y - z = 1 & x + y - z = 1 & x + y - z = 1 \\ 2x - y \;\;= 1.\text{ Cambio } F_2 \text{ por } F_3 & y+2z = -1 & y+2z = -1 & y+2z = -1 \\ y+2z = -1 & 2x - y \;\;= 1.\ F_3 + F_1(-2) & -3y+2z = -1.\ F_3 + F_2(-1) & -4y \;\;= 0, \text{ luego} \end{array}$

tenemos que y = 0, z = -1/2 y x = 1 - 1/2 = 1/2.

La solución del sistema es (x,y,z) = (1/2, 0, -1/2).

Ejercicio 4, Opción B, Modelo 6 de 2012.

Considera el punto P(1,0, 2) y la recta r dada por las ecuaciones $\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$

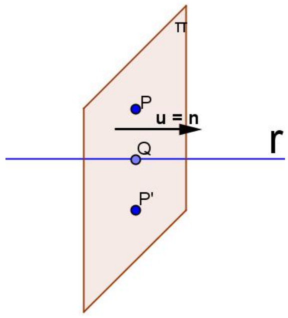
(a) [1 punto] Calcula la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r.

(b) [1'5 puntos] Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r.

Solución

Considera el punto P(1,0, 2) y la recta r dada por las ecuaciones $\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$

(a)
Calcula la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r.
Utilizamos un mismo dibujo para los dos apartados



El plano π que pasa por P y es perpenticular a la recta "r" tiene como vector normal **n** el vector director de la recta **v**. El plano tiene de ecuación $\pi \equiv$ **PX•n** = 0, donde • es el producto escalar y X es un punto generico del plano.
Un vector director **w** lo sacamos como producto vectorial (x) de los vectores normales que determinan dicha recta.

w = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ = **i**(-2) – **j**(4) + **k**(2) = (-2, -4, 2). Otro mas sencillo es **v** = (-1, -2, 1) = **n**

P(1,0, 2)
El plano pedido es $\pi \equiv$ **PX•n** = 0 = (x-1,y,z-2)•(-1, -2, 1) = -x+1-2y+z-2 = **-x-2y+z-1 = 0**
(b)
Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r.
Para calcular el punto simétrico de P respecto a la recta "r", calculamo el plano π que pasa por P y es perpenticular a la recta "r", ya calculado en el apartado (a) que es $\pi \equiv$ **-x-2y+z-1 = 0**
Calculamos el punto Q intersección perpendicular de la recta "r" con el plano π, y tenemo en cuenta que Q es el punto medio del segmento PP', siendo P' el simétrico buscado.
Q = $r \cap \pi$
Ponemos la recta en paramétricas, par lo cual necesitamos un punto A de ella $\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$.
Tomando y = 0, sale x = 2 y z = 4, El punto es A(2,0,4). Su vector director era **v** = (-1, -2, 1).
Un punto genérico "r" es (2-b, -2b, 4+b) con b $\in$ R.
Entramos en π $\rightarrow$ - (2-b) - 2(-2b) + (4+b) - 1 = 0 = b+4b+b-2+4-1 = 6b + 1 = 0, de donde b = -1/6 y el punto Q es Q(2 - (-1/6), -2(-1/6), 4 + (-1/6)) = Q(13/6, 2/6, 23/6)
Q es punto medio del segmento PP' π $\rightarrow$ (13/6, 2/6, 23/6) = ((1+x)/2, (0+y)/2, (2+z)/2). Igualando:
13/6 = (1+x)/2, de donde x = 13/3 – 1 = 10/3
2/6 = (0+y)/2, de donde z = 2/3 – 0 = 2/3
23/6 = (2+z)/2, de donde z = 23/3 – 2 = 17/3
El simétrico buscado es P'(10/3, 2/3, 17/3)