

**Opción A****Ejercicio 1 opción A, modelo 3 Septiembre 2013 específico 1**

Sea  $f$  la función definida por  $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$  para  $x > 0$ ,  $x \neq 1$  (donde  $\ln$  denota el logaritmo neperiano).

- a) [1'25 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de  $f$ .  
 b) [1'25 puntos] Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = e$ .

**Solución**

Sea  $f$  la función definida por  $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$  para  $x > 0$ ,  $x \neq 1$  (donde  $\ln$  denota el logaritmo neperiano).

- a)  
 Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de  $f$ .

[La regla de L'Hôpital (L'H) nos dice que si las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  son continuas y derivables en un entorno de "a",  $f(a) = g(a) = 0$  y existe  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . La regla se puede reiterar, y se puede aplicar si sale  $0/0$ ,  $\infty/\infty$ , y si el límite tiende a  $\infty$ ]

Asíntotas verticales (A.V.)

Como  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln(x)} = \frac{0}{-\infty} = 0 \cdot \frac{1}{-\infty} = 0 \cdot 0 = 0$ , la función  $f$  **no tiene A.V. en  $x = 0$** .

Como  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\ln(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ , la función  $f$  **tiene A.V. en  $x = 1$** .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\ln(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty,$$

Asíntotas horizontales (A.H.)

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = \left( \frac{\infty}{\infty}, L'H \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ , la función  $f$  **no tiene A.H. en  $+\infty$**

Asíntotas oblicuas (A.O.)

La función  $f$  tiene una A.O.  $y = mx + n$ , si  $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$  y  $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$

$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x \cdot \ln(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0$ , la función  $f$  **no tiene A.O. en  $+\infty$**

Como  $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ ,  $f$  tiene una rama parabólica.

b)

Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = e$ .

Recta tangente en  $x = e$  es  $y - f(e) = f'(e)(x - e)$

Recta normal en  $x = e$  es  $y - f(e) = (-1/f'(e)) \cdot (x - e)$

$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ , luego  $f(e) = e/1 = e$ .

$f'(x) = \frac{\ln(x) - x \cdot (1/x)}{(\ln(x))^2} = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}$ , luego  $f'(e) = (1 - 1)/e^2 = 0$ .

La recta tangente pedida es  $y - (e) = 0 \cdot (x - e)$ , de donde  $y = e$ .

La recta normal pedida es  $y - (e) = (-1/0) \cdot (x - e)$ , de donde  $x = e$ .

**Ejercicio 2 opción A, modelo 3 Septiembre 2013 específico 1**

[2'5 puntos] Sea  $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $g(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x}}$ .

Determina la primitiva de  $g$  cuya gráfica pasa por el punto  $P(1,0)$ . *Sugerencia:* se puede hacer el cambio de variable  $t = \sqrt{x}$ .

**Solución**

Una primitiva de  $g$  es  $I = G(x) = \int g(x) \cdot dx$

$I = G(x) = \int g(x) \cdot dx = \int \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$ . Nos dan el cambio  $t = \sqrt{x}$ , es decir  $t^2 = x$ , luego  $2t \cdot dt = dx$ , y sustituyendo

nos queda  $I = \int \frac{2t}{t^2 + t} dt$ , que es una integral racional.

$$I = \int \frac{2t}{t^2 + t} dt = \int \frac{2t}{t(t+1)} dt = \{\text{simplifico "t"}\} = \int \frac{2}{t+1} dt = 2 \cdot \ln|t+1| + K = \{\text{quito el cambio } t = \sqrt{x}\} = \\ = I = G(x) = 2 \cdot \ln|\sqrt{x} + 1| + K.$$

Como  $G(x)$  pasa por el punto  $(1,0)$ , tenemos  $G(1) = 0$ , es decir  $2 \cdot \ln|\sqrt{1} + 1| + K = 0$ , de donde obtenemos  $K = -2 \cdot \ln(2)$ , y nuestra primitiva es  $G(x) = 2 \cdot \ln|\sqrt{x} + 1| - 2 \cdot \ln(2)$

### Ejercicio 3 opción A, modelo 3 Septiembre 2013 específico 1

Sean  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & m & m-2 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

- a) [1'25 puntos] Determina el rango de A según los valores del parámetro m.  
 b) [0'75 puntos] Discute el sistema  $AX = B$  según los valores del parámetro m.  
 c) [0'5 puntos] Resuelve el sistema  $AX = B$  para  $m = 1$ .

#### Solución

Sean  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & m & m-2 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

a)

Determina el rango de A según los valores del parámetro m.

La matriz A es de orden  $3 \times 3$ , y sabemos que los vectores fila son linealmente independientes si sólo si (sii) el determinante ( $\det$  ó  $| \ |$ ) de la matriz M es distinto de cero, en cuyo caso el rango sería 3.

Calculamos el determinante desarrollando por el adjunto de la primera fila.

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & m & m-2 \\ m & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Ajustos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila} \end{array} = m \cdot (m-2+3m) - 0 + (2)(-2m+1) = 4m^2 - 2m - 4m + 2 = 4m^2 - 6m + 2.$$

Igualando a cero tenemos  $0 = 4m^2 - 6m + 2 = 2m^2 - 3m + 1$ , de donde  $m = 1$  y  $m = 1/2$ .

**Por tanto si  $m \neq 1$  y  $m \neq 1/2$ ,  $|A| \neq 0$  y  $\text{rango}(A) = 3$ .**

Si  $m = 1$  tenemos  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

En A como  $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1 \neq 0$ , tenemos **rango(A) = 2**.

Si  $m = 1/2$  tenemos  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1/2 & -3/2 \\ 1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

En A como  $\begin{vmatrix} -1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1/4 = -1/4 \neq 0$ , tenemos **rango(A) = 2**.

b)

Discute el sistema  $AX = B$  según los valores del parámetro m.

La matriz de los coeficientes es  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & m & m-2 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , y la matriz ampliada es  $A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & m & m-2 & 1 \\ m & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ , le

hemos añadido a la matriz A la matriz columna B.

Hemos visto en el apartado anterior:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & m & m-2 \\ m & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Ajuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila} \end{array} = m \cdot (m-2+3m) - 0 + (2)(-2m+1) = 4m^2 - 2m - 4m + 2 = 4m^2 - 6m + 2.$$

Igualando a cero tenemos  $0 = 4m^2 - 6m + 2 = 2m^2 - 3m + 1$ , de donde  $m = 1$  y  $m = 1/2$ .

**Por tanto si  $m \neq 1$  y  $m \neq 1/2$ ,  $|A| \neq 0$  y  $\text{rango}(A) = 3 = \text{rango}(A^*)$ , por tanto el sistema tiene solución única.**

$$\text{Si } m = 1 \text{ tenemos } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{En } A \text{ como } \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0, \text{ tenemos } \text{rango}(A) = 2.$$

$$\text{En } A^* \text{ como } \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ por tener dos columnas iguales tenemos } \text{rango}(A^*) = 2. \text{ Como } \text{rango}(A) =$$

**$= \text{rango}(A^*) = 2 < n^\circ$  de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

$$\text{Si } m = 1/2 \text{ tenemos } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1/2 & -3/2 \\ 1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ } A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1/2 & -3/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{En } A \text{ como } \begin{vmatrix} -1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1/4 = -1/4 \neq 0, \text{ tenemos } \text{rango}(A) = 2.$$

$$\text{En } A^* \text{ como } \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Ajuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila} \end{array} = (1/2)(1-1/2) = 1/4 \neq 0, \text{ tenemos } \text{rango}(A^*) = 3. \text{ Como } \text{rango}(A) = 2 \neq$$

**$\neq \text{rango}(A^*) = 3$ , el sistema es incompatible y no tiene solución.**

c)

Resuelve el sistema  $AX = B$  para  $m = 1$ .

Por el apartado anterior hemos visto que si  $m = 1$ ,  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < n^\circ$  de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.

Tomamos sólo dos ecuaciones, las dos últimas, que son con las que hemos formado el menor de  $A$  distinto de cero (nos fijamos en las dos últimas filas de la matriz ampliada  $A^*$ ).

$$-x + y - z = 1$$

$$x + 2z = 0. \text{ Hacemos } z = \lambda \in \mathbb{R}, \text{ con lo cual } x = -2\lambda \text{ e } y = 1 - 2\lambda + \lambda = 1 - \lambda.$$

**Solución del sistema  $(x,y,z) = (-2\lambda, 1 - \lambda, \lambda)$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$ .**

#### Ejercicio 4 opción A, modelo 3 Septiembre 2013 específico 1

Considera los puntos  $A(1,2,1)$ ,  $B(-1,0,2)$  y  $C(3,2,0)$  y el plano  $\pi$  determinado por ellos.

a) [1'75 puntos] Halla la ecuación de la recta  $r$  que está contenida en  $\pi$  y tal que  $A$  y  $B$  son simétricos respecto de  $r$ .

b) [0'75 puntos] Calcula la distancia de  $A$  a  $r$ .

#### Solución

Considera los puntos  $A(1,2,1)$ ,  $B(-1,0,2)$  y  $C(3,2,0)$  y el plano  $\pi$  determinado por ellos.

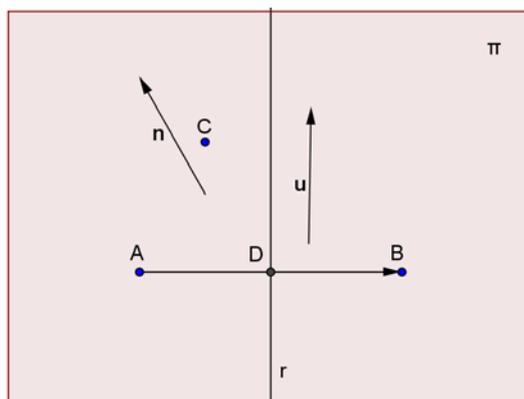
a)

Halla la ecuación de la recta  $r$  que está contenida en  $\pi$  y tal que  $A$  y  $B$  son simétricos respecto de  $r$ .

b)

Calcula la distancia de  $A$  a  $r$ .

Vamos a realizar un pequeño dibujo que nos servirá para los dos apartados.



Al ser A y B son simétricos respecto de r, su punto medio D pertenece a la recta "r",  $D(0, 1, 3/2)$ .

Al ser A y B son simétricos respecto de r, el vector director  $u$  de "r" es perpendicular ( $\perp$ ) al vector  $AB$ , por tanto  $u \bullet AB = 0$  ( $\bullet$  es el producto escalar).

Como la recta "r" está contenida en el plano " $\pi$ ", el vector director  $u$  de "r" es perpendicular ( $\perp$ ) al vector normal  $n$  del plano " $\pi$ ", por tanto  $u \bullet n = 0$ .

Al ser A y B son simétricos respecto de r, la distancia del punto A a la recta "r", es la mitad de la longitud del segmento AB.

" $\pi$ " es el plano determinado por los puntos A, B y C. Un vector normal es el producto vectorial ( $\times$ ) de los vectores  $AB = (-2, -2, 1)$  y  $AC = (2, 0, -1)$ .

$$n_1 = AB \times AC = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(2) - \vec{j}(0) + \vec{k}(4) = (2, 0, 4). \text{ Otro vector normal "}\pi\text{" de es } n = (1, 0, 2).$$

La recta "r" está determinada por el punto  $D(0, 1, 3/2)$  y el vector director  $u = (a, b, c)$ .

Como  $u \bullet AB = 0$ , tenemos  $(a, b, c) \bullet (-2, -2, 1) = 0 = -2a - 2b + c = 0$

Como  $u \bullet n = 0$ , tenemos  $(a, b, c) \bullet (1, 0, 2) = 0 = a + 0 + 2c = 0$ , de donde  $a = -2c$ . Entrando con este valor en la ecuación  $-2a - 2b + c = 0$ , tenemos  $-2(-2c) - 2b + c = 0$ , de donde  $b = 5c/2$ .

El vector director  $u$  de la recta "r" es  $u = (a, b, c) = (-2c, 5c/2, c)$ . Como hay infinitos vectores, tomo uno de ellos tomando  $c = 2$ , luego  $u = (-4, 5, 2)$ .

La recta "r" pedida, tiene de ecuación continua:  $r \equiv \frac{x}{-4} = \frac{y - 1}{5} = \frac{z - 3/2}{2}$ .

Ya he dicho que la distancia del punto A a la recta "r" es la mitad del segmento AB, luego:

$$d(A; r) = (||AB||)/2 = \frac{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}}{2} = \frac{\sqrt{9}}{2} = \frac{3}{2} \text{ u.l.}$$

## Opción B

### Ejercicio 1 opción B, modelo 3 Septiembre 2013 específico 1

Sea f la función definida por  $f(x) = \frac{k}{(x - a)(2x - 1)}$  para  $x \neq a$  y  $x \neq 1/2$ .

a) [1 punto] Halla a y k sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto (0,2) y que la recta  $x = 2$  es una asíntota de dicha gráfica.

b) [1'5 puntos] Para  $k = 4$  y  $a = 2$ , halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

### Solución

Sea f la función definida por  $f(x) = \frac{k}{(x - a)(2x - 1)}$  para  $x \neq a$  y  $x \neq 1/2$ .

a)

Halla a y k sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto (0,2) y que la recta  $x = 2$  es una asíntota de dicha gráfica.

Como f pasa por (0,2)  $\rightarrow f(0) = 2 \rightarrow \frac{k}{(-a)(-1)} = 2 \rightarrow k = 2a$ . Tenemos  $f(x) = \frac{2a}{(x - a)(2x - 1)}$

"La recta  $x = a$  es una asíntota vertical (A.V.) de f(x) si  $\lim_{x \rightarrow a^+} [f(x)] = \infty$ "

Las A.V. en cocientes de funciones polinómicas suelen ser los números que anulan el denominador, en este caso  $x = a$  y  $x = 1/2$ , por tanto  $a = 2$ , puesto que  $x = 2$  es una A.V. Veamos que el límite es infinito:

$$\text{Nuestra función sería } f(x) = \frac{2(2)}{(x-2)(2x-1)} = \frac{4}{(x-2)(2x-1)}$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4}{(x-2)(2x-1)} = \frac{4}{(0^+)(4-1)} = \frac{4}{0^+} = +\infty, \text{ la recta } x = 2 \text{ es una A.V. de } f$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4}{(x-2)(2x-1)} = \frac{4}{(0^-)(4-1)} = \frac{4}{0^-} = -\infty.$$

**Por tanto  $a = 2$  y  $k = 4$ .**

b)

Para  $k = 4$  y  $a = 2$ , halla los extremos relativos de  $f$  (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

Me están pidiendo la monotonía, que es el estudio de  $f'(x)$ , siendo  $f(x) = \frac{4}{(x-2)(2x-1)}$  para  $x \neq 2$  y  $x \neq 1/2$ .

$$f(x) = \frac{4}{(x-2)(2x-1)} = \frac{4}{2x^2 - 5x + 2}$$

$$f'(x) = \frac{0 - 4(4x-5)}{(2x^2 - 5x + 2)^2} = \frac{-16x + 20}{(2x^2 - 5x + 2)^2}$$

Si  $f'(x) = 0$ ; tenemos  $-16x + 20 = 0$ , de donde  $x = 20/16 = 5/4 = 1'25$ , que puede ser el extremo relativo.

Como  $f'(0) = \frac{20}{(+)} > 0$ ,  $f'(x) > 0$  en  $(-\infty, 1'25) - \{1/2\}$ , **luego  $f(x)$  es estrictamente creciente ( $\nearrow$ ) en  $(-\infty, 1'25) - \{1/2\}$ .**

Como  $f'(3) = \frac{-28}{(+)} < 0$ ,  $f'(x) < 0$  en  $(1'25, +\infty) - \{2\}$ , **luego  $f(x)$  es estrictamente decreciente ( $\searrow$ ) en  $(1'25, +\infty) - \{2\}$ .**

Por definición  $x = 5/4 = 1'25$  es un máximo relativo de  $f$  que vale  $f(5/4) = \frac{4}{(5/4-2)(2(5/4)-1)} = -39/2 \cong -3'56$

### Ejercicio 2 opción B, modelo 3 Septiembre 2013 específico 1

[2'5 puntos] Calcula  $\int_0^{\pi/2} x \cdot \text{sen}(2x) dx$ .

#### Solución

Calculamos primero la integral indefinida  $I = \int x \cdot \text{sen}(2x) \cdot dx$ , que es una integral por partes.

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Calculamos primero la integral indefinida.

$$I = \int x \cdot \text{sen}(2x) \cdot dx = \{ u = x \rightarrow du = dx; dv = \text{sen}(2x) \cdot dx \rightarrow v = \int \text{sen}(2x) \cdot dx = (-\cos(2x))/2 \} = x \cdot (-\cos(2x))/2 - \int (-\cos(2x))/2 \cdot dx = -(1/2) \cdot x \cdot \cos(2x) + (1/2) \int \cos(2x) \cdot dx = -(1/2) \cdot x \cdot \cos(2x) + (1/4) \cdot \text{sen}(2x) + K.$$

$$\text{Luego la integral pedida es } \int_0^{\pi/2} x \cdot \text{sen}(2x) \cdot dx = [ -(1/2) \cdot x \cdot \cos(2x) + (1/4) \cdot \text{sen}(2x) + K ]_0^{\pi/2} = ( -(1/2) \cdot (\pi/2) \cdot \cos(\pi) + (1/4) \cdot \text{sen}(\pi) + K ) - ( -(1/2) \cdot (0) \cdot \cos(0) + (1/4) \cdot \text{sen}(0) + K ) = -(1/2) \cdot (\pi/2) \cdot (-1) = \pi/4.$$

### Ejercicio 3 opción B, modelo 3 Septiembre 2013 específico 1

Sean A y B las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$ .

a) [1'25 puntos] Calcula las matrices X e Y para las que  $2X - Y = A$  y  $X - 3Y = B$ .

b) [1'25 puntos] Halla la matriz Z que verifica  $B^2 + ZA + B^t = 3I$  (I denota la matriz identidad y  $B^t$  la matriz traspuesta de B).

#### Solución

Sean A y B las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$ .

a)

Calcula las matrices X e Y para las que  $2X - Y = A$  y  $X - 3Y = B$ .

$$2X - Y = A \quad (F_1 - 2F_2) \rightarrow 5Y = A - 2B \rightarrow Y = (1/5) \cdot (A - 2B)$$

$$X - 3Y = B \rightarrow X - 3Y = B \rightarrow X = 3 \cdot ((1/5) \cdot (A - 2B)) + B = (3/5) \cdot (A - 2B) + B = (3/5)A - (6/5)B + B = (3/5)A - (1/5)B = (1/5) \cdot (3A - B).$$

Las matrices pedidas son:

$$X = (1/5) \cdot (3A - B) = (1/5) \cdot \left( 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} \right) = (1/5) \cdot \left( \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -9 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 9 & -5 \end{pmatrix} \right) = (1/5) \cdot \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Y = (1/5) \cdot (A - 2B) = (1/5) \cdot \left( \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} \right) = (1/5) \cdot \left( \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 18 & -10 \end{pmatrix} \right) = (1/5) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 15 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

b)

Halla la matriz Z que verifica  $B^2 + ZA + B^t = 3I$  (I denota la matriz identidad y  $B^t$  la matriz traspuesta de B).

La matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$  tiene matriz inversa  $A^{-1}$ , porque  $\det(A) = |A| = 10 - 9 = 1 \neq 0$ .

Sabemos que  $A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t)$ .

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}; \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \text{luego } A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

De la expresión  $B^2 + ZA + B^t = 3I$ , tenemos  $ZA = 3I - B^2 - B^t$ . Multiplicando los dos miembros de la igualdad  $ZA = 3I - B^2 - B^t$  por la inversa  $A^{-1}$  por la derecha tenemos:

$$ZAA^{-1} = (3I - B^2 - B^t)A^{-1}, \text{ de donde } Z = (3I - B^2 - B^t)A^{-1}.$$

$$Z = (3I - B^2 - B^t)A^{-1} = \left( 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 37 & -24 \\ -54 & 61 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 & 33 \\ 58 & -63 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -76 & -39 \\ 101 & 48 \end{pmatrix}.$$

#### Ejercicio 4 opción B, modelo 3 Septiembre 2013 específico 1

Considera las rectas r y s dadas por  $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$  y  $s \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z - 5 = 0 \end{cases}$

a) [1 punto] Determina la posición relativa de r y s.

b) [1'5 puntos] Calcula la distancia entre r y s.

#### Solución

Considera las rectas r y s dadas por  $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$  y  $s \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z - 5 = 0 \end{cases}$

a)

Determina la posición relativa de r y s.

Ponemos la recta "s" en paramétricas tomando  $y = \mu \in \mathbb{R}$ , luego  $s \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = \mu \\ z = 5 \end{cases}$

Un punto de "r" es  $A(2,3,0)$ , y un vector director es  $\mathbf{u} = (-3,5,1)$ .

Un punto de "s" es  $B(1,0,5)$ , y un vector director es  $\mathbf{v} = (-1,1,0)$ .

Observamos que los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  no son proporcionales, por tanto las rectas se cortan o se cruzan.

$$\mathbf{AB} = (-1, -3, 5)$$

Si  $\det(\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ , las rectas se cortan.

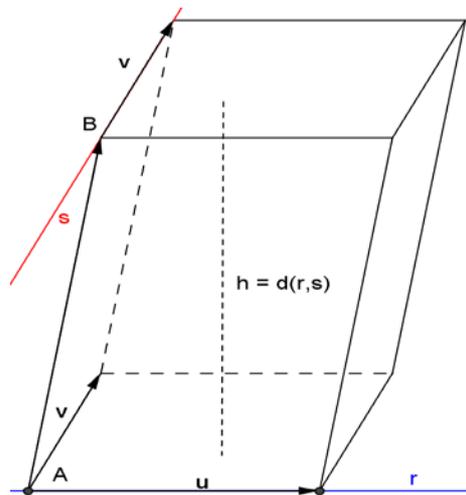
Si  $\det(\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 0$ , las rectas se cruzan.

Como  $\det(\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$  Adjuntos tercera =  $(-1)(-28) - (1)(14) = 14 \neq 0$ , luego las rectas se cruzan.

b)

Calcula la distancia entre r y s.

Antes de resolver el problema, haremos un pequeño dibujo, y de cada recta tomaremos un punto y un vector director.



De la recta "r" tomamos el punto  $A(2,3,0)$  y como vector director el  $\mathbf{u} = (-3,5,1)$ .  
 De la recta "s" tomamos el punto  $B(1,0,5)$  y como vector director el  $\mathbf{v} = (-1,1,0)$ .  
 Para el punto A de "r" tomamos  $y = 0$ , de donde  $x = 2$  y  $z = 4$ , luego  $A(2,0,4)$

Sabemos que el volumen del paralelepípedo es el valor absoluto ( $|$ ) del producto mixto de tres vectores con origen común ( $[\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}]$ ), pero también es el área de la base (área de un paralelogramo, que es el módulo del producto vectorial de los vectores que lo determinan  $\|\mathbf{uxv}\|$ ) por la altura ( $h$ ), que es la distancia entre las rectas, es decir:

Volumen del paralelepípedo =  $[\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}] = \text{área base} \cdot h = \|\mathbf{uxv}\| \cdot d(\text{OX}, r)$ , de donde la distancia entre las rectas es " $d(\text{OX}, r) = |([\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}]) / (\|\mathbf{uxv}\|)|$ "

$\mathbf{AB} = (6,0,0)$ ;  $\mathbf{u} = (-3,5,1)$ ,  $\mathbf{v} = (-1,1,0)$ .

Ya hemos calculado, en el apartado a),  $[\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}] = \det(\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 14$ .

$\mathbf{uxv} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1) - \vec{j}(1) + \vec{k}(2) = (-1, -1, 2)$ , de donde  $\|\mathbf{uxv}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$ .

La distancia pedida es  $d(\text{OX}, r) = |([\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}]) / (\|\mathbf{uxv}\|)| = \frac{14}{\sqrt{6}} = \frac{14\sqrt{6}}{6} = \frac{7\sqrt{6}}{3} \cong 5,715 \text{ u.l.}$