

EXAMEN - MATRICES - MATEMÁTICAS II

Ejercicio nº 1.-

Halla los valores de a y b en la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, de forma que $A^2 - 2A = B$,

siendo $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio nº 2.-

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Calcula A^2 , A^3 , A^4 , A^5 .

b) Halla el valor de $A^{25} + A^{-1}$.

Ejercicio nº 3.-

Obtén el rango de la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \\ 7 & 9 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 4.-

Dados los vectores:

$$\vec{u}_1 = (3, -1, 2, 0); \vec{u}_2 = (1, 2, -1, 1); \vec{u}_3 = (2, 1, 0, -1)$$

Estudia la dependencia o independencia lineal y di cuál es el rango de la matriz cuyas filas son u_1 , u_2 , u_3 .

Ejercicio nº 5.-

Dada la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ¿es posible que el rango de la matriz sea 4 si añadimos una nueva columna?

SOLUCIONES

Ejercicio nº 1.-

Halla los valores de a y b en la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, de forma que $A^2 - 2A = B$,

siendo $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

Calculamos – e igualamos el resultado a

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 2A = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - 2a & 2ab - 2b \\ 0 & a^2 - 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, ha de ser:

$$\left. \begin{array}{l} a^2 - 2a = 0 \\ 2ab - 2b = 1 \end{array} \right\} a(a-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

• Si $a = 0$, $-2b = 1 \rightarrow b = -\frac{1}{2} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

• Si $a = 2$, $2b = 1 \rightarrow b = \frac{1}{2} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio nº 2.-

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Calcula A^2 , A^3 , A^4 , A^5 .

b) Halla el valor de $A^{25} + A^{-1}$.

Solución:

$$a) A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^5 = A^4 A = I A = A$$

$$b) A^{25} = A^{4 \cdot 6 + 1} = (A^4)^6 A = I^6 A = I A = A$$

Para hallar A^{-1} , tenemos en cuenta que:

$$A^4 = A^3 A = I \rightarrow A^{-1} = A^3$$

Utilizando los resultados del apartado a), tenemos que:

$$A^{25} + A^{-1} = A + A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 3.-

Obtén el rango de la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \\ 7 & 9 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \\ 7 & 9 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \\ 7 & 9 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a + 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 4 \cdot 1^a \\ 4^a + 7 \cdot 1^a}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 9 & 15 & 3 \\ 0 & 9 & 15 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 3 \cdot 2^a \\ 4^a - 3 \cdot 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } \text{ran}(M) = 2.$$

Ejercicio nº 4.-

Dados los vectores:

$$\vec{u}_1 = (3, -1, 2, 0); \vec{u}_2 = (1, 2, -1, 1); \vec{u}_3 = (2, 1, 0, -1)$$

Estudia la dependencia o independencia lineal y di cuál es el rango de la matriz cuyas filas son u_1, u_2, u_3 .

Solución:

Calculamos el rango de la matriz cuyas filas son los vectores $\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2^a \\ 1^a \\ 3^a}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -7 & 5 & -3 \\ 7 \cdot 3^a - 3 \cdot 2^a & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \text{ Por tanto, el rango de la matriz es 3.}$$

Esto significa que u_1, u_2, u_3 son linealmente independientes.

Ejercicio nº 5.-

Dada la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ¿es posible que el rango de la matriz sea 4 si añadimos una nueva columna?

Solución:

Calculamos el rango de la matriz dada:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{3^a \\ 1^a \\ 2^a \\ 4^a}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \\ 4^a - 3^a}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & -15 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a \\ 5 \cdot 3^a - 2 \cdot 2^a \\ 2 \cdot 4^a - 3^a}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz tiene rango 2; por tanto, añadiendo una nueva columna, la matriz resultante como máximo podría tener rango 3, pero nunca 4.