

Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 6 del 2015

Halla a y b sabiendo que es continua la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x + \cos(x) - ae^x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ b & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Solución

Como me dicen que f es continua en \mathbb{R} , lo es en $x = 0$, por tanto al ser es continua en $x = 0$, tenemos $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

$$f(0) = b. \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \cos(x) - ae^x}{x^2} = \frac{0 + \cos(0) - a \cdot e^0}{(0)^2} = \frac{1 - a}{0}$$

Como me dicen que el límite existe, al ser es continua en $x = 0$, y es finito **el numerador ha de ser cero**, para poder seguir aplicándole la regla de L'Hôpital, es decir $1 - a = 0$, de donde **$a = 1$** .

Le aplicamos la regla de L'Hôpital (L'H) (si " f " y " g " son funciones continuas en

$[a - \delta, a + \delta]$, derivables en $(a - \delta, a + \delta)$, verificando que $f(a) = g(a) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$,

entonces si existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. La regla es válida si

tenemos ∞/∞ , y también si $x \rightarrow \infty$, con lo cual tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \cos(x) - 1 \cdot e^x}{x^2} &= \left\{ \frac{0}{0}; \text{L'H} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin(x) - e^x}{2x} = \left\{ \frac{1 - \sin(0) - e^0}{2 \cdot (0)} = \frac{0}{0}; \text{L'H} \right\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos(x) - e^x}{2} = \frac{-\cos(0) - e^0}{2} = \frac{-1 - 1}{2} = -1. \end{aligned}$$

Como $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, resulta que **$b = -1$** .

Los valores pedidos son $a = 1$ y $b = -1$.

Ejercicio 2 opción A, modelo 6 del 2015 (Ejercicio 2B, modelo 4 de 2013)

Sea f la función definida por $f(x) = |\ln(x)|$ para $x > 0$ (\ln denota la función logaritmo neperiano).

a) [0'5 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = 1$.

b) [0'5 puntos] Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con la recta $y = 1$.

c) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto citado.

Solución

Sea f la función definida por $f(x) = |\ln(x)|$ para $x > 0$ (\ln denota la función logaritmo neperiano).

a)

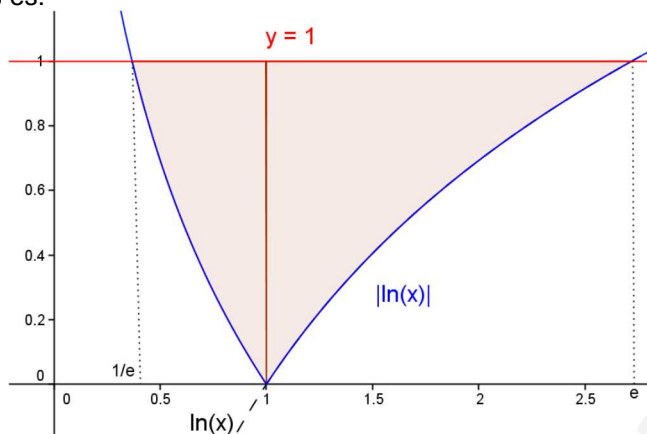
Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = 1$.

$$f(x) = |\ln(x)| = \begin{cases} -\ln(x) & \text{si } \ln(x) < 0 \\ \ln(x) & \text{si } \ln(x) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -\ln(x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ \ln(x) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}, \text{ pues de } \ln(x) = 0, x = e^0 = 1$$

Sabemos que la gráfica de $|\ln(x)|$ es exactamente igual que la de " $\ln(x)$ para $\ln(x) > 0$ (la parte de la gráfica que está por encima del eje OX, en este caso para $x \geq 1$ porque $\ln(1) = 0$), y simétrica respecto al eje OX cuando $\ln(x) < 0$ (la parte de la gráfica que esta por debajo del eje OX, en este caso para $x < 1$).

Además sabemos que $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$, $\ln(x)$ es estrictamente creciente y que $x = 0^+$ es asíntota vertical porque $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = \ln(0^+) = -\infty$. Además $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = \ln(+\infty) = +\infty$.

La recta $y = 1$ es una recta horizontal. Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de las gráficas pedidas es:



b)

Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con la recta $y = 1$.

Los cortes entre ellas salen de resolver la ecuación $|\ln(x)| = 1$, que son dos ecuaciones: $\ln(x) = 1$, de donde $x = e^1 = e$ (por recíproca) y $-\ln(x) = 1 \rightarrow \ln(x) = -1$, de donde $x = e^{-1} = 1/e$. **Los puntos de corte pedidos son $(1/e, 1)$ y $(e, 1)$.**

b)

Calcula el área del recinto anterior.

$$\text{Área} = \int_{1/e}^1 (1 - (-\ln(x)))dx + \int_1^e (1 - (\ln(x)))dx = \int_{1/e}^1 (1 + \ln(x))dx + \int_1^e (1 - (\ln(x)))dx = \{++\}$$

Recordamos que $\int \ln(x)dx = x \cdot \ln(x) - x$, pues es una integral por partes $\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$. $\int \ln(x)dx = \{ u = \ln(x) \rightarrow du = dx/x; dv = x \rightarrow v = \int dx = x \} = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot dx/x = x \cdot \ln(x) - \int dx = x \cdot \ln(x) - x$.

$$\begin{aligned} \{++\} &= [x + x \cdot \ln(x) - x]_{1/e}^1 + [x - x \cdot \ln(x) + x]_{1/e}^e = [(1 \cdot \ln(1)) - ((1/e) \cdot \ln(1/e))] + [(2e) - e \cdot \ln(e)] \\ &- (2(1) - 1 \cdot \ln(1)) = \\ &= 0 - ((1/e) \cdot (-1)) + 2e - e \cdot (1) - 2 + 0 = e + 1/e - 2 \cong 0'3504 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

Ejercicio 3 opción A, modelo 6 del 2015

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-m & 0 \end{pmatrix}$.

a) [1'75 puntos] Halla el valor, o valores, de m para los que la matriz A tiene rango 2.

b) [0'75 puntos] Para $m = 1$, determina A^{2015} .

Solución

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-m & 0 \end{pmatrix}$.

a)

Halla el valor, o valores, de m para los que la matriz A tiene rango 2.

El rango de A es 2 si A tiene dos filas linealmente independientes, por lo cual su determinante $\det(A) = |A| = 0$.

Después estudiaremos los rangos de A según los valores de "m".

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-m & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{array} = 0 - (m-1) \cdot (0 - m(1-m)) + 0 = m(1-m)^2.$$

De $|A| = 0 \rightarrow m(1-m)^2 = 0$, que tiene por soluciones $m = 0$ y $m = 1$ (doble).

Si $m = 0$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. En A como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1 \neq 0$, **rango(A) = 2**.

Si $m = 1$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2 \neq 0$, **rango(A) = 2**.

b)

Para $m = 1$, determina A^{2015} .

Si $m = 1$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$, matriz nula de orden 3.

$A^4 = O_3 \cdot A = O_3$, etc ...

Luego $A^{2015} = A^{2014} \cdot A = O_3 \cdot A = O_3$. Es decir **A^{2015} , es la matriz nula de orden 3.**

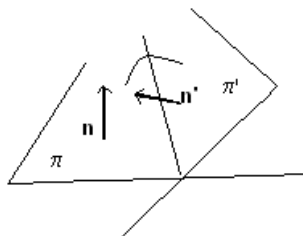
Ejercicio 4 opción A, modelo 6 del 2015

Sean los planos $\pi \equiv x + 3y + 2z - 5 = 0$ y $\pi' \equiv -2x + y + 3z + 3 = 0$.

a) [1'5 puntos] Determina el ángulo que forman π y π' .

b) [1 punto] Calcula el volumen del tetraedro limitado por π y los planos coordenados.

Solución



Sean los planos $\pi \equiv x + 3y + 2z - 5 = 0$ y $\pi' \equiv -2x + y + 3z + 3 = 0$.

a)

Determina el ángulo que forman π y π' .

Sabemos que el *ángulo que forman dos planos* $\pi(\mathbf{n})$ y $\pi'(\mathbf{n}')$ es el menor de los ángulos que determinan sus diedros, el cual coincide con el menor de los ángulos que forman sus vectores normales con un origen común, es decir $\cos(\langle \pi, \pi' \rangle) = |\cos(\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}' \rangle)|$

De $\pi \equiv x + 3y + 2z - 5 = 0$, tenemos $\mathbf{n} = (1, 3, 2)$.

De $\pi' \equiv -2x + y + 3z + 3 = 0$, tenemos $\mathbf{n}' = (-2, 1, 3)$

$$\cos(\alpha) = \cos(\langle \pi, \pi' \rangle) = |\cos(\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}' \rangle)| = \left| \frac{\vec{n} \cdot \vec{n}'}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{n}'\|} \right| = 7 / (\sqrt{14})^2 = 7/14 = 1/2, \text{ por tanto el}$$

ángulo que forman los planos es $\alpha = \arccos(1/2) = 60^\circ$.

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = -2 + 3 + 6 = 7 \rightarrow |\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'| = |7| =$$

$$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

$$\|\mathbf{n}'\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

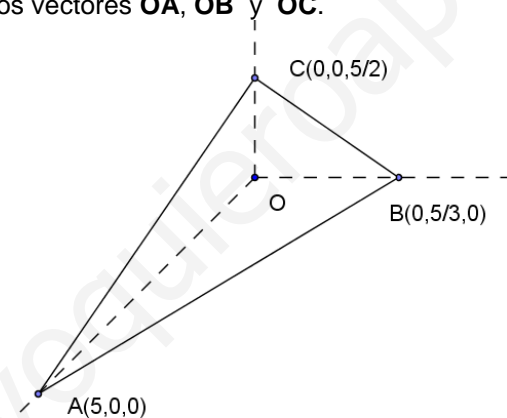
b)

Calcula el volumen del tetraedro limitado por π y los planos coordenados.

Sabemos que si ponemos el plano $\pi \equiv x + 3y + 2z - 5 = 0$, en forma segmentaria $x/a + y/b + z/c = 1$, los puntos $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ y $C(0,0,c)$ son los puntos de corte del plano con los ejes coordenados.

De $x + 3y + 2z = 5 \rightarrow x/5 + (3y)/5 + (2z)/5 = 1 \rightarrow \frac{x}{5} + \frac{y}{5/3} + \frac{z}{5/2} = 1$, luego los puntos de corte con los ejes coordenados son $A(5,0,0)$, $B(0,5/3,0)$ y $C(0,0,5/2)$.

Sabemos que el volumen de un tetraedro es 1/6 del volumen del paralelepípedo que determinan dichos vectores, el cual es el valor absoluto (lo notaremos $||$) del producto mixto (lo notaremos con corchetes $[]$) de tres vectores con un mismo origen, en nuestro caso utilizaremos los vectores \mathbf{OA} , \mathbf{OB} y \mathbf{OC} .



$$\mathbf{OA} = (5,0,0), \mathbf{OB} = (0,5/3,0) \text{ y } \mathbf{OC} = (0,0,5/2)$$

$$\text{Volumen} = (1/6) \cdot |[\mathbf{OA}, \mathbf{OB}, \mathbf{OC}]| = (1/6) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{vmatrix} = (1/6) \cdot (5) \cdot (5/3) \cdot (5/2) =$$

$$= 5^3 u^3 = 125 u^3.$$

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 6 del 2015

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}$.

a) [1 punto] Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de f .

b) [1 punto] Halla los puntos de la gráfica de f cuya recta tangente es horizontal.

c) [0'5 puntos] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x} = \frac{x^2 + 3x + 1}{e^x}$.

a)

Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de f .

Asíntotas verticales no tiene (no hay ningún número que anule el denominador)

[La regla de L'Hôpital (L'H) nos dice que si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas y derivables en un entorno de "a", $f(a) = g(a) = 0$ y existe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. La regla se puede reiterar, y se puede aplicar si sale $0/0$, ∞/∞ , y si el límite tiende a ∞]

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{e^x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}; \text{L'H} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{e^x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}; \text{L'H} \right) =$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{+\infty} = 0^+$, **la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal (A.H.) de f en $+\infty$**

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 0) = 0^+$, la gráfica de $f(x)$ está por encima de la A.H.

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((-x)^2 + 3(-x) + 1)e^{-(-x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 1)e^x =$

$= (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$, **no hay A.H. de la gráfica de f en $-\infty$**

b)

Halla los puntos de la gráfica de f cuya recta tangente es horizontal.

Sabemos que los puntos con tangente horizontal anulan la primera derivada, y al ser f continua y derivable en \mathbb{R} las veces que necesitemos, dichos puntos serán extremos relativos.

Estudiamos $f'(x)$

$$f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}.$$

$$f'(x) = (2x + 3)e^{-x} + (x^2 + 3x + 1)e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} \cdot (2x + 3 - x^2 - 3x - 1) = e^{-x} \cdot (-x^2 - x + 2)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow e^{-x} \cdot (-x^2 - x + 2) = 0, \text{ como } e^{-x} \neq 0 \text{ tenemos } -x^2 - x + 2 = 0, \text{ de donde}$$

$x^2 + x - 2 = 0$. Se ve que las soluciones son $x = -2$ y $x = 1$; que serán los posibles extremos relativos.

Recuerdo que:

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, $x = a$ es un máximo relativo

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, $x = a$ es un mínimo relativo

$$f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}, \quad f'(x) = e^{-x} \cdot (-x^2 - x + 2).$$

$$f''(x) = e^{-x} \cdot (-1) \cdot (-x^2 - x + 2) + e^{-x} \cdot (-2x - 1) = e^{-x} \cdot (x^2 + x - 2 - 2x - 1) = e^{-x} \cdot (x^2 - x - 1).$$

Como $f''(-2) = e^2 \cdot (4 + 2 - 1) > 0$, $x = -2$ es un mínimo relativo de $f(x)$ que vale

$$f(-2) = (4 - 6 + 1)e^{-(-2)} = -1 \cdot e^2.$$

Como $f''(1) = e^{-1} \cdot (1 - 1 - 1) < 0$, $x = 1$ es un máximo relativo de $f(x)$ que vale

$$f(1) = (1 + 3 + 1)e^{-1} = 5 \cdot e^{-1} = 5/e.$$

Los puntos de la gráfica de f cuya recta tangente es horizontal son $(-2, -e^2)$ y $(1, 5/e)$.

c)

Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$.

La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$ es $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$.

$$f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x} \rightarrow f(0) = (1)e^0 = 1.$$

$$f'(x) = e^{-x} \cdot (-x^2 - x + 2) \rightarrow f'(0) = e^0 \cdot (2) = 2.$$

La recta tangente pedida es $y - 1 = 2(x - 0)$, de donde $y = 2x + 1$.

Ejercicio 2 opción B, modelo 6 del 2015

[2'5 puntos] Calcula $\int e^{2x} \cdot \text{sen}(x) dx$.

Solución

Calcula $\int e^{2x} \cdot \text{sen}(x) dx$.

La integral pedida es una integral por partes $\int u dv = uv - \int v du$.

En nuestro caso $u = e^{2x}$ y $dv = \text{sen}(x) dx$, de donde, $du = 2e^{2x} dx$ y $v = \int dv = \int \text{sen}(x) dx = -\cos(x)$.

$$I = \int e^{2x} \cdot \text{sen}(x) dx = e^{2x} \cdot (-\cos(x)) - \int (-\cos(x)) \cdot 2e^{2x} dx = -e^{2x} \cdot \cos(x) + 2 \cdot I_1.$$

$I_1 = \int e^{2x} \cdot \cos(x) dx = \{ \text{Integral por partes por partes, en nuestro caso } u = e^{2x} \text{ y } dv = \cos(x) dx, \text{ de donde, } du = 2e^{2x} dx \text{ y } v = \int dv = \int \cos(x) dx = \text{sen}(x) \} = e^{2x} \cdot \text{sen}(x) - \int 2e^{2x} \cdot \text{sen}(x) dx = e^{2x} \cdot \text{sen}(x) - 2 \cdot I.$

Tenemos $I = -e^{2x} \cdot \cos(x) + 2 \cdot I_1 = -e^{2x} \cdot \cos(x) + 2 \cdot (e^{2x} \cdot \text{sen}(x) - 2 \cdot I)$, de donde:
 $5 \cdot I = -e^{2x} \cdot \cos(x) + 2 \cdot e^{2x} \cdot \text{sen}(x) \rightarrow I = (-e^{2x} \cdot \cos(x) + 2 \cdot e^{2x} \cdot \text{sen}(x)) / 5 + K.$

Ejercicio 3 opción B, modelo 6 del 2015

Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + \alpha z = 2 \\ 2x + \alpha y = \alpha + 4 \\ 3x + y + (\alpha + 4)z = 7 \end{cases}$$

a) [1'75 puntos] Discute el sistema según los valores de α .

b) [0'75 puntos] Resuelve el sistema para $\alpha = 2$.

Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + \alpha z = 2 \\ 2x + \alpha y = \alpha + 4 \\ 3x + y + (\alpha + 4)z = 7 \end{cases}$$

a)

Discute el sistema según los valores de α .

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 2 & \alpha & 0 \\ 3 & 1 & \alpha+4 \end{pmatrix}$, y la matriz ampliada es

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 2 \\ 2 & \alpha & 0 & \alpha+4 \\ 3 & 1 & \alpha+4 & 7 \end{pmatrix}.$$

El sistema tiene solución única si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$ con lo cual $\det(A) = |A| \neq 0$.

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 2 & \alpha & 0 \\ 3 & 1 & \alpha+4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = 1(\alpha)(\alpha+4) - 0 + \alpha(2-3\alpha) = \alpha(\alpha+4+2-3\alpha) =$$

$$= \alpha(-2\alpha+6).$$

De $\alpha(-2\alpha+6) = 0$ obtenemos $\alpha = 0$ y $\alpha = 3$.

Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 3$, $\det(A) \neq 0$ con lo cual $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 =$ número de incógnitas, **sistema compatible y determinado, y el sistema tiene solución única.**

$$\text{Si } \alpha = 0, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{En } A \text{ como } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0, \text{ rango}(A) = 2$$

$$\text{En } A^* \text{ como } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{columna} \end{array} = -0 + 0 - 1(4 - 4) = 0, \text{ rango}(A^*) = 2.$$

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 <$ número de incógnitas, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene más de una solución (en nuestro caso infinitas soluciones).**

$$\text{Si } \alpha = 3, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{En } A \text{ como } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3 \neq 0, \text{ rango}(A) = 2$$

$$\text{En } A^* \text{ como } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_2 - 3F_1 \end{array} \approx \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{array} = 1(3 - 3) - 0 + 0 = 0, \text{ por tanto}$$

$$\text{rango}(A^*) = 2.$$

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 <$ número de incógnitas, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene más de una solución (en nuestro caso infinitas soluciones).**

b)

Resuelve el sistema para $\alpha = 2$.

Como ya hemos discutido para $\alpha = 2$ el sistema tiene solución única. Veámosla.

$$\begin{cases} x & + 2z & = & 2 \\ 2x & + 2y & = & 6 \\ 3x & + y & + 6z & = 7 \end{cases} \begin{array}{l} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \approx \begin{cases} x & + 2z & = & 2 \\ +2y & - 4z & = & 2 \\ & y & = & 1 \end{cases}, \text{ de donde } y = 1. \text{ Entrando en}$$

la 2ª $\rightarrow 2(1) - 4z = 2 \rightarrow z = 0$. Entrando en la 1ª $\rightarrow x + 2(0) = 2 \rightarrow x = 2$. **La única solución del sistema es $(x, y, z) = (2, 1, 0)$.**

Ejercicio 4 opción B, modelo 6 del 2015

$$\text{Sean el punto } P(1, 6, -2) \text{ y la recta } r \equiv \frac{x-5}{6} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{2}.$$

a) [1 punto] Halla la ecuación general del plano π que contiene al punto P y a la recta r.

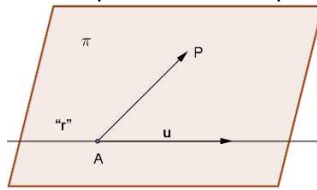
b) [1'5 puntos] Calcula la distancia entre el punto P y la recta r.

Solución

Sean el punto $P(1,6,-2)$ y la recta $r \equiv \frac{x-5}{6} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{2}$.

a)

Halla la ecuación general del plano π que contiene al punto P y a la recta r .



De la recta "r" tomo el punto $A(5,-1,0)$ y el vector $\mathbf{u} = (6,-3,2)$, el otro vector independiente que me falta es el $\mathbf{AP} = (1-5,6+1,-2-0) = (-4,7,-2)$. Si X es un punto genérico del plano π , su ecuación es:

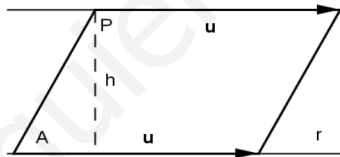
$$\pi \equiv \det(\mathbf{AX}, \mathbf{u}, \mathbf{AP}) = 0 = \begin{vmatrix} x-5 & y+1 & z \\ 6 & -3 & 2 \\ -4 & 7 & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = (x-5)(6-14) - (y+1)(-12+8) + z(42+12) =$$

$$= -8x + 4y + 30z + 44 = 0 \equiv -4x + 2y + 15z + 22 = 0$$

b)

Calcula la distancia entre el punto P y la recta r .

Calculamos la distancia del punto P a la recta "r", utilizando el área de un paralelogramo. *La distancia pedida es la altura del paralelogramo*



Dada la recta "r" conocemos el punto $A(5,-1,0)$ y el vector $\mathbf{u} = (6,-3,2)$. Por el punto P trazamos una recta paralela a la "r", y formamos el paralelogramo.

El área del paralelogramo determinado por los vectores \mathbf{u} y \mathbf{AP} es $\|\mathbf{AP} \times \mathbf{u}\| = \text{base} \cdot \text{altura} = \|\mathbf{u}\| \cdot h$, pero la altura "h" es $d(P;r)$, luego $d(P;r) = (\|\mathbf{AP} \times \mathbf{u}\|) / (\|\mathbf{u}\|)$ ("x" es el producto vectorial).

$$\text{Punto } P(1,6,-2). \mathbf{AP} = (-4,7,-2); \mathbf{AP} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 7 & -2 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(14-6) - \mathbf{j}(-8+12) + \mathbf{k}(12-42) =$$

$$= (8,-4,-30);$$

$$\|\mathbf{AP} \times \mathbf{u}\| = \sqrt{8^2 + 4^2 + 30^2} = \sqrt{980}; \quad \|\mathbf{u}\| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\text{Luego } d(P;r) = (\|\mathbf{AP} \times \mathbf{u}\|) / (\|\mathbf{u}\|) = \sqrt{980} / 7 = 2\sqrt{5} \mathbf{u}^\perp.$$