EXAMEN - MATRICES - MATEMÁTICAS II

Ejercicio nº 1.-

Calcula los valores de para que la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

verifique la ecuación − 0, donde y son, respectivamente, las matrices identidad y nula de orden tres.

Ejercicio nº 2.-

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula y , donde denota la matriz traspuesta de

b) Encuentra las matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$**, tales que:** $AA^t X = X$

c) Encuentra todas las matrices de la forma $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$**, tales que:** $A^t AY = Y$

Ejercicio nº 3.-

Halla el rango de la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & -6 & 19 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 4.-

Calcula el rango de la siguiente matriz y di cuál es el número de columnas linealmente independientes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 5.-

Sean y dos matrices cuadradas de orden 3. Indica cuando es cierta la igualdad
y da un ejemplo en el que dicha igualdad sea falsa.

SOLUCIÓN

<u>Ejercicio nº 1.-</u>

Calcula los valores de para que la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

verifique la ecuación − 0, donde y son, respectivamente, las matrices identidad y nula de orden tres.

Solución:

Calculamos − e igualamos a 0:

$$A^2 = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 6A + 9I = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x^2 - 6x + 9 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 - 6x + 9 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 - 6x + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ha de ser:

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \rightarrow \quad x = 3$$

Por tanto, el único valor de que hace que se verifique la igualdad propuesta es 3.

Ejercicio nº 2.-

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula y , donde denota la matriz traspuesta de

b) Encuentra las matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, **tales que:** $AA^t X = X$

c) Encuentra todas las matrices de la forma $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, **tales que:** $A^t AY = Y$

Solución:

a) La matriz transpuesta de es:

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto:}$$

$$A^t A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AA^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Imponemos la condición dada:

$$AA^t X = X \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{cases} x = x \\ 2y = y \quad \to \quad y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Por tanto: } X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ donde } x \in \mathbb{R}.$$

c) $A^t A Y = Y \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b \\ a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a+c = a & \rightarrow \quad c = 0 \\ b = b & \\ a+c = c & \rightarrow \quad a = 0 \end{cases}$

Por tanto: $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$, donde $b \in$ R.

Ejercicio nº 3.-

Halla el rango de la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-4} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{8} & \mathbf{-6} & \mathbf{19} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & -6 & 19 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^{a} \\ 1^{a} \\ 3^{a} \\ 4^{a} \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & -5 \\ 1 & 8 & -6 & 19 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a} - 1^{a} \\ 3^{a} - 1^{a} \\ 4^{a} - 3 \cdot 1^{a} \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 9 & -6 & 18 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} + 3 \cdot 2^{a} \\ 3 \cdot 4^{a} + 4 \cdot 2^{a} \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & -30 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } ran(M) = 3.$$

Ejercicio nº 4.-

Calcula el rango de la siguiente matriz y di cuál es el número de columnas linealmente independientes:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-6} & \mathbf{-5} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$$

Solución:

Calculamos el rango de la matriz dada:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^{\text{a}} \\ 1^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -6 & -5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} + 3 \cdot 1^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} + 1^{\text{a}} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & -4 \\ 0 & -5 & -4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} + 2^{\text{a}} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } ran(A) = 2.$$

Esto significa que hay dos columnas linealmente independientes en ; las otras dos dependen linealmente de ellas.

<u>Ejercicio nº 5.-</u>

Sean y dos matrices cuadradas de orden 3. Indica cuando es cierta la igualdad
y da un ejemplo en el que dicha igualdad sea falsa.

Solución:

Una condición necesaria y suficiente para que (sea igual a, es que , es decir, que
En general, dadas dos matrices cualesquiera no es cierto que coincida con
Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 0 & 4 & 7 \\ 1 & 10 & 8 \end{pmatrix} \\ B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 8 & 6 & 8 \\ 9 & 1 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow AB \neq BA, \text{ luego } (A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq \neq A^2 + 2AB + B^2$$