Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 2 del 2015

Sea *f* la función definida por $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$ para $x \neq 1$.

a) [1 punto] Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de *f*.

b) [1'5 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) de *f*.

Solución

Sea *f* la función definida por $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$ para $x \neq 1$.

a)

Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de *f*.

Como $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{e^x}{x-1} = \dfrac{e^1}{0^+} = +\infty$, **x = 1 es una asíntota vertical de la gráfica de *f*.**

$\lim_{x\to 1^-} \dfrac{e^x}{x-1} = \dfrac{e^1}{0^-} = -\infty$

Como $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \dfrac{e^x}{x-1} = \dfrac{e^{-\infty}}{-\infty} = \dfrac{1}{-\infty\cdot(e^{+\infty})} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$, la recta y = 0 es una asíntota horizontal (A.H.) **de la gráfica de *f* en -∞.**

Como $\lim_{x\to -\infty} (f(x) - 0) = 0^-$, la gráfica de f está por debajo de y = 0 en recta y = 0 en -∞.

Al tener A.H., no tiene asíntota oblicua (A.O.) en -∞.

Regla de L'Hôpital (L'H): Si $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$ y existe $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. La regla sigue también para $\dfrac{\infty}{\infty}$, y cuando $x \to \infty$.

Como $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x-1} = \left\{\dfrac{\infty}{\infty}; \text{L'H}\right\} = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{1} = +\infty$, f no tiene A.H. en +∞.

Tampoco tiene A.O. y = mx + n en +∞, porque $m = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2 - x} = +\infty$, al aplicar dos veces la regla de L'Hôpital.

b)

Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) de *f*.

Me piden la monotonía. Estudio de f '(x)

$f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$; $f'(x) = \dfrac{e^x\cdot(x-1) - e^x\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{e^x\cdot(x-2)}{(x-1)^2}$

De f'(x) = 0, tenemos $e^x\cdot(x-2) = 0$. Como e^x no se anula nunca resulta que x - 2 = 0, de donde x = 2, que es el posible extremo relativo.

Como $f'(0) = \dfrac{e^0}{1} < 0$, **f es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en (-∞,2) – {1}.**

Como $f'(3) = \dfrac{e^3}{2} > 0$, **f es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (2,+∞).**

Por definición **x = 2 es un mínimo relativo y vale** $\mathbf{f(2) = \dfrac{e^2}{1} = e^2}$.

Ejercicio 2 opción A, modelo 2 del 2015

Sea *f* la función definida por $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{2x}$ para x > 0 (ln denota la función logaritmo neperiano) y sea *F* la primitiva de f tal que F(1) = 2.

a) [0'5 puntos] Calcula F '(e).

b) [2 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *F* en el punto de abscisa x = e.

Solución

Sea *f* la función definida por $f(x) = \frac{\ln(x)}{2x}$ para x > 0 (ln denota la función logaritmo neperiano) y sea *F* la primitiva de f tal que F(1) = 2.

a)

Calcula F '(e).

Como F(x) es una primitiva de f(x) entonces $F(x) = \int f(x)dx$ y además F '(x) = f(x), luego

$F'(e) = f(e) = \frac{\ln(e)}{2e} = \frac{1}{2e}$.

b)

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *F* en el punto de abscisa x = e.

La recta tangente a la gráfica de *F* en x = e es: **y – F(e) = F '(e)·(x – e).**

Para calcular F(e) tenemos que calcular primero $F(x) = \int f(x)dx$.

$$F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{\ln(x)}{2x}dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \ln(x) = t \;\rightarrow\; \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right\} = F(t) = \int \frac{tdt}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2} + K = \left\{ \begin{array}{c} \text{Quito cambio} \\ \ln(x) = t \end{array} \right\} = \frac{(\ln(x))^2}{4} + K = F(x).$$

Como F(1) = 2 $\rightarrow \frac{(\ln(1))^2}{4} + K = 2$, de donde K = 2 y $F(x) = \frac{(\ln(x))^2}{4} + 2$.

Ya podemos calcular $F(e) = \frac{(\ln(e))^2}{4} + 2 = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$.

La recta tangente a la gráfica de *F* en x = e es: $y - \frac{9}{4} = \frac{1}{2e}\cdot(x - e)$.

Ejercicio 3 opción A, modelo 2 del 2015

Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{l} \alpha x + y + 3z = 4 \\ x + y - 2z = -2 \\ -x + 2y + (3 + \alpha)z = 4 + \alpha \end{array}$$

a) [1'25 puntos] Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema dado tiene solución única.

b) [1'25 puntos] Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema dado tiene al menos dos soluciones. Halla todas las soluciones en dichos casos.

Solución

a)

Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema dado tiene solución única.

El sistema tiene solución única si rango(A) = rango(A*) = 3 = número de incógnitas,

con lo cual det(A) = |A| ≠ 0, siendo $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3+\alpha \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada es

$A^* = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 3+\alpha & 4+\alpha \end{pmatrix}$.

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3+\alpha \end{vmatrix}_{F_3 + F_2} = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1+\alpha \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{array} = \alpha(1+\alpha+6) - 1(1+\alpha-9) + 0 =$$

$= \alpha^2 + 6\alpha + 8$.

De |A| = 0 tenemos $\alpha^2 + 6\alpha + 8 = 0$, y tiene de soluciones α = -2 y α = -4.

Si **α ≠ -2** y **α ≠ -4**, det(A) ≠ 0 con lo cual rango(A) = rango(A*) = 3 = número de incógnitas, y **el sistema tiene solución única.**

b)

Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema dado tiene al menos dos soluciones. Halla todas las soluciones en dichos casos.

Si el sistema tiene dos soluciones, tiene infinitas, por tanto es un sistema compatible e indeterminado, que se presenta si rango(A) = rango(A) < 3 = número de incógnitas.*

Estudiamos los rangos de A y A* para $\alpha = -2$ y $\alpha = -4$

Si $\alpha = -2$, $A = \begin{pmatrix}-2&1&3\\1&1&-2\\-1&2&1\end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix}-2&1&3&4\\1&1&-2&-2\\-1&2&1&2\end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix}-2&1\\1&1\end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0$, rango(A) = 2

En A* como $\begin{vmatrix}-2&1&4\\1&1&-2\\-1&2&2\end{vmatrix}_{F_3+F_2} = \begin{vmatrix}-2&1&4\\1&1&-2\\0&3&0\end{vmatrix}$ Adjuntos tercera fila $= 0 - 3(4 - 4) + 0 = 0$, rango(A*) = 2.

Como **rango(A) = rango(A*) = 2 < número de incógnitas, el sistema tiene más de una solución**. Lo resolvemos.

Como *el rango es dos tomamos sólo dos ecuaciones, las dos primeras que son con las que he formado el menor de orden dos distinto de cero*.

$-2x + y + 3z = 4 \quad \rightarrow \quad -2x + y + 3z = 4$

$x + y - 2z = -2$. $E_2 - E_1 \rightarrow \quad 3x - 5z = -6$. Tomo $z = \lambda \in R$, con lo cual $x = -2 + (5/3)\lambda$.

De $-2(-2 + (5\lambda)/3) + y + 3(\lambda) = 4 \rightarrow y = 4 - 4 + (10\lambda)/3 - 3\lambda = 0 + \lambda/3 = \lambda/3$, de donde **la solución del sistema es $(x,y,z) = (-2 + (5\lambda)/3, \lambda/3, \lambda)$ con $\lambda \in R$.**

Si $\alpha = -4$, $A = \begin{pmatrix}-4&1&3\\1&1&-2\\-1&2&-1\end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix}-4&1&3&4\\1&1&-2&-2\\-1&2&-1&0\end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix}-4&1\\1&1\end{vmatrix} = -4 - 1 = -5 \neq 0$, rango(A) = 2

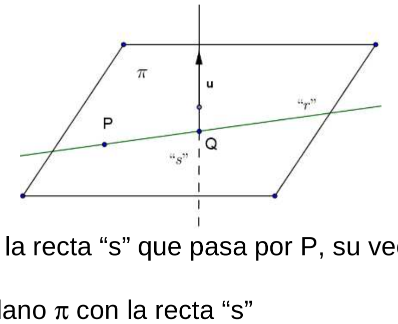
En A* como $\begin{vmatrix}-4&1&4\\1&1&-2\\-1&2&0\end{vmatrix}_{F_1+2F_2} = \begin{vmatrix}-2&3&0\\1&1&-2\\-1&2&0\end{vmatrix}$ Adjuntos tercera columna $= 0 -(-2)(-4 + 3) + 0 = -2 \neq 0$, rango(A*) = 3.

Como **rango(A) = 2 $\neq$ rango(A*) = 3, el sistema es incompatible y no tiene ninguna solución**.

Ejercicio 4 opción A, modelo 2 del 2015

[2'5 puntos] Halla unas ecuaciones paramétricas para la recta r, que contiene al punto P(3,-5,4) y corta perpendicularmente a la recta $s \equiv \frac{x-4}{5} = \frac{y-8}{-3} = \frac{z}{4}$.

Solución



Formamos el plano π perpendicular a la recta "s" que pasa por P, su vector normal **n** es el director de la recta el **u**

Calculamos el punto Q de corte del plano π con la recta "s"

La recta "r" pedida es la que pasa por los puntos P y Q. Punto el P, vector el **PQ**.

De $s \equiv \frac{x-4}{5} = \frac{y-8}{-3} = \frac{z}{4}$, tenemos el punto A(4,8,0) y el vector **u** = (5,-3,4).

$\pi \equiv$ **PX•u** = 0, siendo X un punto genérico del plano y • el producto escalar.

$\pi \equiv$ **PX•u** $= 0 = (x-3,y+5,z-4)\bullet(5,-3,4) = 5x - 3y + 4z - 46 = 0$.

$Q = s \cap \pi$

Ponemos "s" en vectorial y la sustituimos en el plano.

De $s \equiv (x,y,z) = (4,8,0) + \lambda(5,-3,4) = (4+5\lambda, 8-3\lambda, 4\lambda)$ con $\lambda \in R$. Entramos en π.

$5(4+5\lambda) - 3(8-3\lambda) + 4(4\lambda) - 46 = 0 = 50\lambda - 50 = 0$, de donde $\lambda = 1$, y el punto Q buscado es $Q(4+5(1),8-3(1),4(1)) = Q(9,5,4)$

El vector **PQ** = (9-3,5+5,4-4) = (6,10,0).

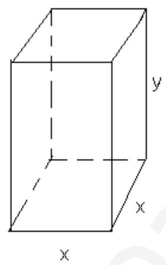
La recta "r"(P;**PQ**) en paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 3+6\mu \\ y = -5+10\mu \\ z = 4 \end{cases}$ con $\mu \in R$.

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 2 del 2015

[2'5 puntos] Queremos fabricar una caja con base cuadrada, de tal manera que la altura de la caja más el perímetro de la base sumen 60 cm. Determina sus dimensiones para que contenga el mayor volumen posible.

Solución



Función a Optimizar: Volumen = V = área base x altura = x^2y

Relación entre las variables: la altura de la caja más el perímetro de la base sumen 60 cm $\rightarrow$ 4x + y = 60, de donde y = 60 – 4x.

Sabemos que si g '(a) = 0 y g ''(a) < 0, x = a es un máximo relativo de g(x)

Sabemos que si g '(a) = 0 y g ''(a) > 0, x = a es un mínimo relativo de g(x)

$V(x) = x^2y = x^2(60 - 4x) = 60x^2 - 4x^3$.

$V'(x) = 120x - 12x^2$

De V '(x) = 0, tenemos $120x - 12x^2 = x\cdot(120 - 12x) = 0$, de donde *x = 0* (*solución no válida*), y $120 - 12x = 0 \rightarrow$ **x = 10**.

$V''(x) = 120 - 24x$

Como V ''(10) = 120 – 24(10) = -120 > 0, **x = 10 es un máximo relativo**.

De x = 10, tenemos y = 60 – 4(10) = 20 m, **luego las dimensiones del depósito son x = 10 cm. e y = 20 cm.**

Ejercicio 2 opción B, modelo 2 del 2015

Sean f : $[0,\infty) \rightarrow R$ y g : $R \rightarrow R$ las funciones definidas por $f(x) = \sqrt{2x}$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^2$.

a) [0'75 puntos] Halla los puntos de corte de las gráficas de f y g. Haz un esbozo del recinto que limitan.

b) [1'75 puntos] Calcula el área de dicho recinto.

Solución

Sean f : $[0,\infty) \rightarrow R$ y g : $R \rightarrow R$ las funciones definidas por $f(x) = \sqrt{2x}$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^2$.

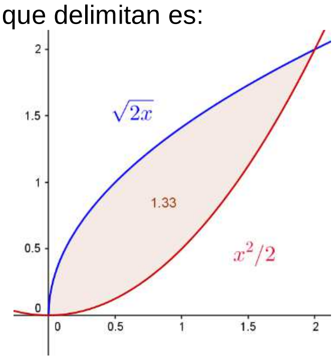
a)

Halla los puntos de corte de las gráficas de f y g. Haz un esbozo del recinto que limitan.

Los corte los calculamos resolviendo la ecuación f(x) = g(x), es decir $\sqrt{2x} = \frac{1}{2}x^2$. Elevando al cuadrado tenemos $2x = x^4/4 \rightarrow 2x - x^4/4 = 0 = x(2 - x^3/4) = 0$, de donde x = 0 y $x^3/4 = 2 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$, por tanto las gráficas se cortan en los puntos (0,0) y (2,2).

La gráfica de $f(x) = x^2/2$ es parecida a la de x^2 (vértice (0,0), ramas hacia arriba), pero un poco más abierta pues para x = 2 vale 2.
La gráfica de $g(x) = \sqrt{2x}$ es parecida a la de $\sqrt{x}$ (también es una parábola, pero horizontal en este caso), pero un poco más alargada pues para x = 2 vale 2.

Un esbozo de sus gráficas y del recinto que delimitan es:



(b)
Calcula el área de dicho recinto.

Área = $\int_0^2 [(\sqrt{2x}) - (x^2/2)]dx = \int_0^2 [(\sqrt{2}\, x^{1/2}) - (x^2/2)]dx = [\sqrt{2}\, x^{1/2+1}/(1/2+1) - x^3/6\,]_0^2 =$

$= [\frac{2\sqrt{2x^3}}{3} - x^3/6]_0^2 = \frac{2\sqrt{16}}{3} - \frac{8}{6} = \frac{8}{3} - \frac{8}{6} = \frac{4}{3}\ u^2 \cong$ **1'33 u²**.

Ejercicio 3 opción B, modelo 2 del 2015

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

a) [1 punto] Halla el determinante de una matriz X que verifique la igualdad $X^2AX = B$.
b) [1'5 puntos] Determina, si existe, la matriz Y que verifica la igualdad $A^2YB^{-1} = A$.

Solución

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

a)
Halla el determinante de una matriz X que verifique la igualdad $X^2AX = B$.

Sabemos que $\det(X^2) = \det(X)\cdot\det(X) = (\det(X))^2 = (|X|)^2$.
$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1$. $\det(B) = |B| = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 4 = 8$.
De $\det(X^2AX) = \det(B) \rightarrow \det(X^2)\cdot\det(A)\cdot\det(X) = \det(B) \rightarrow (|X|)^2\cdot(-1)\cdot|X| = 8$, tenemos $(|X|)^3 = -8$, luego **$\det(X) = |X| = \sqrt[3]{-8} = -2$.**
b)
Determina, si existe, la matriz Y que verifica la igualdad $A^2YB^{-1} = A$.
Como $|A| = -1 \neq 0$, existe su matriz inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$.
Multiplicamos la expresión $A^2YB^{-1} = A$, por la izquierda por $(A^{-1})^2$ y por la derecha por B $\rightarrow$ $A^{-1}\cdot A^{-1}\cdot A\cdot AYB^{-1}B = A^{-1}\cdot A^{-1}\cdot AB \rightarrow A^{-1}\cdot I\cdot AY\cdot I = A^{-1}\cdot IB \rightarrow I\cdot Y = A^{-1}\cdot B$, de donde
$Y = A^{-1}\cdot B$
$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $|A| = -1$; $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; luego
$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t) = (1/-1)\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
$Y = A^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4 opción B, modelo 2 del 2015

Sea r la recta de ecuación $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{4} = z$.

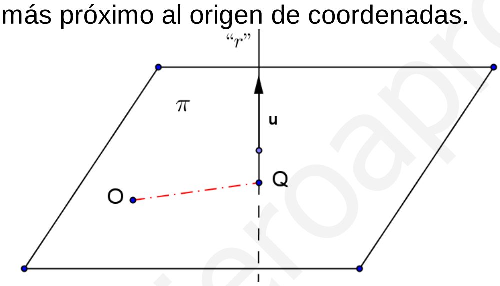
a) [1'5 puntos] Halla el punto de r que equidista del origen de coordenadas y del punto P(4,−2,2).
b) [1 punto] Determina el punto de la recta r más próximo al origen de coordenadas.

Solución

Sea r la recta de ecuación $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{4} = z$.

a)
Halla el punto de r que equidista del origen de coordenadas y del punto P(4,−2,2).

De "r" tenemos el punto A(-2,-1,0) y el vector director **u** = (3,4,1).
Un punto genérico de "r" es X(x,y,z) = X(-2+3b,-1+4b,b) con b $\in$ R.
Como X equidista del origen de coordenadas y del punto P(4,−2,2), tenemos
d(O,X) = d(P,X) $\rightarrow$ ||**OX**|| = ||**PX**||.
OX = (-2+3b,-1+4b,b) $\rightarrow$ ||**OX**|| = $\sqrt{(-2+3b)^2 + (-1+4b)^2 + (b)^2}$
PX = (-2+3b-4,-1+4b+2,b-2) $\rightarrow$ ||**PX**|| = $\sqrt{(-6+3b)^2 + (1+4b)^2 + (-2+b)^2}$
Igualando y elevando al cuadrado tenemos:
$(-2+3b)^2 + (-1+4b)^2 + b^2 = (-6+3b)^2 + (1+4b)^2 + (-2+b)^2$. Desarrollando
$(4-12b+9b^2) + (1-8b+16b^2) + b^2 = (36-36b+9b^2) + (1+8b+16b^2) + (4-4b+b^2)$, de donde
12b – 36 = 0 $\rightarrow$ b = 36/12 = 3, y **el punto pedido es** X(-2+3(3),-1+4(3),(3)) = **X(7,11,3).**
b)
Determina el punto de la recta r más próximo al origen de coordenadas.



De "r" tenemos el punto A(-2,-1,0) y el vector director **u** = (3,4,1).

Formamos el plano π perpendicular a la recta "r" que pasa por el origen O, su vector normal **n** es el director de la recta el **u** = (3,4,1)**.**

Calculamos *el punto Q de corte del plano π con la recta "r", que es el más próximo al origen* porque el segmento OQ es perpendicular a la recta "r" y su módulo es la distancia.

π ≡ **OX•u** = 0, siendo X un punto genérico del plano y • el producto escalar.
π ≡ **OX•u** = 0 = (x,y,z)•(3,4,1) = 3x + 4y + z = 0.
Q = r∩π
Un punto genérico de "r" es X(x,y,z) = X(-2+3b,-1+4b,b) con b $\in$ R. Entramos en π.
3(-2+3b) + 4(-1+4b) + (b) = 0 = 26b - 10 = 0, de donde b = 10/26 = 5/13, **y el punto Q buscado es** Q(-2+3(5/13),-1+4(5/13),(5/13)) = **Q(-11/13,7/13,5/13).**