2020-Modelo

A. Pregunta 1.- El satélite UARS se puso en órbita en 1991 para estudiar la entrada y salida de energía en la atmósfera superior. Su masa era de 5800 kg y realizaba 15 órbitas diarias. En 2005, el satélite se quedó sin combustible y dejó de operar. Calcule:
a) La altura sobre la superficie de la Tierra de dicho satélite cuando estaba en órbita.
b) La energía total del satélite cuando estaba en órbita.
Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Radio de la Tierra, R_T = 6371 km; Masa de la Tierra, $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg.

B. Pregunta 1.-. Unos astrónomos han descubierto un nuevo sistema solar, formado por una estrella de masa $6,0 \cdot 10^{30}$ kg, que desempeña el papel del sol, y un planeta que gira en torno a ella en una órbita circular, tardando 3 años terrestres en dar una vuelta completa.
a) Determine la distancia a la que se encuentra el planeta del sol.
b) Si en la superficie del planeta la aceleración de la gravedad es 15 m s^{-2} y la velocidad de escape es de 11,2 km s^{-1}, ¿cuánto valen la masa y el radio del planeta?
Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

2019-Julio-Coincidentes

A. Pregunta 1.- Una nave espacial tripulada se encuentra describiendo una órbita circular geoestacionaria alrededor de la Tierra. Determine:
a) El radio de la órbita y la velocidad lineal de la nave,
El astronauta recibe la orden de cambiar de órbita y pasar a otra, también circular, de radio el doble de la actual.
b) ¿Cuál será la nueva velocidad lineal de la nave? Justifique la respuesta.
Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra, $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg;

B. Pregunta 1.- Considérese un cuerpo de masa m = 10^3 kg bajo la acción del campo gravitatorio terrestre.
a) Defina la velocidad de escape de ese cuerpo. Determine la velocidad de escape de un cuerpo que está en reposo a una distancia $R = 2R_T$ del centro de la Tierra
b) La energía adicional requerida para que el cuerpo que se encuentra en una órbita circular de radio $R = 2R_T$ escape de la acción del campo gravitatorio terrestre.
Datos: Radio de la Tierra, $R_T = 6,37 \cdot 10^6$ m; Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra, $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg;

2019-Julio

A. Pregunta 1.- Los satélites LAGEOS son una serie de satélites artificiales diseñados para proporcionar órbitas de referencia para estudios geodinámicos de la Tierra. Consisten en un cuerpo esférico de masa m = 405 kg que se mueve en órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de 5900 km sobre su superficie. Determine:
a) El periodo de este tipo de satélites.
b) La energía requerida para que, desde la superficie de la Tierra, pasen a describir dicha órbita.
Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra, $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg; Radio de la Tierra, $R_T = 6,37 \cdot 10^6$ m.

B. Pregunta 1-. El satélite Europa describe una órbita circular alrededor de Júpiter de 671100 km de radio. Teniendo en cuenta que su periodo de revolución es de 3,55 días terrestres, determine:
a) La masa de Júpiter.
b) La velocidad de escape desde la superficie de Júpiter.
Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Radio de Júpiter, $R_{Júpiter}$ = 69911 km.

2019-Junio-Coincidentes

A. Pregunta 1.- La nave Apolo XI, de masa $m = 1,6 \cdot 10^4$ kg, en su misión de llevar al ser humano a la Luna, se situó en una órbita circular a 250 km de altura sobre la superficie lunar, para desde ahí enviar el denominado módulo lunar a la superficie de la Luna. Determine:
a) La velocidad del Apolo XI en su órbita circular y su energía mecánica total.
b) La velocidad de escape y el valor de la gravedad en la superficie de la Luna.
Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; Masa de la Luna, $M_L = 7,35 \cdot 10^{22}$ kg; Radio de la Luna, R_L = 1737 km.

B. Pregunta 1.- Una masa puntual A, M_A = 3 kg, se encuentra en el plano xy, en el origen de coordenadas. Si se sitúa una masa puntual B, M_B = 5 kg, en el punto (2, -2) m, determine:

a) La fuerza que ejerce la masa A sobre la masa B.
b) El trabajo necesario para llevar la masa B del punto (2, -2) m al punto (2, 0) m debido al campo gravitatorio creado por la masa A.
Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67·10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

2019-Junio

A. Pregunta 1.- Una masa puntual m_1 = 5 kg está situada en el punto (4, 3) m.
a) Determine la intensidad del campo gravitatorio creado por la masa m_1 en el origen de coordenadas y el trabajo realizado al trasladar otra masa m_2 = 0,5 kg desde el infinito hasta el origen de coordenadas.
b) Situadas las masas m_1 y m_2 en las posiciones anteriores, ¿a qué distancia del origen de coordenadas, el campo gravitatorio resultante es nulo?
Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67·10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

B. Pregunta 1.- El *Amazonas 5* es un satélite geoestacionario de comunicaciones de 5900 kg puesto en órbita en septiembre de 2017. Determine:
a) La altura sobre el ecuador terrestre del satélite y su velocidad orbital.
b) La fuerza centrípeta necesaria para que describa la órbita y la energía total del satélite en dicha órbita.
Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67·10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra, M_T = $5,97·10^{24}$ kg; Radio de la Tierra, $R_T = 6,37·10^6$ m.

2019-Modelo

A. Pregunta 1.- a) Determine la masa de un planeta sabiendo que un satélite de 150 kg describe una órbita circular con un periodo de 30 min cuando se mueve con una velocidad de $2,3·10^4$ m s^{-1}.
b) ¿Cuál es la energía total de dicho satélite?
Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67·10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

B. Pregunta 1.- El planeta Cibeles tiene un radio $R_C = 8,5·10^3$ km y gira en torno a una estrella, de nombre Aya, describiendo una órbita circular de radio $R = 1,8·10^8$ km. En dicho planeta, si se deja caer un objeto con velocidad inicial nula, desde una altura de 10 m, tarda 1,58 s en tocar el suelo. Cibeles, en 395 días terrestres, da una vuelta completa alrededor de la estrella Aya.
Determine:
a) La aceleración de la gravedad sobre la superficie de Cibeles y el valor de su masa.
b) El valor de la masa de la estrella Aya.
Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67·10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

2018-Julio

A. Pregunta 1.- La masa de un objeto en la superficie terrestre es de 50 kg. Determine:
a) La masa y el peso del objeto en la superficie de Mercurio.
b) A qué altura sobre la superficie de Mercurio el peso del objeto se reduce a la tercera parte.
Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67·10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de Mercurio, M_M = $3,30·10^{23}$ kg; Radio de Mercurio, $R_M = 2,44·10^6$ m.

B. Pregunta 1.- Un satélite artificial de masa 712 kg describe una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de 694 km. Calcule:
a) La velocidad y el periodo del satélite en la órbita.
b) La energía necesaria para trasladarlo desde su órbita hasta otra órbita circular situada a una altura de 1000 km sobre la superficie de la Tierra.
Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67·10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra, M_T = $5,97·10^{24}$ kg; Radio de la Tierra, $R_T = 6,37·10^6$ m.

2018-Junio-coincidentes

A. Pregunta 1.- Una nave espacial transporta colonos en estado de hibernación a un planeta lejano. Por un error, la nave llega a su destino 10 años terrestres antes de lo previsto, por lo que el ordenador de a bordo decide situar a la nave en una órbita circular a una distancia del centro del planeta r = 5000 km y orbitar en ella durante 10 años.
a) ¿Cuántas vueltas da la nave en la órbita circular a lo largo de los 10 años?
b) ¿Cuál es el valor de la velocidad de escape en la superficie del planeta?
Datos: *Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67·10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa del planeta, M_P = $6,42·10^{23}$ kg; Radio del planeta, R_P = 3397,5 km.*

B. Pregunta 1.- Una masa de valor M = 4 kg se encuentra en el punto (4, 0) del plano xy (coordenadas expresadas en metros). Determine:
a) El vector campo gravitatorio creado por la masa en el punto P (0, 3).

b) El trabajo necesario para llevar una masa m=10 kg desde el origen de coordenadas al punto P.
Dato: Constante de Gravitación Universal, G = 6,67·10 $^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

2018-Junio

A. Pregunta 1.- Dos masas m_1 = 10 kg y m_2 = 20 kg cuelgan del techo y están separadas 1 m de distancia. Determine:
a) La fuerza $\vec{F}_{12}$ que ejerce la masa m_1 sobre la m_2 y el peso $\vec{P}_2$ de la masa m_2.
b) Explique razonadamente por qué el módulo de $\vec{P}_2$ es mucho mayor que el módulo de $\vec{F}_{12}$.
Datos: *Radio de la Tierra, R_T = 6,37·10^6 m; Constante de Gravitación Universal, G = 6,67·10 $^{-11}$ N m^2 kg^{-2}. Masa de la Tierra, M_T = 5,97·10^{24} kg.*

B. Pregunta 1.- Considérese un satélite de masa 10^3 kg que orbita alrededor de la Tierra en una órbita circular geoestacionaria.
a) Determine el radio que tendría que tener la órbita para que su periodo fuese doble del anterior.
b) ¿Cuál es la diferencia de energía del satélite entre la primera y la segunda órbita?
Datos: Constante de Gravitación Universal, G = 6,67·10 $^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra, M_T = 5,97·10^{24} kg.

2018-Modelo

A. Pregunta 1.- Dos partículas puntuales de masas m_1 = 2 kg y m_2 = 10 kg se encuentran situadas a lo largo del eje X. La masa m_1 está en el origen, x_1 = 0, y la masa m_2 en el punto x_2 = 5 m.
a) Determine el punto en el eje X en el que el campo gravitatorio debido a ambas masas es nulo.
b) ¿Cuál es el potencial gravitatorio debido a ambas masas en el punto para el que el campo gravitatorio es cero?
Dato: Constante de Gravitación Universal, G = 6,67·10 $^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

B. Pregunta 1.- Sea un sistema doble formado por una estrella y un planeta. El planeta gira alrededor de la estrella siguiendo una órbita circular con un periodo de 210 días y posee una masa de 5·10^{-6} M, donde M es la masa de la estrella. Determine:
a) El radio de la órbita del planeta.
b) El vector campo gravitatorio total en un punto entre la estrella y el planeta que dista 4,6·10^5 km del centro del planeta.
Dato: Constante de Gravitación Universal, G = 6,67·10^{-11} N m^2 kg^{-2}; Masa de la estrella 1,3·10^{30} kg.

2017-Septiembre

A. Pregunta 1.- a) Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica, obtenga una expresión para la velocidad de escape de un cuerpo desde la superficie de un planeta esférico de radio R y masa M.
b) Calcule la velocidad de escape desde la superficie de Mercurio sabiendo que posee una masa de 3,30·10^{23} kg y una aceleración de la gravedad en su superficie de 3,70 m·s^{-2}.
Dato: Constante de Gravitación Universal, G = 6,67·10^{-11} N m^2 kg^{-2}

B. Pregunta 1.- a) A partir de la ley fundamental de la dinámica, deduzca la expresión de la velocidad orbital de un satélite que gira en una órbita circular de radio R alrededor de un planeta de masa M.
b) Si un satélite de 21 kg gira alrededor del planeta Marte, calcule el radio de la órbita circular y la energía mecánica del satélite si su periodo es igual al de rotación del planeta.
Datos: Masa de Marte, M_{Marte} = 6,42·10^{23} kg; Periodo de revolución del planeta, T_{Marte} = 24,62 h; Constante de Gravitación Universal, G = 6,67·10^{-11} N m^2 kg^{-2}.

2017-Junio-coincidentes

A. Pregunta 1.- Se desea situar un satélite de 120 kg de masa en una órbita circular, alrededor de la Tierra, a 150 km de altura.
a) Determine la velocidad inicial mínima requerida para que alcance dicha altura.
b) Una vez alcanzada dicha altura, calcule la energía adicional necesaria para que orbite.
Datos: Radio de la Tierra, R_T = 6,37·10^6 m; Constante de Gravitación Universal, G = 6,67·10^{-11} N m^2 kg^{-2} ; Masa de la Tierra, M_T = 5,97·10^{24} kg.

B. Pregunta 1.- Considérese una masa M = 50 kg situada en el origen de coordenadas. Bajo la acción del campo gravitatorio creado por dicha masa, determine:
a) El trabajo requerido para mover una masa m_1 = 2 kg desde P_1 = (1, 0, 0) m a P_2 = (3, 4, 0) m.
b) La energía cinética de una partícula de masa m_2 = 3 kg que, partiendo del reposo, se mueve desde el punto P_3 = (9/2, 6, 0) m al punto P_2.

Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

2017-Junio

A. Pregunta 1.- Un asteroide de forma esférica y radio 3 km tiene una densidad de 3 g cm^{-3}. Determine:

a) La velocidad de escape desde la superficie de dicho asteroide.

b) La velocidad de un cuerpo a una altura de 1 km sobre la superficie del asteroide si partió de su superficie a la velocidad de escape.

Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg $^{-2}$.

B. Pregunta 1.- Una reciente investigación ha descubierto un planeta similar a la Tierra orbitando alrededor de la estrella Próxima Centauri, una enana roja cuya masa es un 12% de la masa del Sol y su radio es el 14% del radio solar. Mediante técnicas de desplazamiento Doppler se ha medido el periodo del planeta alrededor de la estrella obteniéndose un valor de 11,2 días. Determine:

a) La aceleración de la gravedad sobre la superficie de la estrella.

b) El radio de la órbita del planeta suponiendo ésta circular.

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg $^{-2}$; Masa del Sol, $M_S = 1{,}99\cdot10^{30}$ kg; Radio del Sol, $R_S = 7\cdot10^8$ m.

2017-Modelo

A. Pregunta 1.- *Enunciado idéntico a 2016-Modelo-A1*

B. Pregunta 1.- *Enunciado idéntico a 2016-Modelo-B1*

2016-Septiembre

A. Pregunta 1.- Desde la superficie de un planeta de masa $6{,}42\cdot10^{23}$ kg y radio 4500 km se lanza verticalmente hacia arriba un objeto.

a) Determine la altura máxima que alcanza el objeto si es lanzado con una velocidad inicial de 2 km s^{-1}.

b) En el punto más alto se le transfiere el momento lineal adecuado para que describa una órbita circular a esa altura. ¿Qué velocidad tendrá el objeto en dicha órbita circular?

Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

B. Pregunta 1.- Una estrella gira alrededor de un objeto estelar con un periodo de 28 días terrestres siguiendo una órbita circular de radio $0{,}45\cdot10^8$ km.

a) Determine la masa del objeto estelar.

b) Si el diámetro del objeto estelar es 200 km, ¿cuál será el valor de la gravedad en su superficie?

Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg $^{-2}$.

2016-Junio

A. Pregunta 1.- El planeta Marte, en su movimiento alrededor del Sol, describe una órbita elíptica. El punto de la órbita más cercano al Sol, perihelio, se encuentra a $206{,}7\cdot10^6$ km, mientras que el punto de la órbita más alejado del Sol, afelio, está a $249{,}2\cdot10^6$ km. Si la velocidad de Marte en el perihelio es de 26,50 km s^{-1}, determine:

a) La velocidad de Marte en el afelio.

b) La energía mecánica total de Marte en el afelio.

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de Marte, $M_M = 6{,}42\cdot10^{23}$ kg; Masa del Sol $M_S = 1{,}99\cdot10^{30}$ kg.

B. Pregunta 1.- Un astronauta utiliza un muelle de constante elástica k=327 N m^{-1} para determinar la aceleración de la gravedad en la Tierra y en Marte. El astronauta coloca en posición vertical el muelle y cuelga de uno de sus extremos una masa de 1 kg hasta alcanzar el equilibrio. Observa que en la superficie de la Tierra el muelle se alarga 3 cm y en la de Marte sólo 1,13 cm.

a) Si el astronauta tiene una masa de 90 kg, determine la masa adicional que debe añadirse para que su peso en Marte sea igual al de la Tierra.

b) Calcule la masa de la Tierra suponiendo que sea esférica.

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Radio de la Tierra, $R_T = 6{,}37\cdot10^6$ m.

2016-Modelo

A. Pregunta 1.- Titania, satélite del planeta Urano, describe una órbita circular en torno al planeta. Las aceleraciones de la gravedad en la superficies de Urano y de Titania son $g_U = 8{,}69$ m s^{-2} y $g_t = 0{,}37$ m s^{-2}, respectivamente. Un haz de luz emitido desde la superficie de Urano tarda 1,366 s en llegar a la superficie de Titania. Determine:

a) El radio de la órbita de Titania alrededor de Urano (distancia entre los centros de ambos

cuerpos).
b) El tiempo que tarda Titania en dar una vuelta completa alrededor de Urano, expresado en días terrestres.
Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3.0 \cdot 10^8$ m s^{-1}; Masa de Urano, $M_U = 8{,}69 \cdot 10^{25}$ kg; Masa de Titania $M_t = 3{,}53 \cdot 10^{21}$ kg.
B. Pregunta 1.- Un cierto planeta esférico tiene de masa el doble de la masa de la Tierra, y la longitud de su circunferencia ecuatorial mide la mitad de la de la Tierra. Calcule:
a) La relación que existe entre la velocidad de escape en la superficie de dicho planeta con respecto a la velocidad de escape en la superficie de la Tierra.
b) La aceleración de la gravedad en la superficie del planeta.
Dato: Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra, $g_T = 9{,}81$ m s^{-2}.

2015-Septiembre

A. Pregunta 1.- Una nave espacial aterriza en un planeta desconocido. Tras varias mediciones se observa que el planeta tiene forma esférica, la longitud de su circunferencia ecuatorial mide $2 \cdot 10^5$ km y la aceleración de la gravedad en su superficie vale 3 m s^{-2}.
a) ¿Qué masa tiene el planeta?
b) Si la nave se coloca en una órbita circular a 30.000 km sobre la superficie del planeta, ¿cuántas horas tardará en dar una vuelta completa al mismo?
Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.
B. Pregunta 1.- El radio de uno de los asteroides, de forma esférica, perteneciente a los anillos de Saturno es de 5 km. Suponiendo que la densidad de dicho asteroide es uniforme y de valor 5,5 g cm^{-3}, calcule:
a) La aceleración de la gravedad en su superficie.
b) La velocidad de escape desde la superficie del asteroide.
Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

2015-Junio-Coincidentes

A. Pregunta 1.- Se quiere situar un satélite de masa, $m = 10^3$ kg, a una altura $h = R_T$, respecto de la superficie de la Tierra. Determine:
a) La energía cinética mínima requerida para situar el satélite a la altura $h = R_T$.
b) La energía cinética adicional requerida para que se mantenga en órbita circular a dicha altura.
Datos: Constante de la Gravitación Universal, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Radio de la Tierra, $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg
B. Pregunta 1.- En la superficie de un planeta esférico, de radio $2R_T$ (R_T radio de la Tierra), la aceleración de la gravedad es idéntica a la que se mide en la superficie terrestre.
a) Determine la masa del planeta en función de la masa de la Tierra.
b) Compare las energías mínimas necesarias para situar un objeto a una altura $h = R_T$, desde la superficie de la Tierra y desde la superficie de dicho planeta.

2015-Junio

A. Pregunta 1.- Dos lunas que orbitan alrededor de un planeta desconocido, describen órbitas circulares concéntricas con el planeta y tienen periodos orbitales de 42 h y 171,6 h. A través de la observación directa, se sabe que el diámetro de la órbita que describe la luna más alejada del planeta es de $2{,}14 \cdot 10^6$ km. Despreciando el efecto gravitatorio de una luna sobre otra, determine:
a) La velocidad orbital de la luna exterior y el radio de la órbita de la luna interior.
b) La masa del planeta y la aceleración de la gravedad sobre su superficie si tiene un diámetro de $2{,}4 \cdot 10^4$ km.
Dato: Constante de gravitación universal, $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
B. Pregunta 1.- Un cuerpo esférico de densidad uniforme con diámetro $6{,}0 \cdot 10^5$ km presenta una aceleración de la gravedad sobre su superficie de 125 m s^{-2}.
a) Determine la masa de dicho cuerpo.
b) Si un objeto describe una órbita circular concéntrica con el cuerpo esférico y un periodo de 12 h, ¿cuál será el radio de dicha órbita?
Dato: Constante de gravitación universal, $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

2015-Modelo

A. Pregunta 1.- Un planeta de igual masa que la Tierra, describe una órbita circular de radio R, de un año terrestre de duración, alrededor de una estrella de masa M tres veces superior a la del Sol.
a) Obtenga la relación entre: el radio R de la órbita del planeta, su periodo de revolución T, la constante de la gravitación universal G, y la masa M de la estrella alrededor de la cuál orbita.

b) Calcule el cociente entre los radios de las órbitas de este planeta y de la Tierra.
B. Pregunta 1.- Dos planetas, A y B, tienen el mismo radio. La aceleración gravitatoria en la superficie del planeta A es tres veces superior a la aceleración gravitatoria en la superficie del planeta B. Calcule:
a) La relación entre las densidades de los dos planetas.
b) La velocidad de escape desde la superficie del planeta B si se sabe que la velocidad de escape desde la superficie del planeta A es de 2 km/s

2014-Septiembre

A. Pregunta 1.- Un satélite describe una órbita circular alrededor de un planeta desconocido con un periodo de 24 h. La aceleración de la gravedad en la superficie del planeta es 3,71 m s^{-2} y su radio es 3393 km. Determine:
a) El radio de la órbita.
b) La velocidad de escape desde la superficie del planeta.
B. Pregunta 1.- Un planeta esférico tiene una densidad uniforme ρ = 1,33 g cm^{-3} y un radio de 71500 km. Determine:
a) El valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.
b) La velocidad de un satélite que orbita alrededor del planeta en una órbita circular con un periodo de 73 horas.
Dato: Constante de gravitación universal, G = 6,67×10^{-11} N m^2 kg^{-2}

2014-Junio-Coincidentes

A. Pregunta 1.- Un satélite artificial de masa 100 kg describe una órbita circular alrededor de cierto planeta. La energía mecánica del satélite en dicha órbita es de -5×10^7 J y su período de revolución es de 24 horas. Calcule:
a) El radio de la órbita.
b) La masa del planeta.
Dato: Constante de Gravitación Universal, G = 6,67×10^{-11} N m^2 kg^{-2}
B. Pregunta 1.- La Tierra tiene un diámetro 2,48 veces mayor que el de Titán y su masa es 44,3 veces mayor. Considerando que ambos astros son esféricos, calcule:
a) El valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de Titán.
b) La relación entre las velocidades de escape en Titán y en la Tierra.
Dato: Aceleración de la gravedad en la superficie Terrestre, g= 9,81 m s^{-2}

2014-Junio

A. Pregunta 1.- El planeta A tiene tres veces más masa que el planeta B y cuatro veces su radio. Obtenga:
a) La relación entre las velocidades de escape desde las superficies de ambos planetas.
b) La relación entre las aceleraciones gravitatorias en las superficies de ambos planetas.
B. Pregunta 1.- Un cohete de masa 2 kg se lanza verticalmente desde la superficie terrestre de tal manera que alcanza una altura máxima, con respecto a la superficie terrestre, de 500 km. Despreciando el rozamiento con el aire, calcule:
a) La velocidad del cuerpo en el momento del lanzamiento. Compárela con la velocidad de escape desde la superficie terrestre.
b) La distancia a la que se encuentra el cohete, con respecto al centro de la Tierra, cuando su velocidad se ha reducido en un 10 % con respecto a su velocidad de lanzamiento.
Datos: Radio Terrestre = 6,37×10^6 m ; Masa de la Tierra= 5,97×10^{24} kg;
Constante de Gravitación Universal G = 6,67 10^{-11} N m^2 kg^{-2}

2014-Modelo

A. Pregunta 1.- La masa del Sol es 333183 veces mayor que la de la Tierra y la distancia que separa sus centros es de 1,5×10^8 km. Determine si existe algún punto a lo largo de la línea que los une en el que se anule:
a) El potencial gravitatorio. En caso afirmativo, calcule su distancia a la Tierra.
b) El campo gravitatorio. En caso afirmativo, calcule su distancia a la Tierra.
B. Pregunta 1.- Los satélites Meteosat son satélites geoestacionarios, situados sobre el ecuador terrestre y con un periodo orbital de 1 día.
a) Suponiendo que la órbita que describen es circular y poseen una masa de 500 kg, determine el módulo del momento angular de los satélites respecto del centro de la Tierra y la altura a la que se encuentran estos satélites respecto de la superficie terrestre.
b) Determine la energía mecánica de los satélites.

Datos: Radio Terrestre = $6,37\times10^6$ m ; Masa de la Tierra= $5,97\times10^{24}$ kg;
Constante de Gravitación Universal G = $6,67\ 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

2013-Septiembre

A. Pregunta 1.- Dos satélites describen órbitas circulares alrededor de un planeta cuyo radio es de 3000 km. El primero de ellos orbita a 1000 km de la superficie del planeta y su periodo orbital es de 2 h. La órbita del segundo tiene un radio 500 km mayor que la del primero. Calcule:
a) El módulo de la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta.
b) El periodo orbital del segundo satélite.

B. Pregunta 1.- Dos planetas, A y B, tienen la misma densidad. El planeta A tiene un radio de 3500 km y el planeta B un radio de 3000 km. Calcule:
a) La relación que existe entre las aceleraciones de la gravedad en la superficie de cada planeta.
b) La relación entre las velocidades de escape en cada planeta.

2013-Junio-Coincidentes

A. Pregunta 1.- Un satélite de masa 800 kg orbita alrededor de la Luna con una velocidad angular de $4,33\times10^{-4}$ rad s^{-1}. Despreciando rozamientos, determine:
a) La altura, medida desde la superficie de la Luna, a la que se encuentra el satélite orbitando así como su período de revolución alrededor de la misma.
b) La energía mecánica del satélite a dicha altura.
Datos: Constante de la Gravitación Universal, G = $6,67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ;
Radio de la Luna, R_L=1740 km; Masa de la Luna, M_L=$7,35\times10^{22}$ kg

B. Pregunta 1.- Sobre la superficie de la Tierra y a nivel del mar se coloca un péndulo simple de longitud L = 2 m y se obtiene experimentalmente un valor de la aceleración local de la gravedad g_o = 9,81 m s^{-2}. El experimento se realiza haciendo oscilar el péndulo en régimen de pequeñas oscilaciones.
a) Calcule la constante de Gravitación Universal y el período del péndulo cuando se encuentra oscilando a nivel del mar.
b) Repetimos el experimento en la cima de una montaña de 8 km de altura. Calcule la aceleración local de la gravedad en ese punto, así como la longitud que tendría que tener el péndulo para que su periodo fuese el mismo que el que tiene a nivel del mar.
Datos: Masa de la Tierra, M_T = $5,97\times10^{24}$ kg; Radio de la Tierra, R_T =$6,37\times10^6$ m

2013-Junio

A. Pregunta 3.- Calcule:
a) La densidad media del planeta Mercurio, sabiendo que posee un radio de 2440 km y una intensidad de campo gravitatorio en su superficie de 3,7 N kg^{-1}.
b) La energía necesaria para enviar una nave espacial de 5000 kg de masa desde la superficie del planeta a una órbita en la que el valor de la intensidad de campo gravitatorio sea la cuarta parte de su valor en la superficie.
Dato: Constante de la Gravitación Universal, G = $6,67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

B. Pregunta 5.- Urano es un planeta que describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Razone la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:
a) El módulo del momento angular, respecto a la posición del Sol, en el afelio es mayor que en el perihelio y lo mismo ocurre con el módulo del momento lineal.
b) La energía mecánica es menor en el afelio que en el perihelio y lo mismo ocurre con la energía potencial.

2013-Modelo

A. Pregunta 1.- Un cierto planeta esférico tiene una masa M = $1,25\times10^{23}$ kg y un radio R =$1,5\times10^6$ m. Desde su superficie se lanza verticalmente hacia arriba un objeto, el cual alcanza una altura máxima de R/2. Despreciando rozamientos, determine:
a) La velocidad con que fue lanzado el objeto.
b) La aceleración de la gravedad en el punto más alto alcanzado por el objeto.
Datos: Constante de la Gravitación Universal, G = $6,67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

B. Pregunta 1.- Una nave espacial de 800 kg de masa realiza una órbita circular de 6000 km de radio alrededor de un planeta. Sabiendo que la energía mecánica de la nave es E_M = - $3,27\times 10^8$ J, determine:
a) La masa del planeta.
b) La velocidad angular de la nave en su órbita.
Datos: Constante de la Gravitación Universal, G = $6,67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

2012-Septiembre

A. Pregunta 2.- Un satélite artificial de 400 kg describe una órbita circular de radio 5/2 R_T alrededor de la Tierra. Determine:
a) El trabajo que hay que realizar para llevar al satélite desde la órbita circular de radio 5/2 R_T a otra órbita circular de radio $5R_T$ y mantenerlo en dicha órbita.
b) El periodo de rotación del satélite en la órbita de radio $5R_T$.
Datos: Constante de la Gravitación Universal, $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg ; Radio de la Tierra, $R_T = 6{,}37\times10^6$ m

B. Pregunta 2.- La aceleración de la gravedad en la Luna es 0,166 veces la aceleración de la gravedad en la Tierra y el radio de la Luna es 0,273 veces el radio de la Tierra. Despreciando la influencia de la Tierra y utilizando exclusivamente los datos aportados, determine:
a) La velocidad de escape de un cohete que abandona la Luna desde su superficie.
b) El radio de la órbita circular que describe un satélite en torno a la Luna si su velocidad es de 1,5 km s^{-1}.
Datos: Constante de la Gravitación Universal, $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg ; Radio de la Tierra, $R_T = 6{,}37\times10^6$ m

2012-Junio

A. Pregunta 1.- Un satélite de masa m gira alrededor de la Tierra describiendo una órbita circular a una altura de 2×10^4 km sobre su superficie.
a) Calcule la velocidad orbital del satélite alrededor de la Tierra.
b) Suponga que la velocidad del satélite se anula repentina e instantáneamente y éste empieza a caer sobre la Tierra. Calcule la velocidad con la que llegaría el satélite a la superficie de la misma. Considere despreciable el rozamiento del aire.
Datos: Constante de la Gravitación Universal, $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg ; Radio de la Tierra, $R_T = 6{,}37\times10^6$ m

B. Pregunta 1.- Una nave espacial de 3000 kg de masa describe, en ausencia de rozamiento, una órbita circular en torno a la Tierra a una distancia de $2{,}5\times10^4$ km de su superficie. Calcule:
a) El período de revolución de la nave espacial alrededor de la Tierra.
b) Las energías cinética y potencial de la nave en dicha órbita.
Datos: Constante de la Gravitación Universal, $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg ; Radio de la Tierra, $R_T = 6{,}37\times10^6$ m

2012-Modelo

A. Pregunta 1.- Se ha descubierto un planeta esférico de 4100 km de radio y con una aceleración de la gravedad en su superficie de 7,2 m s^{-2}.
a) Calcule la masa del planeta.
b) Calcule la energía mínima necesaria que hay que comunicar a un objeto de 3 kg de masa para lanzarlo desde la superficie del planeta y situarlo a 1000 km de altura de la superficie, en una órbita circular en torno al mismo.
Dato: Constante de Gravitación $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

B. Pregunta 1.-Un satélite artificial está situado en una órbita circular en torno a la Tierra a una altura de su superficie de 2500 km. Si el satélite tiene una masa de 1100 kg:
a) Calcule la energía cinética del satélite y su energía mecánica total.
b) Calcule el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra.
Datos: Constante de Gravitación $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Radio de la Tierra = 6370 km.; Masa de la Tierra = $5{,}98\times10^{24}$ kg.

2011-Septiembre-Coincidentes

A. Problema 1.- Un satélite artificial de masa 200 kg se mueve alrededor de la Tierra en una órbita elíptica definida por una distancia al perigeo (posición más próxima al centro de la Tierra) de $7{,}02\times10^6$ m y una distancia al apogeo (posición más alejada al centro de la Tierra) de $10{,}30\times10^6$ m. Si en el perigeo el módulo de la velocidad es $8{,}22\times10^3$ m/s
a) ¿Cuál es módulo de la velocidad en el apogeo?
b) Determine el módulo y la dirección del momento angular del satélite.
c) Determine la velocidad areolar del satélite.
d) Determine la energía mecánica del satélite.
Dato: Constante de Gravitación Universal $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2};Masa de la Tierra = $5{,}98\times10^{24}$ kg.

2011-Septiembre

A. Cuestión 1.- a) Exprese la aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta en función

de la masa del planeta, de su radio y de la constante de gravitación universal G.
b) Si la aceleración de la gravedad sobre la superficie terrestre vale 9,8 m s^{-2}, calcule la aceleración de la gravedad a una altura sobre la superficie terrestre igual al radio de la Tierra.
B. Problema 1.- Una sonda espacial de masa m = 1000 kg se encuentra situada en una órbita circular alrededor de la Tierra de radio r =2,26×R_T, siendo R_T el radio de la Tierra.
a) Calcule la velocidad de la sonda en esa órbita.
b) ¿Cuánto vale su energía potencial?
c) ¿Cuánto vale su energía mecánica?
d) ¿Qué energía hay que comunicar a la sonda para alejarla desde dicha órbita hasta el infinito?
Datos: *Masa de la Tierra = 5,98×10^{24} kg; Radio de la Tierra = 6,37×10^{6} m.*
Constante de Gravitación Universal G = 6,67×10^{-11} N m^2 kg^{-2}.

2011-Junio-Coincidentes

B. Cuestión 1 .- Un satélite de masa m = 200 kg se sitúa en una órbita circular a 3×10^7 m del centro de la Tierra.
a) Calcule su energía mecánica total, así como sus energías potencial y cinética.
b) Si se desea llevar el satélite a una órbita situada a 4×10^7 m del centro de la Tierra, ¿cuál será la energía necesaria mínima para realizar este cambio de órbita?
Datos: Constante de Gravitación Universal G = 6,67×10^{-11} N m^2 kg^{-2};
Masa de la Tierra = 5,97×10^{24} kg.

2011-Junio

A. Cuestión 1.- Un satélite que gira con la misma velocidad angular que la Tierra (geoestacionario) de masa m=5×10^3 kg, describe una órbita circular de radio r=3,6×10^7 m.
Determine:
a) La velocidad areolar del satélite.
b) Suponiendo que el satélite describe su órbita en el plano ecuatorial de la Tierra, determine el módulo, la dirección y el sentido del momento angular respecto de los polos de la Tierra.
Dato: Periodo de rotación terrestre= 24 h.
B. Problema 1.- Sabiendo que el periodo de revolución lunar es de 27,32 días y que el radio de la órbita es R_L = 3,84×10^8 m, calcule:
a) La constante de gravitación universal, G (obtener su valor a partir de los datos del problema).
b) La fuerza que la Luna ejerce sobre la Tierra y la de la Tierra sobre la Luna.
c) El trabajo necesario para llevar un objeto de 5000 kg desde la Tierra hasta la Luna (Despreciar los radios de la Tierra y de la Luna, en comparación con su distancia)
d) Si un satélite se sitúa entre la Tierra y la Luna a una distancia de la Tierra de R_L/4, ¿Cuál es la relación de fuerzas debidas a la Tierra y a la Luna?
Datos: Masa de la Tierra M_T = 5,98×10^{24} kg; masa de la Luna M_L = 7,35×10^{22} kg; Radio de la Tierra 6,37×10^6 m; radio de la Luna 1,74×10^6 m.

2011-Modelo

A. Problema 1.- Un planeta orbita alrededor de una estrella de masa M. La masa del planeta es m = 10^{24} kg y su órbita es circular de radio r = 10^8 km y periodo T = 3 años terrestres. Determine:
a) La masa M de la estrella.
b) La energía mecánica del planeta.
c) El módulo del momento angular del planeta respecto al centro de la estrella.
d) La velocidad angular de un segundo planeta que describiese una órbita circular de radio igual a 2 r alrededor de la estrella.
Datos: Constante de Gravitación Universal G= 6,67 10^{-11} N m^2 kg^{-2} Considere 1 año terrestre = 365 días
B. Cuestión 1.- Dos satélites de masas m_A y m_B describen sendas órbitas circulares alrededor de la Tierra, siendo sus radios orbitales r_A y r_B respectivamente. Conteste razonadamente a las siguientes preguntas:
a) Si $m_A = m_B$ y $r_A > r_B$, ¿cuál de los dos satélites tiene mayor energía cinética?
b) Si los dos satélites estuvieran en la misma órbita ($r_A = r_B$) y tuviesen distinta masa ($m_A < m_B$), ¿cuál de los dos tendría mayor energía cinética?

2010-Septiembre-Fase General

A. Problema 1.- *(Enunciado casi idéntico a 2008-Septiembre-A-Problema 2)*
Un satélite artificial de 100 kg se mueve en una órbita circular alrededor de la Tierra con una velocidad de 7,5 km/s. Calcule:

a) El radio de la órbita.
b) La energía potencial del satélite.
c) La energía mecánica del satélite.
d) La energía que habría que suministrar a este satélite para que cambiara su órbita a otra con el doble de radio.
Datos: Constante de Gravitación Universal G= 6,67 10^{-11} N m^2 kg^{-2} Masa de la Tierra M_T = 5,98×10^{24} kg; Radio de la Tierra R_T = 6370 km
***B.* Cuestión 1.-** Considerando que la órbita de la Luna alrededor de la Tierra es una órbita circular, deduzca:
a) La relación entre la energía potencial gravitatoria y la energía cinética de la Luna en su órbita.
b) La relación entre el periodo orbital y el radio de la órbita descrita por la Luna.

2010-Septiembre-Fase Específica

A. Cuestión 1.- Un cometa se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. Explique en qué punto de su órbita, afelio (punto más alejado del Sol) o perihelio (punto más cercano al Sol) tiene mayor valor:
a) La velocidad. b) La energía mecánica.
B. Cuestión 1.- Un asteroide está situado en una órbita circular alrededor de una estrella y tiene una energía total de -10^{10} J. Determine: a) La relación que existe entre las energías potencial y cinética del asteroide.
b) Los valores de ambas energías potencial y cinética.

2010-Junio-Coincidentes

A. Problema 1.- Un planeta tiene dos satélites, A y B, que describen órbitas circulares de radios 8400 km y 23500 km respectivamente. El satélite A, en su desplazamiento en torno al planeta, barre un área de 8210 km^2 en un segundo. Sabiendo que la fuerza que ejerce el planeta sobre el satélite A es 37 veces mayor que sobre el satélite B:
a) Determine el periodo del satélite A.
b) Halle la masa del planeta.
c) Obtenga la relación entre las energías mecánicas de ambos satélites.
d) Calcule el vector momento angular del satélite A, si tiene una masa de 1,08×10^{16} kg.
Dato: Constante de Gravitación Universal G= 6,67 10^{-11} N m^2 kg^{-2}
B. Cuestión 1.- a) A partir de su significado físico, deduzca la expresión de la velocidad de escape de un cuerpo desde la superficie terrestre en función de la masa y el radio del planeta.
b) Sabiendo que la intensidad del campo gravitatorio de la Luna es 1/6 la de la Tierra, obtenga la relación entre las velocidades de escape de ambos astros.
Dato: R_T=4R_L R_T=Radio de la Tierra R_L=Radio de la Luna

2010-Junio-Fase General

A. Cuestión 1.- a) Enuncie la 2ª ley de Kepler. Explique en qué posiciones de la órbita elíptica la velocidad del planeta es máxima y dónde es mínima.
b) Enuncie la 3ª ley de Kepler. Deduzca la expresión de la constante de esta ley en el caso de órbitas circulares.
B. Problema 1.- Io, un satélite de Júpiter, tiene una masa de 8,9×10^{22} kg, un periodo orbital de 1,77 días, y un radio medio orbital de 4,22×10^8 m. Considerando que la órbita es circular con este radio, determine:
a) La masa de Júpiter.
b) La intensidad de campo gravitatorio, debida a Júpiter, en los puntos de la órbita de Io.
c) La energía cinética de Io en su órbita.
d) El módulo del momento angular de Io respecto al centro de su órbita.
Dato: Constante de Gravitación Universal G= 6,67 10^{-11} N m^2 kg^{-2}

2010-Junio-Fase Específica

A. Cuestión 1.- *(Enunciado idéntico a 2005-Junio-Cuestión 2)*
B. Problema 1.- Un satélite de 1000 kg de masa describe una órbita circular de 12×10^3 km de radio alrededor de la Tierra. Calcule:
a) El módulo del momento lineal y el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra. ¿Cambian las direcciones de estos vectores al cambiar la posición del satélite en su órbita?
b) El periodo y la energía mecánica del satélite en la órbita.
Datos: Masa de la Tierra M_T = 5,98×10^{24} kg

Constante de Gravitación Universal G= 6,67 10^{-11} N m^2 kg^{-2}

2010-Modelo

A. Problema 1.- (B. Problema 1 en Modelo preliminar que no tenía dos opciones disjuntas)
Desde un punto de la superficie terrestre se lanza verticalmente hacia arriba un objeto de 100 kg que llega hasta una altura de 300 km. Determine:
a) La velocidad de lanzamiento.
b) La energía potencial del objeto a esa altura.
Si estando situado a la altura de 300 km, queremos convertir el objeto en satélite de forma que se ponga en órbita circular alrededor de la Tierra:
c) ¿Qué energía adicional habrá que comunicarle?
d) ¿Cuál será la velocidad y el periodo del satélite en esa órbita?
Datos: Constante de Gravitación G = 6,67×10^{-11} N m^2 kg^{-2}
Masa de la Tierra M_T = 5,98×10^{24} kg; Radio de la Tierra R_T = 6370 km

B. Cuestión 1.- (Cuestión 1 en Modelo preliminar que no tenía dos opciones disjuntas)
a) ¿Cuál es el periodo de un satélite artificial que gira alrededor de la Tierra en una órbita circular cuyo radio es un cuarto del radio de la órbita lunar?
b) ¿Cuál es la relación entre la velocidad del satélite y la velocidad de Luna en sus respectivas órbitas?
Dato: Periodo de la órbita lunar T_L = 27,32 días

2009-Septiembre

Cuestión 1.- Razone si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:
a) El valor de la velocidad de escape de un objeto lanzado desde la superficie de la Tierra depende del valor de la masa del objeto.
b) En el movimiento elíptico de un planeta en torno al Sol la velocidad del planeta en el perihelio (posición más próxima al Sol) es mayor que la velocidad en el afelio (posición más alejada del Sol).

2009-Junio

Cuestión 1.- Un satélite artificial de 500 kg que describe una órbita circular alrededor de la Tierra se mueve con una velocidad de 6,5 km/s. Calcule:
a) La energía mecánica del satélite.
b) La altura sobre la superficie de la Tierra a la que se encuentra.
Datos: Constante de Gravitación Universal G = 6,67×10^{-11} N m^2 kg^{-2}
Masa de la Tierra M_T=5,98×10^{24} kg Radio de la Tierra R_T=6,37×10^6 m

B. Problema 1.- Suponiendo que los planetas Venus y la Tierra describen órbitas circulares alrededor del Sol, calcule:
a) El periodo de revolución de Venus.
b) Las velocidades orbitales de Venus y de la Tierra.
Datos: Distancia de la Tierra al Sol: 1,49×10^{11} m Distancia de Venus al Sol: 1,08×10^{11} m
Periodo de revolución de la Tierra: 365 días

2009-Modelo

Cuestión 1.- a) Enuncie la tercera ley de Kepler y demuéstrela para el caso de órbitas circulares.
b) Aplique dicha ley para calcular la masa del Sol suponiendo que la órbita de la Tierra alrededor del Sol es circular con un radio medio de 1,49×10^8 km.
Dato: Constante de Gravitación Universal G = 6,67×10^{-11} N m^2 kg^{-2}

2008-Septiembre

Cuestión 1.- Calcule el módulo del momento angular de un objeto de 1000 kg respecto al centro de la Tierra en los siguientes casos:
a) Se lanza desde el polo norte perpendicularmente a la superficie de la Tierra con una velocidad de 10 km/s.
b) Realiza un órbita circular alrededor de la Tierra en el plano ecuatorial a una distancia de 600 km de su superficie.
Datos: Constante de Gravitación Universal G = 6,67×10^{-11} N m^2 kg^{-2}
Masa de la Tierra M_T=5,98×10^{24}kg; Radio de la Tierra R_T=6,37×10^6m

A. Problema 2.- Un satélite artificial de 100 kg se mueve en una órbita circular alrededor de la Tierra con una velocidad de 7,5 km/s. Calcule:
a) El radio de la órbita.
b) La energía potencial del satélite.

c) La energía mecánica del satélite.
d) La energía que habría que suministrar al satélite para que describa una órbita circular con radio doble que el de la órbita anterior.
Datos: Constante de Gravitación Universal $G = 6,67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
Masa de la Tierra $M_T = 5,98\times10^{24}$ kg; Radio de la Tierra $R_T=6,37\times10^6$m

2008-Junio

Cuestión 2.- Una sonda de masa 5000 kg se encuentra en una órbita circular a una altura sobre la superficie terrestre de 1,5 R_T. Determine: a) el momento angular de la sonda en esa órbita respecto al centro de la Tierra; b) la energía que hay que comunicar a la sonda para que escape del campo gravitatorio terrestre desde esa órbita.
Datos: Constante de Gravitación Universal $G = 6,67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
Masa de la Tierra $M_T = 5,98\times10^{24}$ kg; Radio de la Tierra $R_T=6,37\times10^6$m

2008-Modelo

Cuestión 1.- Cuatro masas puntuales idénticas de 6 kg cada una están situadas en los vértices de un cuadrado de lado igual a 2 m. Calcule:
a) El campo gravitatorio que crean las cuatro masas en el centro de cada lado del cuadrado.
b) El potencial gravitatorio creado por las cuatro masas en el centro del cuadrado, tomando el infinito como origen de potenciales.
Datos: Constante de Gravitación Universal $G = 6,67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

B. Problema 1.- Un satélite artificial de 200 kg describe una órbita circular alrededor de la Tierra. La velocidad de escape a la atracción terrestre desde esa órbita es la mitad que la velocidad de escape desde la superficie terrestre.
a) Calcule la fuerza de atracción entre la Tierra y el satélite.
b) Calcule el potencial gravitatorio en la órbita del satélite.
c) Calcule la energía mecánica del satélite en la órbita.
d) ¿Se trata de un satélite geoestacionario? Justifique la respuesta.
Datos: Constante de Gravitación Universal $G = 6,67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
Masa de la Tierra $M_T = 5,98\times10^{24}$ kg; Radio de la Tierra $R_T=6,37\times10^6$m

2007-Septiembre

Cuestión 1. a) ¿Cuál es la aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta esférico cuyo radio es la mitad del de la Tierra y posee la misma densidad media? b) ¿Cuál sería el período de la órbita circular de un satélite situado a una altura de 400 km respecto a la superficie del planeta?
Datos: Radio de la Tierra R_T=6371 km Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra g=9,8 m s^{-2}

A. Problema 1.- Un satélite de masa 20 kg se coloca en órbita circular sobre el ecuador terrestre de modo que su radio se ajusta para que dé una vuelta a la Tierra cada 24 horas. Así se consigue que siempre se encuentre sobre el mismo punto respecto a la Tierra (satélite geoestacionario).
a) ¿Cuál debe ser el radio de su órbita? b) ¿Cuánta energía es necesaria para situarlo en dicha órbita?
Datos: Constante de Gravitación Universal $G = 6,67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
Masa de la Tierra $M_T = 5,96\times10^{24}$ kg Radio de la Tierra R_T = 6371 km

2007-Junio

Cuestión 1.- Sabiendo que la aceleración de la gravedad en un movimiento de caída libre en la superficie de la Luna es un sexto de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra y que el radio de la Luna es aproximadamente 0,27 R_T (siendo R_T el radio terrestre), calcule: a) la relación entre las densidades medias $\rho_{Luna} / \rho_{Tierra}$; b) la relación entre las velocidades de escape de un objeto desde sus respectivas superficies $(v_e)_{Luna} / (v_e)_{Tierra}$.

B. Problema 1.- Fobos es un satélite de Marte que gira en una órbita circular de 9380 km de radio, respecto al centro del planeta, con un periodo de revolución de 7,65 horas. Otro satélite de Marte, Deimos, gira en una órbita de 23460 km de radio. Determine:
a) La masa de Marte.
b) El período de revolución del satélite Deimos.
c) La energía mecánica del satélite Deimos.
d) El módulo del momento angular de Deimos respecto al centro de Marte.
Datos: Constante de Gravitación Universal $G = 6,67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
Masa de Fobos = $1,1\times10^{16}$ kg; Masa de Deimos = $2,4\times10^{15}$ kg

2007-Modelo

Cuestión 1.- Un objeto de 5 kg de masa posee una energía potencial gravitatoria Ep=-2×10^{8}J cuando se encuentra a cierta distancia de la Tierra.
a) Si el objeto a esa distancia estuviera describiendo una órbita circular, ¿cuál sería su velocidad?
b) Si la velocidad del objeto a esa distancia fuese de 9 km/s, ¿cuál sería su energía cinética? ¿Podría el objeto estar describiendo una órbita elíptica en este caso?

2006-Septiembre

Cuestión 1.- a) Desde la superficie de la Tierra se lanza verticalmente hacia arriba un objeto con una velocidad v. Si se desprecia el rozamiento, calcule el valor de v necesario para que el objeto alcance una altura igual al radio de la Tierra.
b) Si se lanza el objeto desde la superficie de la Tierra con una velocidad doble a la calculada en el apartado anterior, ¿escapará o no del campo gravitatorio terrestre?
Datos: Masa de la Tierra M_T = 5,98×10^{24} kg   Radio de la Tierra R_T = 6370 km
Constante de Gravitación G = 6,67×10^{-11} N m^2 kg^{-2}

2006-Junio

A. Problema 1.- Un satélite artificial describe una órbita circular alrededor de la Tierra. En esta órbita la energía mecánica del satélite es -4,5x10^9 J y su velocidad es 7610 m s^{-1}. Calcule:
a) El módulo del momento lineal del satélite y el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra.
b) El periodo de la órbita y la altura a la que se encuentra el satélite.
Datos: Constante de Gravitación Universal G = 6,67×10^{-11} N m^2 kg^{-2}
Masa de la Tierra M_T= 5,98x 10^{24} kg   Radio de la Tierra $R_{T=}$ 6,37x10^6 m

Cuestión 1.- Llamando g_0 y V_0 a la intensidad de campo gravitatorio y al potencial gravitatorio en la superficie terrestre respectivamente, determine en función del radio de la Tierra:
a) La altura sobre la superficie terrestre a la cual la intensidad de campo gravitatorio es $g_0/2$.
b) La altura sobre la superficie terrestre a la cual el potencial gravitatorio es $V_0/2$.

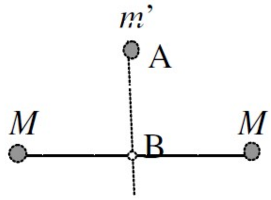
2006-Modelo

Cuestión 1.- a) Enuncie las tres leyes de Kepler sobre el movimiento planetario.
b) Si el radio de la órbita de la Tierra es 1,50×10^{11} m y el de Urano 2,87×10^{12} calcule el periodo orbital de Urano.

A. Problema 1.- Se lanza una nave de masa m = 5×10^3 kg desde la superficie de un planeta de radio R_1 = 6×10^3 km y masa M_1 = 4×10^{24} kg, con velocidad inicial v_0 = 2×10^4 m/s, en dirección hacia otro planeta del mismo radio R_2 = R_1 y masa M_2 = 2 M_1, siguiendo la línea recta que une los centros de ambos planetas. Si la distancia entre dichos centros es D = 4,83x10^{10} m, determine:
a) La posición del punto P en el que la fuerza neta sobre la nave es cero.
b) La energía cinética con la que llegará la nave a la superficie del segundo planeta.
Dato: Constante de Gravitación Universal, G = 6,67·10^{-11} N m^2 kg^{-2}

2005-Septiembre

Cuestión 2.- Dos masas iguales, M=20 kg, ocupan posiciones fijas separadas una distancia de 2 m, según indica la figura. Una tercera masa, m'=0,2 kg, se suelta desde el reposo en un punto A equidistante de las dos masas anteriores y a una distancia de 1 m de la línea que las une (AB=1 m). Si no actúan más que las acciones gravitatorias entre estas masas, determine:



a) La fuerza ejercida (módulo, dirección y sentido) sobre la masa m' en la posición A.
b) Las aceleraciones de la masa m' en las posiciones A y B.
Dato: *Constante de Gravitación Universal G = 6,67×10^{-11} N m^2 kg^{-2}*

A. Problema 1.- Desde la superficie terrestre se lanza un satélite de 400 kg de masa hasta situarlo en una órbita circular a una distancia del centro de la Tierra igual a las 7/6 partes del radio terrestre. Calcule:
a) La intensidad de campo gravitatorio terrestre en los puntos de la órbita del satélite.
b) La velocidad y el periodo que tendrá el satélite en la órbita.
c) La energía mecánica del satélite en la órbita
d) La variación de la energía potencial que ha experimentado el satélite al elevarlo desde la superficie de la Tierra hasta situarlo en su órbita.
Datos: Constante de Gravitación Universal G = 6,67×10^{-11} N m^2 kg^{-2}
Masa de la Tierra M_T = 5,98×10^{24} kg   Radio de la Tierra R_T = 6,37×10^6 m

2005-Junio

Cuestión 2.- a) Deduzca la expresión de la energía cinética de un satélite en órbita circular alrededor de un planeta en función del radio de la órbita y de las masas del satélite y del planeta.
b) Demuestre que la energía mecánica del satélite es la mitad de su energía potencial.
A. Problema 1.- Un satélite artificial de la Tierra de 100 kg de masa describe una órbita circular a una altura de 655 km. Calcule:
a) El periodo de la órbita.
b) La energía mecánica del satélite.
c) El módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra.
d) El cociente entre los valores de la intensidad de campo gravitatorio terrestre en el satélite y en la superficie de la Tierra.
Datos: Masa de la Tierra M_T= 5,98×10^{24} kg Radio de la Tierra R_T= 6,37×10^{6} m
Constante de Gravitación Universal G = 6,67×10^{-11} N m^{2} kg^{-2}

2005-Modelo

Cuestión 1.- Razone si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:
a) Un objeto de masa m_1 necesita una velocidad de escape de la Tierra el doble que la que necesita otro objeto de masa $m_2 = m_1/2$
b) Se precisa realizar más trabajo para colocar en una misma órbita un satélite de masa m_1 que otro satélite de masa $m_2 = m_1/2$, lanzados desde la superficie de la Tierra.

2004-Septiembre

Cuestión 1.- La luz solar tarda 8,31 minutos en llegar a la Tierra y 6,01 minutos en llegar a Venus. Suponiendo que las órbitas descritas por ambos planetas son circulares, determine: a) el periodo orbital de Venus en torno al Sol sabiendo que el de la Tierra es de 365,25 días; b) la velocidad con que se desplaza Venus en su órbita.
Dato: Velocidad de la luz en el vacío 3x10^{8} m/s
A. Problema 1.- Un planeta esférico tiene 3200 km de radio y la aceleración de la gravedad en su superficie es 6,2 ms^{-2} Calcule:
a) La densidad media del planeta y la velocidad de escape desde su superficie.
b) La energía que hay que comunicar a un objeto de 50 kg de masa para lanzarlo desde la superficie del planeta y ponerlo en órbita circular alrededor del mismo, de forma que su periodo sea de 2 horas.
Dato: Constante de Gravitación Universal G = 6,67x10^{-11} Nm^{2} kg^{-2}

2004-Junio

Cuestión 2.- Plutón describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Indique para cada una de las siguientes magnitudes si su valor es mayor, menor o igual en el afelio (punto más alejado del Sol) comparado con el perihelio (punto más próximo al Sol): a) momento angular respecto a la posición del Sol; b) momento lineal; c) energía potencial; d) energía mecánica.

2004-Modelo

Cuestión 1.- La velocidad de un asteroide es de 20 km/s en el perihelio y de 14 km/s en el afelio. Determine en esas posiciones cuál es la relación entre:
a) Las distancias al Sol en torno al cual orbitan.
b) Las energías potenciales del asteroide.
A. Problema 1.- La sonda espacial Mars Odissey describe una órbita circular en tomo a Marte a una altura sobre su superficie de 400 km. Sabiendo que un satélite de Marte describe órbitas circulares de 9390 km de radio y tarda en cada una de ellas 7,7 h, calcule:
a) El tiempo que tardará la sonda espacial en dar una vuelta completa.
b) La masa de Marte y la aceleración de la gravedad en su superficie.
Datos: Constante de Gravitación Universal G = 6,67x10^{-11} Nm^{2} kg^{-2}
Radio de Marte R_M = 3390 km

2003-Septiembre

A. Problema 1.- Un satélite artificial de 100 kg de masa se encuentra girando alrededor de la Tierra en una órbita circular de 7100 km de radio. Determine:
a) El periodo de revolución del satélite.
b) El momento lineal y el momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra.
c) La variación de energía potencial que ha experimentado el satélite al elevarlo desde la superficie de la Tierra hasta esa posición. d) Las energías cinética y total del satélite.
Datos: Masa de la Tierra M_T= 5,98x 10^{24} kg
Radio de la Tierra R_T = 6,37 x 10^{6} m

Constante de Gravitación Universal $G = 6,67x\ 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$

2003-Junio

Cuestión 1.- Suponiendo un planeta esférico que tiene un radio la mitad del radio terrestre e igual densidad que la Tierra, calcule:
a) La aceleración de la gravedad en la superficie de dicho planeta.
b) La velocidad de escape de un objeto desde la superficie del planeta, si la velocidad de escape desde la superficie terrestre es 11,2 km/s.
Datos: Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra $g = 9,81\ m\ s^{-2}$

A. Problema 1.- Mercurio describe una órbita elíptica alrededor del Sol. En el afelio su distancia al Sol es de $6,99x10^{10}$ m, y su velocidad orbital es de $3,88x10^4$ m/s, siendo su distancia al Sol en el perihelio de $4,60x\ 10^{10}$ m.
a) Calcule la velocidad orbital de Mercurio en el perihelio.
b) Calcule las energías cinética, potencial y mecánica de Mercurio en el perihelio.
c) Calcule el módulo de su momento lineal y de su momento angular en el perihelio.
d) De las magnitudes calculadas en los apartados anteriores, decir cuáles son iguales en el afelio.
Datos: Masa de Mercurio $M_M = 3,18x10^{23}$ kg
Masa del Sol $M_S= 1,99x10^{30}$ kg
Constante de Gravitación Universal $G = 6,67x\ 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$

2003-Modelo

Cuestión 1.- Un planeta esférico tiene una masa igual a 27 veces la masa de la Tierra, y la velocidad de escape para objetos situados cerca de su superficie es tres veces la velocidad de escape terrestre. Determine:
a) La relación entre los radios del planeta y de la Tierra.
b) La relación entre las intensidades de la gravedad en puntos de la superficie del planeta y de la Tierra.

A. Problema 1.- Júpiter tiene aproximadamente una masa 320 veces mayor que la de la Tierra y un volumen 1320 veces superior al de la Tierra. Determine:
a) A que altura h sobre la superficie de Júpiter debería encontrarse un satélite, en órbita circular en torno a este planeta, para que tuviera un período de 9 horas 50 minutos.
b) La velocidad del satélite en dicha órbita.
Datos: Gravedad en la superficie de la Tierra $g=9,8\ ms^{-2}$
Radio medio de la Tierra $R_T=6,37x\ 10^6$

2002-Septiembre

A. Problema 1 .- Se pretende colocar un satélite artificial de forma que gire en una órbita circular en el plano del ecuador terrestre y en el sentido de rotación de la Tierra. Si se quiere que el satélite pase periódicamente sobre un punto del ecuador cada dos días, calcule:
a) La altura sobre la superficie terrestre a la que hay que colocar el satélite.
b) La relación entre la energía que hay que comunicar a dicho satélite desde el momento de su lanzamiento en la superficie terrestre para colocarlo en esa órbita y la energía mínima de escape.
Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6,67x\ 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$
Radio de la Tierra: R_T=6370 km
Masa de la Tierra: $M_T=5,98x\ 10^{24}$ kg

2002-Junio

Cuestión 1.- Un planeta esférico tiene un radio de 3000 km, y la aceleración de la gravedad en su superficie es 6 m/s^2. a) ¿Cuál es su densidad media? b) ¿Cual es la velocidad de escape para un objeto situado en la superficie de este planeta?
Dato: *Constante de Gravitación Universal: $G = 6,67x\ 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$*

A. Problema 1.- La velocidad angular con la que un satélite describe una órbita circular en torno al planeta Venus es $\omega_1=1,45x10^{-4}$ rad/s y su momento angular respecto al centro de la órbita es $L_1=2,2x10^{12}\ kg\ m^2\ s^{-1}$
a) Determine el radio r_1 de la órbita del satélite y su masa.
b) ¿Qué energía sería preciso invertir para cambiar a otra órbita circular con velocidad angular $\omega_2=10^{-4}$ rad/s?
Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6,67x\ 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$
Masa de Venus: $M_V=4,87x\ 10^{24}$ kg

2002-Modelo

Cuestión 1.- a) ¿A qué altitud tendrá una persona la mitad del peso que tiene sobre la superficie

terrestre? Exprese el resultado en función del radio terrestre.
b) Si la fuerza de la gravedad actúa sobre todos los cuerpos en proporción a sus masas, ¿por qué no cae un cuerpo pesado con mayor aceleración que un cuerpo ligero?
A. Problema 1.- Dos planetas de masas iguales orbitan alrededor de una estrella de masa mucho mayor,. El planeta 1 se mueve en una órbita circular de radio 10^{11} m y período de 2 años. El planeta 2 se mueve en una órbita elíptica, siendo su distancia en la posición más próxima a la estrella 10^{11} m y en la más alejada $1,8x10^{11}$ m.
a) ¿Cuál es la masa de la estrella?
b) Halle el período de la órbita del planeta 2.
c) Utilizando los principios de conservación del momento angular y de la energía mecánica, hallar la velocidad del planeta 2 cuando se encuentra en la posición más cercana a la estrella.
Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6,67x\ 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$

2001-Septiembre

Cuestión 1.- Un proyectil de masa 10 kg se dispara verticalmente desde la superficie de la Tierra con una velocidad de 3200 m/s:
a) ¿Cuál es la máxima energía potencial que adquiere?
b) ¿En qué posición se alcanza?
Datos: Gravedad en la superficie de la Tierra = 9,8 m s^{-2}; Radio medio de la Tierra = $6,37x10^6$ m

2001-Junio

Cuestión 1.- En el movimiento circular de un satélite en torno a la Tierra, determine:
a) La expresión de la energía cinética en función de las masas del satélite y de la Tierra y del radio de la órbita.
b) La relación que existe entre su energía mecánica y su energía potencial.
A. Problema 1.- Dos satélites artificiales de la Tierra S_1 y S_2 describen en un sistema de referencia geocéntrico dos órbitas circulares, contenidas en un mismo plano, de radios r_1=8000 km y r_2=9034 km respectivamente. En un instante inicial dado, los satélites están alineados con el centro de la Tierra y situados del mismo lado:
a) ¿Qué relación existe entre las velocidades orbitales de ambos satélites?
b) ¿Qué relación existe entre los períodos orbitales de los satélites? ¿Qué posición ocupará el satélite S_2 cuando el satélite S_1 haya completado seis vueltas, desde el instante inicial?

2001-Modelo

Cuestión 1.- Determine la relación que existe entre la energía mecánica de un satélite que describe una órbita circular en torno a un planeta y su energía potencial.
A. Problema 1.- El período de revolución del planeta Júpiter en su órbita alrededor del Sol es aproximadamente 12 veces mayor que el de la Tierra en su correspondiente órbita. Considerando circulares las órbitas de los dos planetas, determine:
a) La razón entre los radios de las respectivas órbitas.
b) La razón entre las aceleraciones de los dos planetas en sus respectivas órbitas.

2000-Septiembre

Cuestión 1.- a) ¿Con qué frecuencia angular debe girar un satélite de comunicaciones, situado en una órbita ecuatorial, para que se encuentre siempre sobre el mismo punto de la Tierra?
b) ¿A qué altura sobre la superficie terrestre se encontrará el satélite citado en el apartado anterior?
Datos: Gravedad en la superficie de la Tierra = 9,8 m s^{-2} ; Radio medio de la Tierra = $6,37 \times 10^6$ m
A. Problema 1.- Un satélite artificial de 200 kg gira en una órbita circular a una altura h sobre la superficie de la Tierra. Sabiendo que a esa altura el valor de la aceleración de la gravedad es la mitad del valor que tiene en la superficie terrestre, averiguar:
a) La velocidad del satélite.
b) Su energía mecánica.
Datos: Gravedad en la superficie terrestre g = 9,8 m s^{-2}; Radio medio de la Tierra R = $6,37x\ 10^6$ m

2000-Junio

Cuestión 1.- a) Enuncie la primera y la segunda ley de Kepler sobre el movimiento planetario.
b) Compruebe que la segunda ley de Kepler es un caso particular del teorema de conservación del momento angular.
A. Problema 1- Se pone en órbita un satélite artificial de 600 kg a una altura de 1200 km sobre la superficie de la Tierra. Si el lanzamiento se ha realizado desde el nivel del mar, calcule:
a) Cuánto ha aumentado la energía potencial gravitatoria del satélite.

b) Qué energía adicional hay que suministrar al satélite para que escape a la acción del campo gravitatorio terrestre desde esa órbita.
Datos: Constante de Gravitación $G = 6,67x\ 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$
Masa de la Tierra $M_T = 5,98x10^{24}$ kg
Radio medio de la Tienta $R_T = 6,37x\ 10^6$ m

2000-Modelo

Cuestión 1.- El cometa Halley se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. En el perihelio (posición más próxima) el cometa está a $8,75x10^7$ km del Sol y en el afelio (posición más alejada) está a $5,26x10^9$ km del Sol.
a) ¿En cuál de los dos puntos tiene el cometa mayor velocidad? ¿Y mayor aceleración?
b) ¿En qué punto tiene mayor energía potencial? ¿Y mayor energía mecánica?

A. Problema 1.- Se coloca un satélite meteorológico de 1000 Kg en órbita circular, a 300 km sobre la superficie terrestre. Determine:
a) La velocidad lineal, la aceleración radial y el periodo en la órbita.
b) El trabajo que se requiere para poner en órbita el satélite.
Datos: Gravedad en ta superficie terrestre $g = 9,8\ m\ s^{-2}$
Radio medio terrestre $R_T = 6370$ km

Comentario general: aunque a veces en estas soluciones por abreviar no se incluyan explícitamente las deducciones de las expresiones, se suele exigir que en la respuesta se incluyan sin ponerlas directamente. Las deducciones exigidas en gravitación se pueden resumir en: demostración 3ª ley de Kepler para órbitas circulares (relación entre T, v y radio de órbita), velocidad de lanzamiento y de escape, expresión de energía cinética y mecánica en órbita circular, en general apoyadas en conservación de energía mecánica y en igualar igualar fuerza centrípeta y gravitatoria. La expresión de energía potencial gravitatoria se puede deducir como una integral, o al menos citar que se puede obtener así. En PAU dentro de gravitación hay problemas asociados a leyes de Kepler, que con LOMCE pasa a estar en 1º de Bachillerato.

2020-Modelo

A. Pregunta 1.-

a) La única fuerza que actúa el satélite es la gravitatoria y es radial si asumimos órbita circular. Deducimos la tercera ley de Kepler, planteando la segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta, y considerando órbita circular.

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R} \qquad v=\frac{2\pi R}{T}\Rightarrow R^3=\frac{GM}{4\cdot\pi^2}T^2\Rightarrow R=\sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2}$$

Si completa 15 órbitas en 24 h, el periodo es T=24/15 h. Sustituyendo valores numéricos

$$R=\sqrt[3]{\frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot5,97\cdot10^{24}}{4\pi^2}\left(\frac{24\cdot3600}{15}\right)^2}=6,94\cdot10^6\,m$$

Como se pide altura, $h=R-R_T=6,94\cdot10^6-6371\cdot10^3=5,69\cdot10^5$ m

b) b) Usamos directamente la expresión de energía potencial gravitatoria (la deducción implica integrar) y obtenemos la expresión de energía mecánica en órbita

$$E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}mv^2=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}m\frac{GM}{R}=\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R}$$

Numéricamente $E_m=\frac{-6,67\cdot10^{-11}\cdot5,97\cdot10^{24}\cdot5800}{2\cdot6,94\cdot10^6}=-1,66\cdot10^{11}\,J$

B. Pregunta 1.-.

a) La única fuerza que actúa el planeta es la gravitatoria y es radial al ser la órbita circular. Deducimos la tercera ley de Kepler, planteando la segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta, y considerando órbita circular.

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R} \qquad v=\frac{2\pi R}{T}\Rightarrow R^3=\frac{GM}{4\cdot\pi^2}T^2\Rightarrow R=\sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2}$$

Si completa 1 vuelta en 3 años terrestres, el periodo son los 3 años terrestres (usamos 365,25 días)

Sustituyendo valores numéricos $R=\sqrt[3]{\frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot6,0\cdot10^{30}}{4\pi^2}(3*365,25\cdot24\cdot3600)^2}=4,5\cdot10^{11}\,m$

b) Usando la definición de campo gravitatorio $g=G\frac{M_p}{R^2_{superficie}}\Rightarrow R^2_{superficie}=\frac{GM_p}{g}$

Usamos directamente la expresión de velocidad de escape, que se podría deducir

$$v_e=\sqrt{2\frac{GM_p}{R_{superficie}}}\Rightarrow M_p=\frac{v_e^2\cdot R_{superficie}}{2G}$$

Sustituyendo M_p $R^{\cancel{2}}_{superficie}=\cancel{G}\frac{v_e^2\cdot\cancel{R_{superficie}}}{2g\cancel{G}}=\frac{(11,2\cdot10^3)^2}{2\cdot15}=4,18\cdot10^6\,m$

$$M_p=\frac{g\,R^2_{superficie}}{G}=\frac{15\cdot(4,18\cdot10^6)^2}{6,67\cdot10^{-11}}=3,93\cdot10^{24}\,kg$$

2019-Julio-Coincidentes

A. Pregunta 1.-

a) La única fuerza que actúa la nave es la gravitatoria y es radial en una órbita circular. Deducimos la tercera ley de Kepler, planteando la segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta, y considerando órbita circular.

$$F_g=F_c \Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R} \quad v=\frac{2\pi R}{T} \Rightarrow R^3=\frac{GM}{4\cdot\pi^2}T^2 \Rightarrow R=\sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2}$$

En un satélite geoestacionario el periodo son 24 h. Sustituyendo valores numéricos

$$R=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}}{4\pi^2}(24\cdot3600)^2}=4{,}22\cdot10^7\,m$$

La velocidad orbital es $v=\frac{2\cdot\pi\cdot4{,}22\cdot10^7}{(24\cdot3600)}=3{,}1\cdot10^3\,m/s$

b) En la nueva órbita varía radio, periodo y velocidad. El periodo lo podemos calcular

-Con el mismo planteamiento del apartado anterior:

$$v=\frac{2\pi R}{T} \Rightarrow R^3=\frac{GM}{4\cdot\pi^2}T^2 \Rightarrow T=\sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}R^3}$$

Numéricamente $T=\sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}}(2\cdot4{,}22\cdot10^7)^2}=2{,}44\cdot10^5\,s$

-Usando la tercera ley de Kepler teniendo en cuenta que ambas órbitas son sobre mismo objeto centrales

$$\frac{T_1^2}{R_1^3}=\frac{T_2^2}{R_2^3} \Rightarrow T_2=T_1\sqrt{\frac{R_2^3}{R_1^3}}=24\cdot3600\cdot\sqrt{2^3}=2{,}44\cdot10^5\,s$$

La nueva velocidad orbital es $v=\frac{2\cdot\pi\cdot2\cdot4{,}22\cdot10^7}{(2{,}44\cdot10^5)}=2{,}17\cdot10^3\,m/s$

B. Pregunta 1.-

a) La velocidad de escape es la que debe tener un cuerpo para llegar a un punto infinitamente alejado con velocidad nula. Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica en un lanzamiento desde un punto A a una distancia R a un punto B infinitamente alejado: la energía mecánica se conserva dado que no hay fuerzas no conservativas como el rozamiento.

A (superficie): $E_p=-G\frac{Mm}{R};E_c=\frac{1}{2}mv_e^2$

B (∞): $E_p=0;E_c=0$

Como se conserva la energía mecánica, igualamos en A y en B y despejamos la velocidad de escape

$$-G\frac{M\cancel{m}}{R}+\frac{1}{2}\cancel{m}v_e^2=0 \Rightarrow v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}$$

Numéricamente para R=2R$_T$ $v_e=\sqrt{2\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}}{2\cdot6{,}37\cdot10^6}}=7{,}906\cdot10^3\,m/s$

b) La energía adicional requerida es la diferencia de energía entre los dos puntos

A (órbita, antes de aportar la energía): $E_m=E_m+E_p=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}mv^2=\frac{-1}{2}G\frac{Mm}{R}$

B (∞): $E_p=0;E_c=0$

La diferencia es $E(B)-E(A)=0-\frac{1}{2}\frac{GMm}{R}=\frac{1}{2}G\frac{Mm}{R}$

Numéricamente $E(B)-E(A)=\frac{1}{2}6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{5{,}97\cdot10^{24}\cdot10^3}{2\cdot6{,}37\cdot10^6}=1{,}56\cdot10^{10}\,J$

2019-Julio

A. Pregunta 1.-

a) La única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravitatoria y es radial al ser la órbita circular. Deducimos la tercera ley de Kepler, planteando la segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta, y considerando órbita circular.

$$F_g=F_c \Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R} \quad v=\frac{2\pi R}{T}\Rightarrow R^3=\frac{GM}{4\cdot\pi^2}T^2 \Rightarrow T=\sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}R^3}$$

Sustituyendo valores numéricos $T=\sqrt{\frac{4\pi^2\cdot(6{,}37\cdot10^6+5900\cdot10^3)^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}}}=1{,}35\cdot10^4\,s$

b) La energía requerida es la energía a aportar, que es la diferencia de energía entre ambas situaciones.

A (superficie antes del lanzamiento): $E_p=-G\frac{Mm}{R_T};E_c=0$

B (órbita): De igualar fuerza gravitatoria y centrípeta en una órbita circular se llega a

$$E_m=E_m+E_p=\frac{-GMm}{R_O}+\frac{1}{2}mv^2=\frac{-1}{2}G\frac{Mm}{R_O}$$

La diferencia es $E(B)-E(A)=\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R_O}-(\frac{-GMm}{R_T})=GMm(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{2R_O})$

Numéricamente

$$E(B)-E(A)=6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}\cdot504(\frac{1}{¿}6{,}37\cdot10^6-\frac{1}{2(6{,}37\cdot10^6+5900\cdot10^3)})=1{,}87\cdot10^{10}\,J$$

Usando la definición de gravedad como fuerza por unidad de masa y la ley de gravitación universal

$$g_L=G\frac{M_L}{R_L^2}=\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot7{,}35\cdot10^{22}}{(1737\cdot10^3)^2}=1{,}62\,m/s^2$$

B. Pregunta 1-.

a) La única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravitatoria y es radial al ser la órbita circular. Deducimos la tercera ley de Kepler, planteando la segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta, y considerando órbita circular.

$$F_g=F_c \Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R} \quad v=\frac{2\pi R}{T}\Rightarrow R^3=\frac{GM}{4\cdot\pi^2}T^2 \Rightarrow M=\frac{4\pi^2R^3}{GT^2}$$

Sustituyendo valores numéricos (radio de órbita) $M=\frac{4\pi^2\cdot(671100\cdot10^3)^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot(3{,}55\cdot24\cdot3600)^2}=1{,}9\cdot10^{27}\,kg$

b) Deducimos la expresión de la velocidad de escape aplicando el principio de conservación de la energía mecánica en un lanzamiento desde un punto A en la superficie del planeta a un punto B infinitamente alejado: la energía mecánica se conserva dado que no hay fuerzas no conservativas como el rozamiento.

A (superficie): $E_p=-G\frac{Mm}{R};E_c=\frac{1}{2}mv_e^2$

B (∞): $E_p=0;E_c=0$

Igualando energía mecánica en A y en B y despejando la velocidad de escape

$$-G\frac{M\cancel{m}}{R}+\frac{1}{2}\cancel{m}v_e^2=0\Rightarrow v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}$$

Numéricamente (radio de planeta) $v_e=\sqrt{2\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot1{,}9\cdot10^{27}}{69911\cdot10^3}}=6\cdot10^4\,m/s$

2019-Junio-Coincidentes

A. Pregunta 1.-

a) Igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta en órbita circular.

$$F_g=F_c \Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM}{R}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot7{,}35\cdot10^{22}}{1737\cdot10^3+250\cdot10^3}}=1{,}57\cdot10^3\,m/s$$

La energía total del satélite en órbita es la energía mecánica

$$E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}mv^2=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}m\frac{GM}{R}=\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R}=\frac{-1}{2}mv^2$$

Numéricamente $E_m=\frac{-1}{2}\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 7{,}35\cdot 10^{22}\cdot 1{,}6\cdot 10^{4}}{1737\cdot 10^{3}+250\cdot 10^{3}}=-1{,}97\cdot 10^{10}\,J$

b) Deducimos la expresión de la velocidad de escape aplicando el principio de conservación de la energía mecánica en un lanzamiento desde un punto A en la superficie del planeta a un punto B infinitamente alejado: la energía mecánica se conserva dado que no hay fuerzas no conservativas como el rozamiento.

A (superficie): $E_p=-G\frac{Mm}{R};E_c=\frac{1}{2}m v_e^2$

B (∞): $E_p=0;E_c=0$

Igualando energía mecánica en A y en B y despejando la velocidad de escape

$$-G\frac{M\cancel{m}}{R}+\frac{1}{2}\cancel{m}v_e^2=0\Rightarrow v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}$$

Numéricamente $v_e=\sqrt{2\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 7{,}35\cdot 10^{22}}{1737\cdot 10^{3}}}=2{,}38\cdot 10^{3}\,m/s$

Usando la definición de gravedad como fuerza por unidad de masa y la ley de gravitación universal

$$g_L=G\frac{M_L}{R_L^2}=\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 7{,}35\cdot 10^{22}}{(1737\cdot 10^{3})^2}=1{,}62\,m/s^2$$

B. Pregunta 1.-

a) La distancia desde el punto B (2, -2) al punto A (0, 0) es $\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}m$

Lo podemos plantear de dos maneras

A. Por trigonometría, utilizando el ángulo que forma r con el eje x, que son 45º

$$|\vec{F}|=6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{3\cdot 5}{8}=1{,}25\cdot 10^{-10}\,N$$

Calculamos las componentes multiplicando módulo por coseno y seno, tomando signos de diagrama

$$\vec{F}=-|\vec{F}|\cos 45\,\vec{i}+|\vec{F}|sen\,45\,\vec{j}=-1{,}25\cdot 10^{-10}\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+1{,}25\cdot 10^{-10}\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}=-8{,}84\cdot 10^{-11}\vec{i}+8{,}84\cdot 10^{-11}\vec{j}\,N$$

B. Usando la definición vectorial de la ley de gravitación universal $\vec{F}=-G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r$

El vector unitario que va desde el punto B (2, -2) al punto A (0, 0) es $\vec{u}_r=\frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}}\vec{i}-\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}}\vec{j}$

$$\vec{F}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{3\cdot 5}{8}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right)=-8{,}84\cdot 10^{-11}\vec{i}+8{,}84\cdot 10^{-11}\vec{j}\,N$$

b) Consideramos el trabajo realizado por el campo y llamamos C al punto (2, 0)

$$W_{B\to C}=-m\Delta V=-m(V(C)-V(B))=-5\cdot\left(-6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{3}{2}-\left(-6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)\right)=1{,}47^{-10}\,J$$

El trabajo realizado por el campo es positivo: es favor del campo atraer la masa de 5 kg desde la posición B a la posición C más cercana a la masa A

2019-Junio

A. Pregunta 1.-

a) La distancia desde el punto (4, 3) al origen es $\sqrt{4^2+3^2}=5\,m$

Lo podemos plantear de dos maneras

A. Por trigonometría, utilizando el ángulo que forma r con el eje x, cuyo coseno 4/5 y seno 3/5.

$$|\vec{g}|=6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{5}{5^2}=1{,}33\cdot 10^{-11}\,m/s^2\,ó\,N/kg$$

Calculamos las componentes multiplicando módulo por coseno y seno, tomando signos de diagrama

$$\vec{g}=|\vec{g}|\cos\alpha\,\vec{i}+|\vec{g}|sen\,\alpha\,\vec{j}=1{,}33\cdot 10^{-11}\frac{4}{5}\vec{i}+1{,}33\cdot 10^{-11}\frac{3}{5}\vec{j}=1{,}07\cdot 10^{-11}\vec{i}+8{,}00\cdot 10^{-12}\vec{j}\,m/s^2\,ó\,N/kg$$

B. Usando la definición vectorial $\vec{g}=-G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$

El vector unitario que va desde el punto (4,3) al origen es $\vec{u}_r=\frac{-4}{5}\vec{i}-\frac{3}{5}\vec{j}$

Usando la definición vectorial de campo

$$\vec{g}=-6,67\cdot10^{-11}\cdot\frac{5}{5^2}(\frac{-4}{5}\vec{i}-\frac{3}{5}\vec{j})=1,07\cdot10^{-11}\vec{i}+8,00\cdot10^{-12}\vec{j}\,m/s^2\,ó\,N/kg$$

Consideramos el trabajo realizado por el campo

$$W_{\infty\rightarrow origen}=-m\Delta V=-m(V(origen)-\cancel{V(\infty)})=-0,5\cdot(-6,67\cdot10^{-11}\frac{5}{5})=3,34\cdot10^{-11}J$$

El trabajo realizado por el campo es positivo: es favor del campo atraer una masa desde el infinito acercándola a otra masa.

b) Llamando x a la distancia medida desde el origen en la línea que une el origen con el punto (4, 3), podemos plantear que ambos campos tendrán misma dirección en esa línea pero sentido opuesto, y para que el campo total resultante por superposición sea nulo, deben tener ambos el mismo módulo.

$$|\vec{g}_{origen}|=|\vec{g}_{(4,3)}|\Rightarrow \cancel{G}\frac{m_{origen}}{x^2}=\cancel{G}\frac{m_{(4,3)}}{(d_{(4,3)}-x)^2}\Rightarrow\frac{0,5}{x^2}=\frac{5}{(5-x)^2}$$

$$0,1(5-x)^2=x^2\Rightarrow\sqrt{0,1}(5-x)=x\Rightarrow(1+\sqrt{0,1})x=5\sqrt{0,1}\Rightarrow x=\frac{5\sqrt{0,1}}{1+\sqrt{0,1}}\approx1,2m$$

Matemáticamente hay dos soluciones, pero solamente tiene sentido la que está más cerca de la masa de 0,5 kg.

B. Pregunta 1.-

a) La única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravitatoria y es radial en una órbita circular. Deducimos la tercera ley de Kepler, planteando la segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta, y considerando órbita circular.

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R}\quad v=\frac{2\pi R}{T}\Rightarrow R^3=\frac{GM}{4\cdot\pi^2}T^2\Rightarrow R=\sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2}$$

En un satélite geoestacionario el periodo son 24 h. Sustituyendo valores numéricos

$$R=\sqrt[3]{\frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot5,97\cdot10^{24}}{4\pi^2}(24\cdot3600)^2}=4,22\cdot10^7m$$

Como se pide altura, $h=R-R_T=4,22\cdot10^7-6,37\cdot10^6=3,58\cdot10^7$ m

La velocidad orbital es $v=\frac{2\cdot\pi\cdot4,22\cdot10^7}{(24\cdot3600)}=3,1\cdot10^3m/s$

b) La fuerza centrípeta es $F_c=m\frac{v^2}{R}=5900\cdot\frac{(3,1\cdot10^3)^2}{4,22\cdot10^7}=1,34\cdot10^3N$

La energía total del satélite en órbita es la energía mecánica

$$E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}mv^2=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}m\frac{GM}{R}=\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R}$$

Numéricamente $E_m=\frac{-1}{2}\frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot5,97\cdot10^{23}\cdot5900}{4,22\cdot10^7}=-2,78\cdot10^{10}J$

2019-Modelo

A. Pregunta 1.-

a) La única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravitatoria y es radial. Planteamos la ley fundamental de la dinámica, segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta.

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R}\Rightarrow M=\frac{v^2R}{G}$$

Al ser de una órbita circular $v=\frac{2\pi R}{T}\Rightarrow R=\frac{v\cdot T}{2\cdot\pi}$

Sustituyendo $M=\frac{v^3T}{2\cdot\pi G}=\frac{(2{,}3\cdot10^4)^3\cdot30\cdot60}{2\cdot\pi\cdot6{,}67\cdot10^{-11}}=5{,}226\cdot10^{25}\,kg$

b) Usamos directamente la expresión de energía potencial gravitatoria (la deducción implica integrar) y obtenemos la expresión de energía mecánica en órbita

$$E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}mv^2=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}m\frac{GM}{R}=\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R}$$

Numéricamente $E_m=\frac{-1}{\cancel{2}}\frac{GMm\cdot\cancel{2}\cdot\pi}{v\cdot T}=\frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}226\cdot10^{25}\cdot150\cdot\pi}{2{,}3\cdot10^4\cdot30\cdot60}=-3{,}97\cdot10^{10}\,J$

B. Pregunta 1.-

a) Planteamos que en una caída de una altura de 10 m con un radio de $8{,}5\cdot10^6$ m el valor de la gravedad es constante, y describe un MRUA

$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2\Rightarrow10=\frac{1}{2}g_C1{,}58^2\Rightarrow g_C=\frac{20}{1{,}58^2}=8{,}01\,m/s^2$$

Conociendo la gravedad y utilizando la ley de gravitación universal

$$g_C=G\frac{M_C}{R^2}\Rightarrow M_C=\frac{g_CR^2}{G}=\frac{8{,}01\cdot(8{,}5\cdot10^6)^2}{6{,}67\cdot10^{-11}}=8{,}68\cdot10^{24}\,kg$$

b) La única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravitatoria y es radial. Planteamos la ley fundamental de la dinámica, segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta.

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M_A\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R}\Rightarrow M_A=\frac{v^2R}{G}$$

Al ser de una órbita circular $v=\frac{2\pi R}{T}$

$$M_A=\frac{4\pi^2R^3}{GT^2}=\frac{4\pi^2(1{,}8\cdot10^{11})^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot(395\cdot24\cdot3600)^2}=2{,}96\cdot10^{30}\,kg$$

2018-Julio

A. Pregunta 1.-

a) La masa del objeto no depende del punto en el que se encuentra, y en este caso sigue siendo de 50 kg.

El peso del objeto en la superficie de Mercurio es la fuerza gravitatoria que realiza Mercurio: será un vector en la dirección de la línea que pasa por el centro de Mercurio y con sentido dirigido hacia Mercurio al ser la fuerza gravitatoria atractiva. Su módulo según la ley de gravitación universal será

$$P_{superficie}=m\cdot g_M=G\frac{M_M\cdot m}{R_M^2}=6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{3{,}30\cdot10^{23}\cdot50}{(2{,}44\cdot10^6)^2}=184{,}85\,N$$

b) Si llamamos $R=R_M+h$ a la distancia a la la que el peso se reduce a la tercera parte, planteamos con módulos

$$P_R=\frac{1}{3}P_{superficie}\Rightarrow G\frac{\cancel{M_M}\cdot\cancel{m}}{R^2}=\frac{1}{3}G\frac{\cancel{M_M}\cdot\cancel{m}}{R_M^2}\Rightarrow3R_M^2=R^2\Rightarrow\sqrt{3}\cdot R_M=R_M+h$$

$$\Rightarrow h=(\sqrt{3}-1)R_M=1{,}78\cdot10^6\,m$$

Validamos que módulo del peso a esa distancia y es ⅓ del calculado en a). También se podría haber planteado numéricamente partiendo de ese valor 184,85/3=61,6

$$P_R=G\frac{M_M\cdot m}{R^2}=6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{3{,}30\cdot10^{23}\cdot50}{(2{,}44\cdot10^6+1{,}78\cdot10^6)^2}=61{,}8\,N$$

B. Pregunta 1.-

a) La única fuerza que actúa sobre el satélite artificial es la gravitatoria y es radial. Planteamos la ley fundamental de la dinámica, segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta.

$$F_g=F_c \Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R} \Rightarrow v^2=\frac{GM}{R}$$

El radio de la órbita es $R=R_T+h=6,37\cdot10^6+694\cdot10^3=7,064\cdot10^6$ m

$$v=\sqrt{\frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot5,97\cdot10^{24}}{7,064\cdot10^6}}=7508\,m/s$$

Al tratarse de una órbita circular $v=\frac{2\pi R}{T} \Rightarrow T=\frac{2\cdot\pi\cdot7,064\cdot10^6}{7508}=5912\,s$

b) La energía necesaria a aportar para trasladarlo es la diferencia de energías mecánicas entre ambas órbitas, que son la suma de energía cinética y potencial. Usamos directamente la expresión de energía potencial gravitatoria (la deducción implica integrar) y obtenemos la expresión de energía mecánica en órbita

$$E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}m v^2=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}m\frac{GM}{R}=\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R}$$

La diferencia solicitada es

$$\Delta E=E_{m,\,órbita 1000\,km}-E_{m,\,órbita\,694\,km}=\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R_{1000km}}-\left(\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R_{694\,km}}\right)=\frac{1}{2}GMm\left(\frac{1}{R_{694\,km}}-\frac{1}{R_{1000km}}\right)$$

Sustituyendo $\Delta E=\frac{1}{2}6,67\cdot10^{-11}5,97\cdot10^{24}\cdot712\left(\frac{1}{7,064\cdot10^6}-\frac{1}{6,37\cdot10^6+1000\cdot10^3}\right)=8,33\cdot10^8\,J$

2018-Junio-coincidentes

A. Pregunta 1.-

a) La única fuerza que actúa sobre la nave (que pasa a ser un satélite al orbitar) es la gravitatoria y es radial. Planteamos la ley fundamental de la dinámica, segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta.

$$F_g=F_c \Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R} \Rightarrow R=\frac{GM}{v^2}$$

Al tratarse de una órbita circular $v=\frac{2\pi R}{T}$, que sustituyendo nos lleva a la expresión asociada a la tercera ley de Kepler $R^3=\frac{GM}{4\pi^2}T^2 \Rightarrow T=\sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}R^3}$

Numéricamente $T=\sqrt{\frac{4\pi^2}{6,67\cdot10^{-11}\cdot6,42\cdot10^{23}}\cdot(5000\cdot10^3)^3}=10735\,s$

Considerando años de 365 días, 10·365·24·3600/10735=29377 vueltas.

b) La velocidad de escape es la que debe tener un cuerpo para llegar a un punto infinitamente alejado con velocidad nula. Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica en un lanzamiento desde un punto A en la superficie del planeta a un punto B infinitamente alejado: la energía mecánica se conserva dado que no hay fuerzas no conservativas como el rozamiento.

A (superficie): $E_p=-G\frac{Mm}{R};E_c=\frac{1}{2}m v_e^2$

B (∞): $E_p=0;E_c=0$

Como se conserva la energía mecánica, igualamos en A y en B y despejamos la velocidad de escape

$$-G\frac{M\cancel{m}}{R}+\frac{1}{2}\cancel{m}v_e^2=0 \Rightarrow v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}$$

Numéricamente $v_e=\sqrt{2\frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot6,42\cdot10^{23}}{3397,5\cdot10^3}}=5,02\cdot10^3\,m/s$

B. Pregunta 1.-

a) El campo generado por una única masa puntual es radial $\vec{g}=-G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$ siendo el vector unitario saliente desde la masa. Si llamamos Q al punto (4, 0) en el que se encuentra la carga, el vector unitario lo que lo podemos plantear como el vector QP (-4, 3) dividido por su módulo, que es 5 m, de modo que $\vec{u}_r=\frac{-4}{5}\vec{i}+\frac{3}{5}\vec{j}$

Por lo tanto $\vec{g}=-6{,}67\cdot10^{-11}\frac{4}{5^2}(\frac{-4}{5}\vec{i}+\frac{3}{5}\vec{j})\,m\cdot s^{-2}=8{,}5376\cdot10^{-12}\vec{i}-6{,}4032\cdot10^{-12}\vec{j}\,m\cdot s^{-2}$

b) Planteamos el trabajo realizado por el campo (no el trabajo externo), por lo que usamos la definición de energía potencial $W_{campo,origen\rightarrow P}=-\Delta E_p=-m\Delta V=-m(V_P-V_{origen})$

$$W_{campo,origen\rightarrow P}=-m(-G\frac{M}{d_{QP}}-(-G\frac{M}{d_{QP}}))=10\cdot(6{,}67\cdot10^{-11}4(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}))=-1{,}334\cdot10^{-10}J$$

El trabajo realizado por el campo es negativo: se trata de un trabajo que hay que aportar externamente, es en contra del campo, porque estamos alejando una masa (inicialmente estaba a 4 m y luego está a 5 m), llevándola a potenciales mayores.

2018-Junio

A. Pregunta 1.-

a) Según la ley de gravitación universal, la fuerza es un vector $\vec{F}_{12}=-G\frac{m_1m_2}{r^2}\vec{u}_r$ dirección la línea que une ambas masas, sentido atractivo: al ser la fuerza que m_1 ejerce sobre m_2 está dirigida desde m_2 hacia m_1. (el vector unitario va desde m_1 a m_2). Su módulo es

$$|\vec{F}_{12}|=6{,}67\cdot10^{-11}\frac{10\cdot20}{1^2}=1{,}33\cdot10^{-8}N$$

El peso $\vec{P}_2$ es la fuerza que la Tierra ejerce sobre m_2, tendrá dirección la línea que une el centro de masas de m_2 con el centro de la Tierra, sentido dirigido hacia el centro de la Tierra, y módulo (tomamos como distancia la del radio de la Tierra)

$$|\vec{P}_2|=6{,}67\cdot10^{-11}\frac{5{,}97\cdot10^{24}\cdot20}{(6{,}37\cdot10^6)^2}=196\,N$$

Aunque no es dato g, podemos validar el resultado, es aproximadamente P=m·g=20·9,8=196 N

b) La fuerza gravitatoria depende de las masas (linealmente) y de la distancia (con el inverso del cuadrado). Aunque entre m_1 y m_2 la distancia sea mucho menor (1 m frente a $6{,}37\cdot10^6$ m), que entre m_2 y la Tierra, la masa de la Tierra es mucho mayor que la de m_1. ($5{,}97\cdot10^{24}$ kg frente a 10 kg)

B. Pregunta 1.-

a) Si la órbita es geoestacionaria, su periodo es T=24 h, por lo que si queremos que el periodo sea el doble será de 48 h.

Al indicarse radio asumimos órbita circular. La única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravitatoria y es radial. Planteamos la ley fundamental de la dinámica, segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta.

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R}\Rightarrow R=\frac{GM}{v^2}$$

Al tratarse de una órbita circular $v=\frac{2\pi R}{T}$, que sustituyendo nos lleva a la expresión asociada a la tercera ley de Kepler $R^3=\frac{GM}{4\pi^2}T^2\Rightarrow R=\sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2}$

Sustituyendo valores numéricos $R=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}}{4\pi^2}(48\cdot3600)^2}=6{,}7\cdot10^7m$

b) Planteamos la diferencia de energías mecánicas, que son la suma de energía cinética y potencial. Usamos directamente la expresión de energía potencial gravitatoria (la deducción implica integrar) y obtenemos la expresión de energía mecánica en órbita

$$E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}mv^2=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}m\frac{GM}{R}=\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R}$$

La diferencia solicitada es

$$\Delta E=E_{m,\,órbita T=48h}-E_{m,\,órbita T=24h}=\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R_{T=48h}}-\left(\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R_{T=24h}}\right)=\frac{1}{2}GMm\left(\frac{1}{R_{T=24h}}-\frac{1}{R_{T=48h}}\right)$$

El radio de la órbita con T=24 h no lo tenemos calculado pero lo hacemos con el mismo planteamiento de apartado a

$$R=\sqrt[3]{\frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot5,97\cdot10^{24}}{4\pi^2}(24\cdot3600)^2}=4,2\cdot10^7\,m$$

Sustituyendo

$$\Delta E=\frac{1}{2}6,67\cdot10^{-11}5,97\cdot10^{24}\cdot10^3\left(\frac{1}{4,2\cdot10^7}-\frac{1}{6,7\cdot10^7}\right)=1,77\cdot10^9\,J$$

El valor es positivo, ya que es energía aportada al tener más energía en la segunda órbita (el radio es mayor y tiene una energía mecánica mayor, número negativo de menor valor absoluto).

2018-Modelo

A. Pregunta 1.-

a) Al tener dos masas utilizamos el principio de superposición. En el eje x entre las masas se puede ver que el campo tiene sentidos opuestos y hay un punto intermedio en el que se cancelará, más cercano a x_1 que a x_2 al ser m_2 mayor que m_1. Lo planteamos como módulos, llamamos x para la coordenada del punto donde se cancelan medida desde $x_1=0$. Asumimos x_2-x positivo (x entre las dos masas) $\vec{g}_1+\vec{g}_2=0\Rightarrow g_1=g_2\Rightarrow G\frac{m_1}{x^2}=G\frac{m_2}{(x_2-x)^2}\Rightarrow\frac{m_2}{m_1}=\left(\frac{x_2-x}{x}\right)^2\Rightarrow\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}=\frac{x_2-x}{x}$

Sutituyendo y expresando con cuatro cifras significativas $\sqrt{5}x=5-x\Rightarrow x=\frac{5}{\sqrt{5}+1}\approx1,545\,m$

Nota: enunciado pide "el punto en el eje X", y podríamos plantear si hay puntos fuera del segmento que une las masas en las que también se cancela. Podemos ver que en el eje X fuera de ese segmento los campos gravitatorios tienen mismo sentido, por lo que no se cancela.

b) Aplicando el principio de superposición

$$V_{total}=V_1+V_2=-G\frac{m_1}{d_1}-G\frac{m_2}{d_2}=-6,67\cdot10^{-11}\left(\frac{2}{1,545}+\frac{10}{5-1,545}\right)=-2,79\cdot10^{-10}\,J/kg$$

B. Pregunta 1.-

a) En una órbita circular la única fuerza que actúa sobre el planeta es la gravitatoria y es radial. Planteamos la ley fundamental de la dinámica, segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta.

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R}\Rightarrow R=\frac{GM}{v^2}$$

Al tratarse de una órbita circular $v=\frac{2\pi R}{T}$, que sustituyendo nos lleva a la expresión asociada a la tercera ley de Kepler $R^3=\frac{GM}{4\pi^2}T^2\Rightarrow R=\sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2}$

Sustituyendo valores numéricos $R=\sqrt[3]{\frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot1,3\cdot10^{30}}{4\pi^2}(210\cdot24\cdot3600)^2}=8,98\cdot10^{10}\,m$

b) El campo gravitatorio en un punto intermedio lo obtenemos por superposición. Tendrá sentidos opuestos, calculamos los módulos y comprobamos cual es mayor a esa distancia (aunque a priori podemos asumir que el campo de la estrella será mayor)

$$g_{estrella}=G\frac{M}{d^2_{estrella}}=6,67\cdot10^{-11}\frac{1,3\cdot10^{30}}{(8,98\cdot10^{10}-4,6\cdot10^8)^2}=0,0108637\,m/s^2\,ó\,N/kg$$

$$g_{planeta}=G\frac{M_{planeta}}{d^2_{planeta}}=6,67\cdot10^{-11}\frac{5\cdot10^{-6}\cdot1,3\cdot10^{30}}{(4,6\cdot10^8)^2}=0,0020489\,m/s^2\,ó\,N/kg$$

Vemos que es mayor el gampo generado por la estrella en ese punto, luego tendrá sentido hacia dentro de la estrella, y el módulo será la diferencia. Definimos como vector unitario el dirigido hacia fuera de la estrella

$$\vec{g}_{total}=\vec{g}_{estrella}+\vec{g}_{planeta}=-(0{,}0108637-0{,}0020489)\vec{u}_r\approx-0{,}00881\vec{u}_r\, m/s^2 ó\, N/kg$$

2017-Septiembre

A. Pregunta 1.-

a) La velocidad de escape es la que debe tener un cuerpo para llegar a un punto infinitamente alejado con velocidad nula. Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica en un lanzamiento desde un punto A en la superficie del planeta a un punto B infinitamente alejado: la energía mecánica se conserva dado que no hay fuerzas no conservativas como el rozamiento.

A (superficie): $E_p=-G\frac{Mm}{R};E_c=\frac{1}{2}mv_e^2$

B (∞): $E_p=0;E_c=0$

Como se conserva la energía mecánica, igualamos en A y en B y despejamos la velocidad de escape

$$-G\frac{M\cancel{m}}{R}+\frac{1}{2}\cancel{m}v_e^2=0\Rightarrow v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}$$

b) Utilizamos la definición de aceleración de la gravedad para averiguar el radio

$$g=G\frac{M}{R^2}\Rightarrow R=\sqrt{\frac{GM}{g}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot3{,}30\cdot10^{23}}{3{,}70}}=2{,}44\cdot10^6 m$$

$$v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}=\sqrt{2\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot3{,}30\cdot10^{23}}{2{,}44\cdot10^6}}=4{,}25\cdot10^3 m/s$$

a) La velocidad de escape es la que debe tener un cuerpo para llegar a un punto infinitamente alejado con velocidad nula. Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica en un lanzamiento desde un punto A en la superficie del planeta a un punto B infinitamente alejado: la energía mecánica se conserva dado que no hay fuerzas no conservativas como el rozamiento.

A (superficie): $E_p=-G\frac{Mm}{R};E_c=\frac{1}{2}mv_e^2$

B (∞): $E_p=0;E_c=0$

Como se conserva la energía mecánica, igualamos en A y en B y despejamos la velocidad de escape

$$-G\frac{M\cancel{m}}{R}+\frac{1}{2}\cancel{m}v_e^2=0\Rightarrow v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}$$

b) Utilizamos la definición de aceleración de la gravedad para averiguar el radio

$$g=G\frac{M}{R^2}\Rightarrow R=\sqrt{\frac{GM}{g}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot3{,}30\cdot10^{23}}{3{,}70}}=2{,}44\cdot10^6 m$$

$$v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}=\sqrt{2\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot3{,}30\cdot10^{23}}{2{,}44\cdot10^6}}=4{,}25\cdot10^3 m/s$$

B. Pregunta 1.-

a) En una órbita circular la única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravitatoria y es radial. Planteamos la ley fundamental de la dinámica, segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta.

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

b) Utilizando el mismo desarrollo de apartado a $R=\frac{GM}{v^2}$

Al tratarse de una órbita circular $v=\frac{2\pi R}{T}$, que sustituyendo nos lleva a la expresión asociada a la tercera ley de Kepler $R^3=\frac{GM}{4\pi^2}T^2\Rightarrow R=\sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2}$

Sustituyendo valores numéricos $R=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6{,}42\cdot10^{23}}{4\pi^2}(24{,}62\cdot3600)^2}=2{,}042\cdot10^7 m$

La energía mecánica es la suma de energía cinética y potencial. Usamos directamente la expresión de energía potencial gravitatoria (la deducción implica integrar) y obtenemos la expresión de energía mecánica en órbita y el valor pedido

$$E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}mv^2=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}m\frac{GM}{R}=\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R}$$

$$E_m=\frac{-1}{2}\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6{,}42\cdot 10^{23}\cdot 21}{2{,}042\cdot 10^{7}}=-2{,}202\cdot 10^{7}\,J$$

2017-Junio-coincidentes

A. Pregunta 1.-

a) Planteamos conservación de energía mecánica entre los dos puntos

A. Punto de lanzamiento $E_c=\frac{1}{2}mv_{lanzamiento}^2 ; E_p=-G\frac{Mm}{R_{Tierra}}$

B. Punto de altura h $E_c=0 ; E_p=-G\frac{Mm}{R_{Tierra}+h}$

$$E_m(A)=E_m(B)\Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}v_{lanzamiento}^2-G\frac{M\cancel{m}}{R_{Tierra}}=-G\frac{M\cancel{m}}{R_{Tierra}+h}$$

$$v_{lanzamiento}=\sqrt{2GM\left(\frac{1}{R_{Tierra}}-\frac{1}{R_{Tierra}+h}\right)}$$

$$v_{lanzamiento}=\sqrt{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}\cdot\left(\frac{1}{6{,}37\cdot 10^{6}}-\frac{1}{6{,}37\cdot 10^{6}+150\cdot 10^{3}}\right)}=1696\,m/s$$

b) La energía adicional a aportar es la energía cinética asociada a la velocidad que tiene que tener para tener una órbita estable a esa altura.

Igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en una órbita circular estable

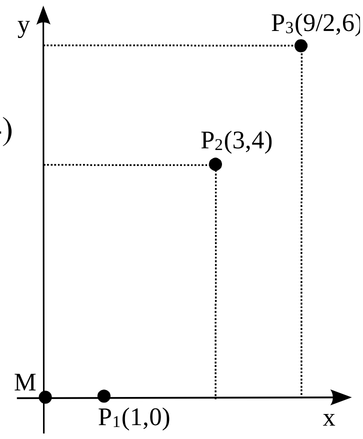
$$G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_o}\Rightarrow v^2=\frac{GM}{R_o}$$

La energía cinética adicional a aportar será $E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}G\frac{Mm}{R_o}$

(se podría haber llegado a la misma expresión restando la energía mecánica en una órbita circular con ese radio y la energía potencial esa altura)

Sustituyendo $E=\frac{1}{2}\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}\cdot 120}{6{,}37\cdot 10^{6}+150\cdot 10^{3}}=3{,}66\cdot 10^{9}\,J$

B. Pregunta 1.-



Aunque los puntos se dan con 3 coordenadas (x, y, z) la coordenada z siempre es 0, por lo que se trata de un problema en el plano XY.
Realizamos un diagrama en z=0 representando los puntos $P_1(1,0)$, $P_2(3,4)$ y $P_3(9/2,6)$

a) El trabajo realizado por el campo para mover m_1 es

$$W_{P_1 \to P_2} = -m_1 \Delta V = -m_1 (V_{P_2} - V_{P_1})$$

$$W_{P_1 \to P_2} = -2 \cdot (-G\frac{M}{d_2} - (-G\frac{M}{d_1}))$$

$$W_{P_1 \to P_2} = 2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 50 (\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} - \frac{1}{1}) = -5{,}336 \cdot 10^{-9} J$$

El trabajo es negativo, es en contra del campo: estamos alejando una masa de M y el campo tendería a atraerla.

b) Se pide la energía cinética de la partícula partiendo del reposo, que por el teorema de las fuerzas vivas es igual al trabajo total realizado $\Delta E_c = W_{total}$

(También se puede plantear mediante conservación de E mecánica). En este caso el único trabajo lo realiza el campo, y el trabajo realizado por el campo para mover m_2 es

$$W_{P_3 \to P_2} = -3 \cdot (-G\frac{M}{d_2} - (-G\frac{M}{d_3})) = 3 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 50 (\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} - \frac{1}{\sqrt{(9/2)^2+6^2}}) = 6{,}67 \cdot 10^{-10} J$$

El trabajo es positivo, es a favor del campo: estamos acerando una masa a M, la masa m_2 está ganando energía cinética.

2017-Junio

A. Pregunta 1.-

a) Se podría incluir el deducir la expresión de la velocidad de escape en la superficie del asteroide en función de su masa y su radio, utilizando el principio de conservación de la energía mecánica entre el punto de lanzamiento y una posición infinitamente alejada, pero la usamos directamente.

$$v_e = \sqrt{2\frac{GM}{R}}$$

$$M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 3000 \cdot \frac{4}{3}\pi 3000^3 = 3{,}39 \cdot 10^{14} kg$$

La densidad y el radio los expresamos en unidades del Sistema Internacional como G . La densidad es 3000 kg/m³ y el radio 3000 m. $v_e = \sqrt{2\frac{GM}{R}} = \sqrt{2 \cdot \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 3{,}39 \cdot 10^{14}}{3000}} = 3{,}88 m/s$

b) Planteamos la conservación de energía mecánica entre el punto de lanzamiento en superficie a la velocidad de escape y el punto a 1000 m de altura.

A. Punto de lanzamiento $E_c = \frac{1}{2} m v_e^2 ; E_p = -G\frac{Mm}{R_{asteroide}}$

B. Punto a 1 km de altura $E_c = \frac{1}{2} m v^2 ; E_p = -G\frac{Mm}{(R_{asteroide}+1000)}$

$$E_m(A) = E_m(B) \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m} v_e^2 - G\frac{M\cancel{m}}{R_{asteroide}} = \frac{1}{2}\cancel{m} v^2 - G\frac{M\cancel{m}}{(R_{asteroide}+1000)}$$

$$\frac{1}{2}(3{,}88)^2 - 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{3{,}39 \cdot 10^{14}}{3000} = \frac{1}{2} v^2 - 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{3{,}39 \cdot 10^{14}}{(3000+1000)}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 5{,}642925} \approx 3{,}36 m/s$$

B. Pregunta 1.-

a) $g = G\frac{M_{estrella}}{R_{estrella}^2} = G\frac{0{,}12 \cdot M_S}{(0{,}14 \cdot R_S)^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{0{,}12 \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}}{(0{,}14 \cdot 7 \cdot 10^8)^2} \approx 1658 m/s^2$

b) Igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en una órbita circular, y usando $v = \frac{2\pi r}{T}$

$$G\frac{M_{Próxima\,Centauri}\cancel{m}}{R_{órbita}^2}=\cancel{m}\frac{4\pi^2R_{órbita}^2}{T^2R_{órbita}}\Rightarrow R_{órbita}=\sqrt[3]{\frac{G\cdot 0,12\cdot M_S T^2}{4\pi^2}}$$

$$R_{órbita}=\sqrt[3]{\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 0,12\cdot 1,99\cdot 10^{30}\cdot(11,2\cdot 24\cdot 3600)^2}{4\pi^2}}=7,23\cdot 10^9 m$$

Comentario: son datos reales aproximados del exoplaneta Próxima Centauri b

2017-Modelo

A. Pregunta 1.-

Resolución idéntica a 2016-Modelo-A1

B. Pregunta 1.-

Resolución idéntica a 2016-Modelo-B1

2016-Septiembre

A. Pregunta 1.-

a) Planteamos conservación de energía mecánica entre los dos puntos

A. Punto de lanzamiento $E_c=\frac{1}{2}mv_{lanzamiento}^2; E_p=-G\frac{Mm}{R_{planeta}}$

B. Punto de altura máxima $E_c=0; E_p=-G\frac{Mm}{r_{máx}}; r_{máx}=R_{planeta}+h_{máx}$

$$E_m(A)=E_m(B)\Rightarrow\frac{1}{2}\cancel{m}v_{lanzamiento}^2-G\frac{M\cancel{m}}{R_{planeta}}=-G\frac{M\cancel{m}}{r_{máx}}$$

$$\frac{1}{2}(2\cdot 10^3)^2-6,67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{6,42\cdot 10^{23}}{4500\cdot 10^3}=-6,67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{6,42\cdot 10^{23}}{r_{máx}}$$

$$r_{máx}=5,697\cdot 10^6 m\Rightarrow h_{máx}=1,197\cdot 10^6 m$$

b) Igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en una órbita circular

$$G\frac{M\cancel{m}}{r_{órbita}^2}=\cancel{m}\frac{v_{órbita}^2}{r_{órbita}}\Rightarrow v_{órbita}=\sqrt{\frac{GM}{r_{órbita}}}=\sqrt{\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 6,42\cdot 10^{23}}{5,697\cdot 10^6}}=2741,6\,m/s$$

>Comentario: la masa del enunciado es aproximadamente la de Marte, que tiene una velocidad de escape de unos 5 km/s

B. Pregunta 1.-

a) Igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en una órbita circular, y usando $v=\frac{2\pi r}{T}$

$$G\frac{M\cancel{m}}{r_{órbita}^2}=\cancel{m}\frac{4\pi^2r_{órbita}^2}{T^2r_{órbita}}\Rightarrow M=\frac{4\pi^2r_{órbita}^3}{GT^2}=\frac{4\pi^2(0,45\cdot 10^8\cdot 10^3)^3}{6,67\cdot 10^{-11}\cdot(28\cdot 24\cdot 3600)^2}=9,2\cdot 10^{30}kg$$

b) Si diámetro=200 km, R=100 km $|g|=G\frac{M}{R^2}=6,67\cdot 10^{-11}\frac{9,2\cdot 10^{30}}{(100\cdot 10^3)^2}=6,14\cdot 10^{10}m/s^2$

>Comentario: si calculamos la velocidad de escape podemos ver que es próxima a la velocidad de la luz, sin llegar a ser un agujero negro $v=\sqrt{2\frac{GM}{R}}=\sqrt{2\cdot\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 9,2\cdot 10^{30}}{100\cdot 10^3}}=1,11\cdot 10^8 m/s$

2016-Junio

A. Pregunta 1.-

a) En la órbita elíptica el momento angular se conserva, por lo que su módulo es el mismo en todos los puntos. Dado que en en perihelio y afelio vector posición y velocidad forman 90º, podemos igualar los módulos y llegamos a

$$|\vec{L}_{perihelio}|=|\vec{L}_{perihelio}|\Rightarrow r_{perihelio}\cdot\cancel{m}\cdot v_{perihelio}=r_{afelio}\cdot\cancel{m}\cdot v_{afelio}\Rightarrow v_{afelio}=v_{perihelio}\cdot\frac{r_{perihelio}}{r_{afelio}}$$

$$v_{afelio}=26,50\cdot 10^3\cdot\frac{206,7\cdot 10^9}{249,2\cdot 10^9}\approx 21980\,m\,s^{-1}$$

Se puede citar que la velocidad es un vector tangente a la trayectoria y se indica solamente su

módulo. Validación física: en afelio debe llevar una velocidad menor que en perihelio.
b) Con datos de afelio obtenidos en a)

$$E_{ma}=E_{pa}+E_{ca}=-G\frac{M_S M_M}{r_a}+\frac{1}{2}M_M v_a^2$$

$$E_{ma}=-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{1{,}99\cdot10^{30}\cdot6{,}42\cdot10^{23}}{249{,}2\cdot10^{9}}+\frac{1}{2}6{,}42\cdot10^{23}(21{,}98\cdot10^{3})^2=-1{,}869\cdot10^{32}J$$

Con esto bastaría, pero hacemos validaciones:
-La energía mecánica también es constante en la órbita, la podemos calcular en cualquier punto. Para el perihelio con los datos del enunciado

$$E_{mp}=E_{pp}+E_{cp}=-G\frac{M_S M_M}{r_p}+\frac{1}{2}M_M v_p^2$$

$$E_{mp}=-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{1{,}99\cdot10^{30}\cdot6{,}42\cdot10^{23}}{206{,}7\cdot10^{9}}+\frac{1}{2}6{,}42\cdot10^{23}(26{,}50\cdot10^{3})^2=-1{,}869\cdot10^{32}J$$

-Si usamos expresión general para la energía mecánica en órbita elíptica, en la que se usa el valor del semieje mayor que es a=(206,7·10⁹+249,2·10⁹)/2=2,2795·10¹¹ m

$$E_m=\frac{-1}{2}G\frac{M_S M_M}{a}$$

$$E_{mp}=\frac{-1}{2}6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{1{,}99\cdot10^{30}\cdot6{,}42\cdot10^{23}}{2{,}2795\cdot10^{11}}=-1{,}869\cdot10^{32}J$$

B. Pregunta 1.-

a) Usamos la ley de Hooke F=kΔL, y como el muelle es el mismo, el cociente entre pesos que son las fuerzas que realizan la deformación, es igual que el cociente entre alargamientos

$$\frac{P_T}{P_M}=\frac{k\Delta L_T}{k\Delta L_M}\Rightarrow P_T=\frac{\Delta L_T}{\Delta L_M}P_M=\frac{3}{1{,}13}P_M$$

Al ser P=mg y haberse usado la misma masa, la relación es la misma entre los valores de aceleraciones de la gravedad.
Si queremos que una masa tenga en Marte el mismo peso que en la Tierra, la masa total hay que aumentarla en el mismo factor que la diferencia de pesos $m=\frac{3}{1{,}13}90\approx239\,kg$. Como se pide la masa adicional, serían 239-90=149 kg.

Planteamiento directo $m g_T=(m+M_{adicional})g_M\Rightarrow M_{adicional}=m\frac{g_T}{g_M}-m=90(\frac{3}{1{,}13}-1)\approx149\,kg$

b) Utilizando la constante elástica del muelle, calculamos el valor de la gravedad en la Tierra

$$g=\frac{P}{m}=\frac{F}{m}=\frac{k\cdot\Delta L}{m}=\frac{327\cdot0{,}03}{1}=9{,}81\,m/s^2$$

Usamos la definición de gravedad

$$|g|=G\frac{M}{R_T^2}\Rightarrow M=\frac{g R_T^2}{G}=\frac{9{,}81\cdot(6{,}37\cdot10^6)^2}{6{,}67\cdot10^{-11}}=5{,}97\cdot10^{24}kg$$

2016-Modelo

A. Pregunta 1.-

a) La distancia entre los centros de ambos cuerpos es la suma del radio de Urano (R_U) más la distancia entre sus superficies, más el radio de Titania (R_t).
Los radios de Urano y Titania los podemos calcular a partir de g y los datos dados:

$$g_U=G\frac{M_U}{R_U^2}\Rightarrow R_U=\sqrt{G\frac{M_U}{g_U}}=\sqrt{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{8{,}69\cdot10^{25}}{8{,}69}}=2{,}58\cdot10^7 m$$

$$g_t=G\frac{M_t}{R_t^2}\Rightarrow R_t=\sqrt{G\frac{M_t}{g_t}}=\sqrt{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{3{,}53\cdot10^{21}}{0{,}37}}=7{,}98\cdot10^5 m$$

La distancia entre ambas superficies es $d=c\cdot t=3{,}0\cdot10^8\cdot1{,}366=4{,}10\cdot10^8 m$

El radio de la órbita de Titania es $R_{órbita\,Titania}=2,58\cdot10^7+7,98\cdot10^5+4,10\cdot10^8=4,37\cdot10^8\,m$

b) Igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en la órbita circular de Titania:

$$G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_o}\Rightarrow v^2=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow\frac{(2\pi R)^2}{T^2}=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R_o^3$$

$$T=\sqrt{\frac{4\cdot\pi^2}{6,67\cdot10^{-11}\cdot8,69\cdot10^{25}}\cdot(4,37\cdot10^8)^3}=7,54\cdot10^5\,s$$

$$T=7,54\cdot10^5\,s\cdot\frac{1\,día\,terrestre}{24\cdot3600\,s}=8,73\,días\,terrestres$$

B. Pregunta 1.-

a) Se podría incluir el deducir la expresión de la velocidad de escape en la superficie de un planeta en función de su masa y su radio, utilizando el principio de conservación de la energía mecánica entre el lanzamiento y una posición infinitamente alejada, pero la usamos directamente:

$$v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}$$

Sustituyendo y teniendo en cuenta que $M_{Planeta}=2M_{Tierra}$, y que $R_{Planeta}=½\ R_{Tierra}$

$$\frac{v_{e_{Planeta}}}{v_{e_{Tierra}}}=\frac{\sqrt{2\frac{GM_{Planeta}}{R_{Planeta}}}}{\sqrt{2\frac{GM_{Tierra}}{R_{Tierra}}}}=\sqrt{\frac{2M_{Tierra}}{M_{Tierra}}\frac{R_{Tierra}}{½R_{Tierra}}}=\sqrt{4}=2$$

b) $$\frac{g_{Planeta}}{g_{Tierra}}=\frac{G\frac{M_{Planeta}}{R_{Planeta}^2}}{G\frac{M_{Tierra}}{R_{Tierra}^2}}=\frac{2M_{Tierra}}{M_{Tierra}}\frac{(R_{Tierra})^2}{(½R_{Tierra})^2}=8\Rightarrow g_{Planeta}=8\,g_{Tierra}=8\cdot9,81=78,5\,m/s^2$$

La aceleración de la gravedad es un vector: la dirección es una línea radial a partir del centro del Planeta, y el sentido dirigido hacia el centro del planeta.

2015-Septiembre

A. Pregunta 1.-

$$g_{superficie}=G\frac{M}{R_{superficie}^2}\Rightarrow M=g_{superficie}\cdot\frac{R_{superficie}^2}{G}$$

a) $$2\cdot10^8=2\pi R_{superficie}\Rightarrow R_{superficie}=\frac{2\cdot10^8}{2\pi}$$

$$M=3\cdot\frac{(\frac{10^8}{\pi})^2}{6,67\cdot10^{-11}}=4,56\cdot10^{25}\,kg$$

b) Igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en la órbita circular del planeta:

$$G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_o}\Rightarrow v^2=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow\frac{(2\pi R)^2}{T^2}=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R_o^3$$

$$T=\sqrt{\frac{4\cdot\pi^2}{6,67\cdot10^{-11}\cdot4,56\cdot10^{25}}\cdot(\frac{10^8}{\pi}+30\cdot10^6)^3}=5,54\cdot10^4\,s=15,4\,h$$

B. Pregunta 1.-

a) $$g_{superficie}=G\frac{M}{R_{superficie}^2}=G\frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R_{superficie}^3}{R_{superficie}^2}=G\rho\frac{4}{3}\pi R_{superficie}$$

$$g_{superficie}=6,67\cdot10^{-11}\cdot5500\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot5\cdot10^3=7,68\cdot10^{-3}\,m/s^2$$

b) Se podría incluir el deducir la expresión de la velocidad de escape en la superficie de un planeta en función de su masa y su radio, utilizando el principio de conservación de la energía mecánica entre el lanzamiento y una posición infinitamente alejada, pero la usamos directamente:

$$v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}=\sqrt{2\frac{G\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{R}}=\sqrt{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5500\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot(5\cdot 10^3)^2}=8{,}77\,m/s$$

2015-Junio-Coincidentes

A. Pregunta 1.-

a) Planteamos la diferencia de energía entre los dos puntos, asumiendo velocidad nula en ambos, y esa diferencia será la energía mínima a aportar (enunciado habla de energía cinética a aportar; se puede asumir que se trata de un lanzamiento vertical)

1. Superficie: $E_p=-G\frac{Mm}{R_T}$

2. Altura h: $E_p=-G\frac{Mm}{R_T+h}$

La energía a aportar será

$$\Delta E=-G\frac{Mm}{R_T+h}-(-G\frac{Mm}{R_T})=GMm(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{R_T+h})=GMm\frac{h}{(R_T)(R_T+h)}$$

Para el caso h=R_T la expresión queda $\Delta E=\frac{GMm}{2R_T}$

Sustituyendo $\Delta E=\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}\cdot 10^3}{2\cdot 6{,}37\cdot 10^6}=3{,}13\cdot 10^{10}\,J$

b) La energía adicional a aportar es la energía cinética asociada a la velocidad que tiene que tener para tener una órbita estable a esa altura.

Igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en una órbita circular estable

$$G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_o}\Rightarrow v^2=\frac{GM}{R_o}$$

La energía cinética adicional a aportar será $E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}G\frac{Mm}{R_o}$ En este caso $R_o=R_T+h=2R_T$

Sustituyendo $E=\frac{1}{2}\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}\cdot 10^3}{2\cdot 6{,}37\cdot 10^6}=1{,}56\cdot 10^{10}\,J$

B. Pregunta 1.-

a) $g_{planeta}=G\frac{M_{planeta}}{R_{planeta}^2}=G\frac{M_{planeta}}{(2\cdot R_T)^2}\cdot\frac{M_{Tierra}}{M_{Tierra}}=G\frac{M_{Tierra}}{R_T^2}\cdot\frac{M_{planeta}}{4M_{Tierra}}=g_{Tierra}\frac{M_{planeta}}{4M_{Tierra}}$

Como según enunciado la aceleración de la gravedad es la misma

$$1=\frac{M_{planeta}}{4M_{Tierra}}\Rightarrow M_{planeta}=4M_{Tierra}$$

b) Planteamos la diferencia de energía entre los dos puntos, asumiendo velocidad nula en ambos, y esa diferencia será la energía mínima a aportar

1. Superficie: $E_p=-G\frac{Mm}{R_{superficie}}$

2. Altura h: $E_p=-G\frac{Mm}{R_{superficie}+h}$

La energía a aportar será

$$\Delta E=-G\frac{Mm}{R_{superficie}+h}-(-G\frac{Mm}{R_{superficie}})=GMm(\frac{1}{R_{superficie}}-\frac{1}{R_{superficie}+h})=GMm\frac{h}{(R_{superficie})(R_{superficie}+h)}$$

Comparando para h =R$_T$ $$\frac{\Delta E_{planeta}}{\Delta E_{Tierra}}=\frac{G4M_{Tierra}m\frac{R_T}{(2R_T)(3R_T)}}{GM_{Tierra}m\frac{R_T}{(R_T)(2R_T)}}=\frac{4}{3}$$

2015-Junio

A. Pregunta 1.-

a) Para calcular la velocidad en una órbita circular, si el diámetro es $2,14\cdot10^6$ km, el radio es $1,07\cdot10^9$ m

$$v_{exterior}=\frac{2\cdot\pi\cdot R_{exterior}}{T_{exterior}}=\frac{2\cdot\pi\cdot1,07\cdot10^9}{171,6\cdot3600}=1,09\cdot10^4\,m/s$$

Utilizando la tercera ley de Kepler podemos plantear (no es necesario cambiar de unidades los periodos mientras expresemos ambos con las mismas unidades)

$$\frac{R_{exterior}^3}{R_{interior}^3}=\frac{T_{exterior}^2}{T_{interior}^2}\Rightarrow R_{interior}=R_{exterior}\sqrt[3]{\frac{T_{interior}^2}{T_{exterior}^2}}\Rightarrow R_{interior}=1,07\cdot10^9\cdot\sqrt[3]{\frac{42^2}{171,6^2}}=4,19\cdot10^8\,m$$

b) Si igualamos fuerza centrípeta y gravitatoria en la órbita circular para el planeta exterior:

$$G\frac{Mm}{R^2}=m\frac{v^2}{R}\Rightarrow M=\frac{v^2\cdot R}{G}=\frac{(1,09\cdot10^4)^2\cdot1,07\cdot10^9}{6,67\cdot10^{-11}}=1,91\cdot10^{27}\,kg$$

Si el diámetro del planeta es $2,4\cdot10^4$ km, su radio es $1,2\cdot10^7$ m

La aceleración de la gravedad en superficie es $g=G\frac{M}{R^2}=6,67\cdot10^{-11}\cdot\frac{1,91\cdot10^{27}}{(1,2\cdot10^7)^2}=885\,m/s^2$

B. Pregunta 1.-

a) Si el diámetro son $6,0\cdot10^5$ km, el radio son $3,0\cdot10^8$ m

$$g=G\frac{M}{R^2}\Rightarrow M=\frac{gR^2}{G}=\frac{125\cdot(3,0\cdot10^8)^2}{6,67\cdot10^{-11}}=1,7\cdot10^{29}\,kg$$

b) Si igualamos fuerza centrípeta y gravitatoria en la órbita circular llegamos a la expresión para la tercera ley de Kepler, con la que obtenemos el radio de la órbita usando periodo y masa.

$$G\frac{Mm}{R^2}=m\frac{v^2}{R}\Rightarrow\frac{GM}{R}=\left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2\Rightarrow T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R^3\Rightarrow R=\sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

$$R=\sqrt[3]{\frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot1,7\cdot10^{29}\cdot(12\cdot3600)^2}{4\pi^2}}=8,1\cdot10^8\,m$$

2015-Modelo

A. Pregunta 1.-

a) Llamamos M=Masa estrella, m=masa del planeta, T=Periodo revolución planeta

Igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en la órbita circular del planeta:

$$G\frac{Mm}{R^2}=m\frac{v^2}{R_p}\Rightarrow v^2=\frac{GM}{R}\Rightarrow\frac{(2\pi R)^2}{T^2}=\frac{GM}{R}\Rightarrow R^3=\frac{GMT^2}{4\pi^2}$$ (R es radio órbita del planeta)

Esta relación es la 3ª ley de Kepler para órbitas circulares.

b) La expresión anterior es válida tanto para el planeta como para la Tierra: planteamos ambas

Planeta: $R^3=G\frac{MT^2}{4\pi^2}$

Tierra: $R_{órbita\,Tierra}^3=G\frac{M_{Sol}T_{Tierra}^2}{4\pi^2}$ (indicamos $R_{órbita\,Tierra}$ para no confundir con R_{Tierra})

Por el enunciado tenemos que M=3·M_{Sol}, y T=T_{Tierra}. Sustituyendo y dividiendo ambas expresiones

$$\frac{R^3}{R^3_{órbita Tierra}}=\frac{\cancel{G}\frac{3\cdot \cancel{M_{Sol}}\cdot \cancel{T^2}}{\cancel{4\pi^2}}}{\cancel{G}\frac{\cancel{M_{Sol}}\cancel{T^2}}{\cancel{4\pi^2}}}=3\Rightarrow R=\sqrt[3]{3}\,R_{órbita Tierra}$$

B. Pregunta 1.-

a) Se indica solamente radio: asumimos planetas esféricos y de densidad uniforme.

$$g_{superficie}=G\frac{M}{R^2_{planeta}};\ M=\rho\cdot V=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3_{planeta}\Rightarrow g_{superficie}=G\frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3_{planeta}}{R^2_{planeta}}=G\cdot\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R_{planeta}$$

$$\frac{g_{superficie\,A}}{g_{superficie\,B}}=\frac{\cancel{G}\cdot\rho_A\cdot\cancel{\frac{4}{3}\pi}R_A}{\cancel{G}\cdot\rho_B\cdot\cancel{\frac{4}{3}\pi}R_B}\Rightarrow\frac{\rho_A}{\rho_B}=\frac{g_{superficie\,A}}{g_{superficie\,B}}\cdot\frac{R_B}{R_A}=3\cdot 1=3$$

b) Introducción genérica (o bien plantear directamente la expresión para la velocidad de escape)
El significado físico de la velocidad de escape es la velocidad que debería tener un cuerpo en la superficie de un planeta para escapar del campo gravitatorio, es decir, llegar al infinito con velocidad nula. Utilizando el principio de conservación de la energía y teniendo en cuenta que en el infinito la E_p y E_c son nulas

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R_{superficie}}=0;\ v_{escape}=\sqrt{2\frac{GM}{R_{superficie}}}=\sqrt{2\cdot g_{superficie}\cdot R_{superficie}}$$

$$\frac{v_{escape\,A}}{v_{escape\,B}}=\frac{\sqrt{2\cdot g_{superficie\,A}\cdot R_A}}{\sqrt{2\cdot g_{superficie\,B}\cdot R_B}}=\sqrt{3\cdot 1}=\sqrt{3}$$

$$v_{escape\,B}=\frac{v_{escape\,A}}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 10^3\,m/s\approx 1155\,m/s$$

Validación lógica: si ambos tienen el mismo radio, pero A tiene más aceleración gravitatoria en superficie, la velocidad de escape de B tiene que ser menor que la de A.

2014-Septiembre

A. Pregunta 1.-

a) Igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en la órbita circular:

$$G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_o}\Rightarrow v^2=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow\frac{(2\pi R_o)^2}{T^2}=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow R_o^3=\frac{GMT^2}{4\pi^2}$$

No tenemos como datos G y M,pero tenemos como dato la gravedad en su superficie y su radio, por lo podemos plantear

$$g_{superficie}=G\frac{M}{R^2_{planeta}}\Rightarrow GM=g_{superficie}\cdot R^2_{planeta}$$

Sustituyendo

$$R_o=\sqrt[3]{\frac{3{,}71\cdot(3393\cdot 10^3)^2\cdot(24\cdot 3600)^2}{4\pi^2}}=2{,}01\cdot 10^7\,m$$

b) Introducción genérica (o bien plantear directamente la expresión para la velocidad de escape)
El significado físico de la velocidad de escape es la velocidad que debería tener un cuerpo en la superficie de un planeta para escapar del campo gravitatorio, es decir, llegar al infinito con velocidad nula. Utilizando el principio de conservación de la energía y teniendo en cuenta que en el infinito la E_p y E_c son nulas

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R_{superficie}}=0;\ v_{escape}=\sqrt{2\frac{GM}{R_{superficie}}}=\sqrt{2\cdot g_{superficie}\cdot R_{superficie}}=\sqrt{2\cdot 3{,}71\cdot 3393\cdot 10^3}=5018\,m/s$$

Comentario: por los datos de gravedad en superficie y radio, el planeta es Marte.

B. Pregunta 1.-

a) Utilizando el dato de planeta esférico, densidad uniforme, y realizando los cambios de unidades necesarios al Sistema Internacional

$$g_{superficie}=G\frac{M}{R_{planeta}^2};M=\rho\cdot V=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R_{planeta}^3$$

$$g_{superficie}=G\frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R_{planeta}^3}{R_{planeta}^2}=G\cdot\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R_{planeta}=6,67\cdot10^{-11}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot1,33\cdot10^3\cdot71500\cdot10^3=26,57\,m/s^2$$

b) Igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en la órbita circular, calculamos el radio de la órbita

$$G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_o}\Rightarrow v^2=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow\frac{(2\pi R_o)^2}{T^2}=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow R_o^3=\frac{GMT^2}{4\pi^2}=\frac{g_{superficie}\cdot R_{planeta}^2\cdot T^2}{4\pi^2}$$

$$R_o=\sqrt[3]{\frac{26,57\cdot(71500\cdot10^3)^2\cdot(73\cdot3600)^2}{4\pi^2}}=6,19\cdot10^8\,m$$

En una órbita circular

$$v=\frac{2\pi R_o}{T}=\frac{2\cdot\pi\cdot6,19\cdot10^8}{73\cdot3600}=1,48\cdot10^4\,m/s$$

2014-Junio-Coincidentes

A. Pregunta 1.-

a) Igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en una órbita circular

$$G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_o}\Rightarrow v^2=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow\frac{(2\pi R_o)^2}{T^2}=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow R_o^3=\frac{GMT^2}{4\pi^2}$$

No tenemos G y M como dato, pero utilizando el dato de energía mecánica y la expresión para la energía mecánica para una órbita circular

$$E_m=\frac{-1}{2}G\frac{Mm}{R_o}\Rightarrow GM=-2\frac{E_mR_o}{m}$$

Sustituyendo

$$R_o^3=-2\frac{E_mR_o}{m}\frac{T^2}{4\pi^2}\Rightarrow R_o=\sqrt{-2\frac{E_m}{m}\frac{T^2}{4\pi^2}}=\sqrt{-2\cdot\frac{(-5\cdot10^7)}{100}\frac{(24\cdot3600)^2}{4\pi^2}}=1,38\cdot10^7\,m$$

b) $M=-2\frac{E_mR_o}{Gm}=-2\cdot\frac{(-5\cdot10^7\cdot1,38\cdot10^7)}{6,67\cdot10^{-11}\cdot100}=2,01\cdot10^{23}\,kg$

B. Pregunta 1.-

a) Si el diámetro de la Tierra es 2,48 veces mayor, el radio es también 2,48 veces mayor.

$$g_{Titán}=G\frac{M_{Titán}}{R_{Titán}^2}=G\frac{\frac{M_{Tierra}}{44,3}}{\left(\frac{R_{Tierra}}{2,48}\right)^2}=G\frac{M_{Tierra}}{R_{Tierra}^2}\frac{2,48^2}{44,3}=g_{Tierra}\cdot\frac{2,48^2}{44,3}=9,81\cdot\frac{2,48^2}{44,3}\approx1,36\,m/s^2$$

b) Se podría incluir el deducir la expresión de la velocidad de escape en la superficie de un planeta en función de su masa y su radio, utilizando el principio de conservación de la energía mecánica entre el lanzamiento y una posición infinitamente alejada, pero la usamos directamente:

$$v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}$$

$$\frac{v_{e_{Tierra}}}{v_{e_{Titán}}}=\frac{\sqrt{2\frac{GM_{Tierra}}{R_{Tierra}}}}{\sqrt{2\frac{GM_{Titán}}{R_{Titán}}}}=\sqrt{\frac{M_{Tierra}}{M_{Titán}}\frac{R_{Titán}}{R_{Tierra}}}=\sqrt{44,3\cdot\frac{1}{2,48}}\approx4,23$$

2014-Junio

A. Pregunta 1.-

a) Se podría incluir el deducir la expresión de la velocidad de escape en la superficie de un planeta en función de su masa y su radio, utilizando el principio de conservación de la energía mecánica entre el lanzamiento y una posición infinitamente alejada, pero la usamos directamente:

$v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}$ La combinamos con los datos del enunciado: $M_A/M_B=3$ y $R_A/R_B=4$

$$\frac{v_{e_A}}{v_{e_B}}=\frac{\sqrt{2\frac{GM_A}{R_A}}}{\sqrt{2\frac{GM_B}{R_B}}}=\sqrt{\frac{M_A}{M_B}\frac{R_B}{R_A}}=\sqrt{3\cdot\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) $\frac{g_{A,superficie}}{g_{B,superficie}}=\frac{G\frac{M_A}{R_A^2}}{G\frac{M_B}{R_B^2}}=\frac{M_A}{M_B}\frac{R_B^2}{R_A^2}=3\cdot\frac{1}{4^2}=\frac{3}{16}$

B. Pregunta 1.-

a) Se podría incluir el deducir la expresión de la velocidad de lanzamiento para alcanzar una altura h en la superficie de un planeta en función de su masa, su radio y la altura alcanzada, utilizando el principio de conservación de la energía mecánica entre el lanzamiento y la posición de máxima altura, pero la usamos directamente:

$v_L=\sqrt{2GM(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h})}$ La velocidad de escape es una particularización de esta velocidad para el caso de h=∞, con lo que se tiene $v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}$

Sustituimos los datos datos y calculamos valores numéricos:

$$v_L=\sqrt{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}(\frac{1}{6{,}37\cdot 10^6}-\frac{1}{6{,}37\cdot 10^6+500\cdot 10^3})}=3{,}02\cdot 10^3\,m/s$$

$$v_e=\sqrt{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}(\frac{1}{6{,}37\cdot 10^6})}=1{,}12\cdot 10^4\,m/s$$

Como se indica comparar, lo hacemos cualitativamente: la velocidad de escape tiene que ser mucho mayor que la velocidad de lanzamiento para alcanzar esa altura, ya que supone "llevar la carga más lejos, aportarle más energía potencial".

Ni la velocidad de lanzamiento ni la velocidad de escape dependen de la masa del objeto, que son 2 kg según el enunciado. Esa masa influirá en la energía gastada en proporcionar a ese cuerpo esa velocidad, que supone aportarle esa energía cinética.

b) Aunque se podría hacer numéricamente para la velocidad de lanzamiento calculada en a, y sería válido y más corto, lo hacemos analíticamente para expresar esa distancia en función de R y h.

Utilizamos la conservación de la energía mecánica, llamando

A: Situación de lanzamiento: la energía mecánica es la cinética y la potencial gravitatoria asociada al radio de la Tierra. Al mismo tiempo, y por conservación de energía mecánica en la situación del apartado a, será la energía mecánica en el punto de altura máxima

$$E_m(A)=\frac{1}{2}mv_L^2-G\frac{Mm}{R}=\frac{1}{2}m2GM(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h})-G\frac{Mm}{R}=-G\frac{Mm}{R+h}$$

B: Situación donde la velocidad se ha reducido un 10% (pasa a ser el 90% de la inicial) con respecto a la velocidad de lanzamiento: la energía mecánica es la cinética asociada al 90% de velocidad y la potencial gravitatoria asociada a la altura que queremos averiguar, que llamamos x.

$$E_m(B)=\frac{1}{2}m(v_L\cdot 0{,}9)^2-G\frac{Mm}{R+x}=0{,}9^2 mGM(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h})-G\frac{Mm}{R+x}=GMm(\frac{0{,}81}{R}-\frac{0{,}81}{R+h}-\frac{1}{R+x})$$

Igualando y operando

$$-G\frac{Mm}{R+h}=G\,Mm\left(\frac{0,81}{R}-\frac{0,81}{R+h}-\frac{1}{R+x}\right)$$

$$\frac{-1}{R+h}=\frac{0,81(R+h)(R+x)-0,81\,R(R+x)-R(R+h)}{R(R+h)(R+x)}$$

$$-R^2-Rx=0,81\,R^2+0,81\,Rh+0,81\,Rx+0,81\,hx-0,81\,R^2-0,81\,Rx-R^2-Rh$$

$$(-1-0,81+0,81+1)R^2+(-R-0,81\,R-0,81h+0,81\,R)\,x=(0,81-1)\,Rh$$

$$x=\frac{-0,19\,Rh}{-R-0,81\,h}=\frac{0,19\,h}{1+0,81\frac{h}{R}}$$

Físicamente podemos validar cierta consistencia: la expresión cumple que si h=0 entonces x=0.
Si h<<R, llegamos a que x=0,19h, que es la expresión a la que se llega si igualamos utilizando la expresión de energía potencial gravitatoria para h<<R, y en ese caso $v_L^2=2gh$

$$mgx+½\,m(0,9\,v)^2=mgh\Rightarrow gx+½0,81\cdot 2\,gh=gh\Rightarrow x=0,19\,h$$

Sustituyendo

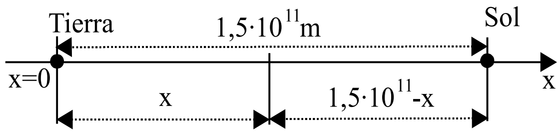
$$x=\frac{-0,19\cdot 6,37\cdot 10^6\cdot 500\cdot 10^3}{-6,37\cdot 10^6-0,81\cdot 500\cdot 10^3}=8,93\cdot 10^4\,m=89\,km$$

Físicamente podemos validar cierta consistencia: es menor que 500 km, y que está más próximo al punto más de lanzamiento (donde se tiene el 100% de la velocidad inicial) que al punto de máxima altura donde la velocidad es nula.
Como enunciado pide “la distancia a la que se encuentra el cohete, con respecto al centro de la Tierra”, el resultado pedido es $6,37\cdot 10^6+8,93\cdot 10^4\approx 6,46\cdot 10^6$ m

2014-Modelo

A. Pregunta 1.-

a) Hay una manera elegante y simple de resolverlo sin ningún cálculo (idea de Juan G): el potencial gravitatorio solamente es 0 en el infinito, tanto para el potencial creado por una única masa como para el potencial creado por varias masas, ya que se suman siempre potenciales con el mismo signo, luego no puede haber ningún punto con coordenada finita donde se anule el potencial.
Resolviéndolo de manera numérica, tomamos como eje x la línea que une ambos centros, con el origen en la Tierra y x positivas dirigidas hacia el Sol, utilizando unidades en m. Con lo que la coordenada x de un punto será su distancia a la Tierra, y $1,5\cdot 10^{11}$-x será la distancia de ese punto al Sol. Utilizando el principio de superposición, el potencial gravitatorio será la suma de potenciales gravitatorios asociados al Sol y a la Tierra. En la fórmula debemos utilizar distancias, no coordenadas, y usamos valor absoluto ya que las distancias siempre son positivas.



$$V=V_{Tierra}+V_{Sol}=-G\frac{M_{Tierra}}{|x|}-G\frac{M_{Sol}}{|1,5\cdot 10^{11}-x|}=0$$ Sustituyendo $M_{Sol}=333183\cdot M_{tierra}$,

$$0=\frac{1}{|x|}+\frac{333183}{|1,5\cdot 10^{11}-x|}\Rightarrow -\frac{1}{|x|}=\frac{333183}{|1,5\cdot 10^{11}-x|}$$ Resolvemos desglosando casos de valores absolutos:

Caso A: x<0 → |x|=-x, $|1,5\cdot 10^{11}-x|=1,5\cdot 10^{11}-x$ $\quad 333183\cdot x=1,5\cdot 10^{11}-x\Rightarrow x=\frac{1,5\cdot 10^{11}}{333184}=4,5\cdot 10^5\,m$

No es válido ya que la solución es positiva cuando la premisa es que fuera negativa.
Caso B: $0<x<1,5\cdot 10^{11}$ → |x|=x, $|1,5\cdot 10^{11}-x|=1,5\cdot 10^{11}-x$

$$-333183\cdot x=1,5\cdot 10^{11}-x\Rightarrow x=\frac{1,5\cdot 10^{11}}{-333182}=-4,5\cdot 10^5\,m$$

No es válido ya que la solución es negativa cuando la premisa es que fuera positiva.
Caso C: $1,5\cdot 10^{11}<x$→ |x|=x, $|1,5\cdot 10^{11}-x|=-1,5\cdot 10^{11}+x$

$$-333183\cdot x=-1,5\cdot 10^{11}+x\Rightarrow x=\frac{-1,5\cdot 10^{11}}{-333184}=4,5\cdot 10^5\,m$$

No es válido ya que la solución está fuera del rango establecido como premisa

Nota: Aunque los resultados fueran válidos, su valor es de 450 km, y tampoco serían válidos ya que quedaría en el interior de la Tierra (R_{Tierra} ≈6370 km) y dejaría de ser válido el modelo de masa puntual usado para la Tierra.
b) Tomando el mismo sistema de referencia del apartado a) y utilizando la ley de gravitación universal y el principio de superposición tenemos

$\vec{E}=\vec{E}_{Tierra}+\vec{E}_{Sol}=G\frac{M_{Tierra}}{x^2}(-\vec{i})+G\frac{M_{Sol}}{(1,5\cdot 10^{11}-x)^2}\vec{i}=0$ Sustituyendo M_{Sol}=333183 ·M_{Tierra},

$$0=\frac{-1}{x^2}+\frac{333183}{(1,5\cdot 10^{11}-x)^2}\Rightarrow 333183\cdot x^2=(1,5\cdot 10^{11}-x)^2\Rightarrow\sqrt{333183}\cdot x=1,5\cdot 10^{11}-x$$

$$x=\frac{1,5\cdot 10^{11}}{\sqrt{333183}+1}=2,6\cdot 10^8\,m$$

B. Pregunta 1.-

a) El momento angular es un vector pero se pide solamente el módulo.
Al estar los satélites geoestacionarios en el plano ecuatorial, el vector posición respecto al centro de la Tierra y el vector velocidad son perpendiculares, y podemos plantear

$$|\vec{L}|=R_{órbita}\cdot m_{satélite}\cdot v_{satélite}$$

Calculamos el radio de la órbita geoestacionaria. Al ser una órbita circular, podemos igualar fuerza gravitatoria y centrípeta, siendo al mismo tiempo $v=\frac{2\pi R_{órbita}}{T}$ con T=24·3600=86400 s

$$G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_o}\Rightarrow v^2=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow\frac{(2\pi R_o)^2}{T^2}=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow R_o^3=\frac{GMT^2}{4\pi^2}\Rightarrow R_o=\sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

$$R_o=\sqrt[3]{\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,97\cdot 10^{24}\cdot 86400^2}{4\pi^2}}=4,22\cdot 10^7\,m$$

$$|\vec{L}|=4,22\cdot 10^7\cdot 500\cdot\frac{2\pi 4,22\cdot 10^7}{86400}=6,48\cdot 10^{13}\,kg\cdot m^2\cdot s^{-1}$$

Para calcular la altura respecto de la superficie terrestre, restamos el radio terrestre:
$h=R_{órbita}-R_{terrestre}=4,22\cdot 10^7-6,37\cdot 10^6=3,58\cdot 10^7$ m

b) $E_m=E_c+E_p=\frac{1}{2}mv^2-G\frac{Mm}{R_o}=-G\frac{Mm}{2R_o}=-6,67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{5,97\cdot 10^{24}\cdot 500}{2\cdot 4,22\cdot 10^7}=-2,36\cdot 10^9\,J$

2013-Septiembre

A. Pregunta 1.-

a) $g_{planeta}=G\frac{M_{planeta}}{R_{Planeta}^2}$

Como la órbita es circular, igualamos fuerza centrípeta y gravitatoria y expresamos en función de los datos para el primer satélite, teniendo $v_o=2\pi R_o/T$

$$m\frac{v_o^2}{R_o}=\frac{GM_{planeta}m}{R_o^2}\Rightarrow\frac{(2\pi R_o)^2}{T^2}=\frac{GM_{planeta}}{R_o}\Rightarrow GM_{planeta}=\frac{4\pi^2R_o^3}{T^2}$$

Sustituyendo $g_{planeta}=\frac{4\pi^2R_o^3}{T^2R_{Planeta}^2}=\frac{4\pi^2((3+1)\cdot 10^6)^3}{(2\cdot 3600)^2\cdot(3\cdot 10^6)^2}=5,4\,m/s^2$

b) Utilizando la tercera ley de Kepler, utilizamos subíndice 1 para datos primer satélite y 2 para segundo. Según enunciado T_1=2 h.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{R_1^3}{R_2^3};T_2=T_1\sqrt{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3}=2\sqrt{\left(\frac{(3+1+0,5)\cdot 10^6}{(3+1)\cdot 10^6}\right)^3}=2,39\,h$$

B. Pregunta 1.-

a) $\rho=\frac{M}{V}=\frac{M}{(4/3)\pi R^3}\Rightarrow M=\rho(4/3)\pi R^3$

$$\frac{g_A}{g_B}=\frac{G\frac{M_A}{R_A^2}}{G\frac{M_B}{R_B^2}}=\frac{M_A\cdot R_B^2}{M_B\cdot R_A^2}=\frac{\rho_A(4/3)\pi R_A^3 R_B^2}{\rho_B(4/3)\pi R_B^3 R_A^2}$$ Como enunciado indica misma densidad

$$\frac{g_A}{g_B}=\frac{R_A}{R_B}=\frac{3500}{3000}=7/6$$

b) Introducción genérica (o bien plantear directamente la expresión para la velocidad de escape)
El significado físico de la velocidad de escape es la velocidad que debería tener un cuerpo en la superficie de un planeta para escapar del campo gravitatorio, es decir, llegar al infinito con velocidad nula. Utilizando el principio de conservación de la energía y teniendo en cuenta que en el infinito la E_p y E_c son nulas

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R_{superficie}}=0\,;v_{escape}=\sqrt{2\frac{GM}{R_{superficie}}}\ .$$

$$\frac{v_{escapeA}}{v_{escapeB}}=\sqrt{\frac{\frac{2GM_A}{R_A}}{\frac{2GM_B}{R_B}}}=\sqrt{\frac{M_A R_B}{M_B R_A}}=\sqrt{\frac{\rho_A(4/3)\pi R_A^3 R_B}{\rho_B(4/3)\pi R_B^3 R_A}}=\frac{R_A}{R_B}=7/6$$

2013-Junio-Coincidentes

A. Pregunta 1.-

a) Igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en una órbita circular

$$G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_o}\Rightarrow v^2=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow\frac{(2\pi R_o)^2}{T^2}=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow R_o^3=\frac{GMT^2}{4\pi^2}$$

Relacionamos el periodo con la velocidad angular, dato del problema $T=\frac{2\pi}{\omega}$, y sustituyendo

$$R_o=\sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 7{,}35\cdot 10^{22}\cdot(\frac{2\pi}{\omega})^2}{4\pi^2}}=2{,}97\cdot 10^6 m$$

Se nos pide altura desde la superficie $h=R_0-R_L=2{,}97\cdot 10^6-1{,}74\cdot 10^6=1{,}23\cdot 10^6$ m

b) Podemos deducir la expresión para la energía mecánica para una órbita circular

$$E_m=\frac{-1}{2}G\frac{Mm}{R_{órbita}}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{7{,}35\cdot 10^{22}\cdot 800}{2\cdot 2{,}97\cdot 10^6}=-6{,}60\cdot 10^8 J$$

B. Pregunta 1.-

a) $g_0=G\frac{M}{R_0^2}\Rightarrow G=\frac{g_0 R_0^2}{M}=\frac{9{,}81\cdot(6{,}37\cdot 10^6)^2}{5{,}97\cdot 10^{24}}=6{,}67\cdot 10^{-11} N{\cdot}kg^2\cdot m^{-2}$

Para un péndulo en régimen de pequeñas oscilaciones, se puede deducir la expresión $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$,

que sustituyendo nos da $T_0=2\pi\sqrt{\frac{2}{9{,}81}}\approx 2{,}84 s$

b) $g_1=G\frac{M}{R_1^2}=6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{5{,}97\cdot 10^{24}}{(6{,}37\cdot 10^6+8\cdot 10^3)^2}=9{,}79 m/s^2$

$$T_0=T_1=2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g_1}}\Rightarrow L_1=g_1\cdot(\frac{T_1}{2\pi})^2=9{,}79\cdot(\frac{2{,}83}{2\pi})^2=1{,}99 m$$

2013-Junio

A. Pregunta 3.-

a) $g_{Mercurio}=G\frac{M_{Mercurio}}{R_{Mercurio}^2}\Rightarrow M_{Mercurio}=\frac{g_{Mercurio}\cdot R_{Mercurio}^2}{G}=\frac{3{,}7\cdot(2440\cdot 10^3)^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}}=3{,}3\cdot 10^{23} kg$

$$\rho_{Mercurio}=\frac{M_{Mercurio}}{V_{Mercurio}}=\frac{3{,}3\cdot 10^{23}}{(4/3)\pi(2440\cdot 10^3)^3}=5423\,kg/m^3$$

b) Si $g_{órbita}/g_{superfice}=1/4 \rightarrow R_{superfice}^2/R_{órbita}^2=1/4 \rightarrow R_{órbita} = 2\cdot R_{superficie}$

La energía necesaria es la diferencia de energía mecánica entre ambas situaciones:

-En superficie la energía es potencial:

$$E_p=-G\frac{Mm}{R_{superficie}}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{3{,}3\cdot 10^{23}\cdot 5000}{2440\cdot 10^3}=-4{,}5\cdot 10^{10}\,J$$

-En órbita la energía es la suma de cinética y potencial. Si asumimos órbita circular estable, igualando fuerza centrípeta y gravedad podemos deducir la expresión para la energía mecánica

$E_m=-G\frac{Mm}{2}R_{órbita}$, y sustituyendo $R_{órbita} = 2\cdot R_{superficie}$, tenemos que

$$E_m=-G\frac{Mm}{2\cdot 2\cdot R_{superficie}}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{3{,}3\cdot 10^{23}\cdot 5000}{2\cdot 2\cdot 2440\cdot 10^3}=-1{,}25\cdot 10^{10}J$$

La energía necesaria es $E_{m\ órbita} - E_{m\ superficie} =-1{,}25\cdot 10^{10} - (-4{,}5\cdot 10^{10}) = 3{,}25\cdot 10^{10}$ J

B. Pregunta 5.-

a) Falso. El momento angular, como vector y no solamente en módulo, es constante ya que la fuerza gravitatoria del Sol es una fuerza central. El momento lineal en el afelio es menor que en el perihelio, ya que en esos puntos, al ser vector posición r y momento lineal p perpendiculares, podemos igualar $r_A m v_A = r_P m v_P$ y dado que $r_A > r_P$, tiene que cumplirse que $v_P > v_A$

b) Falso. La energía mecánica se conserva en toda la órbita ya que solamente actúa la fuerza gravitatoria del Sol que es conservativa. La energía potencial sí es mayor en el afelio que en el perihelio, ya que la distancia es mayor, y de acuerdo a la expresión para la Energía potencial E_p=-GMm/R, a valores mayores de R tendremos un número negativo más pequeño, que implicará un valor mayor.

2013-Modelo

A. Pregunta 1.-

a) Al no existir rozamiento solamente actúa la fuerza de la gravedad que es conservativa y podemos plantear la conservación de la energía mecánica en el instante de lanzamiento y en el instante en el que alcanza la altura máxima.

1. Lanzamiento: $E_c=\frac{1}{2}m v^2$; $E_p=-G\frac{Mm}{R}$

2. Altura máxima (la altura es R+R/2= (3/2)·R): E_c=0; $E_p=-G\frac{Mm}{(3/2)\cdot R}=\frac{-2}{3}G\frac{Mm}{R}$

Igualando energía mecánica en puntos 1 y 2

$$\frac{1}{2}m v^2-G\frac{Mm}{R}=\frac{-2}{3}G\frac{Mm}{R}\Rightarrow\frac{v^2}{2}=\frac{G}{3}\frac{M}{R}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{2GM}{3R}}=\sqrt{\frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}25\cdot 10^{23}}{3\cdot 1{,}5\cdot 10^6}}=1924{,}98\,m/s$$

b) La aceleración es un vector. Calculamos su módulo e indicamos dirección y sentido cualitativamente: la dirección será radial y sentido dirigido hacia el centro del planeta.

$$|\vec{g}|=G\frac{M}{((3/2)\cdot R)^2}=6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{1{,}25\cdot 10^{23}}{(\frac{3}{2}\cdot 1{,}5\cdot 10^6)^2}=1{,}65\,m/s^2$$

B. Pregunta 1.-

a) Al ser una órbita circular, se puede deducir y manejar a la expresión $E_p=\frac{-GMm}{R}=2E_m$

Por lo tanto $M=\frac{2E_m R}{-Gm}=\frac{2\cdot(-3{,}27\cdot 10^8)\cdot 6\cdot 10^6}{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 800}=7{,}35\cdot 10^{22}\,kg$

b) La velocidad lineal en la órbita se puede obtener igualando fuerza centrípeta y gravitatoria, o también deducir y manejar la expresión $E_p= 2E_m$ y $E_m =-E_c$.

enrique@fiquipedia.es

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow -(-3{,}27\cdot 10^8)=\frac{1}{2}\cdot 800\cdot v^2 \qquad v=\sqrt{\frac{3{,}27\cdot 10^8\cdot 2}{800}}=904\,m/s$$

$$\omega=\frac{v}{R}=\frac{904}{6\cdot 10^6}=1{,}5\cdot 10^{-4}\,rad/s$$

Si igualamos fuerza centrípeta y gravitatoria, podríamos plantear

$$F_c=F_g \Rightarrow \cancel{m}\omega^2 R_O=G\frac{M\cancel{m}}{R_O^2}\Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{GM}{R_O^3}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 7{,}35\cdot 10^{22}}{(6\cdot 10^6)^3}}=1{,}5\cdot 10^{-4}\,rad/s$$

2012-Septiembre

A. Pregunta 2.-

a) El trabajo a realizar lo podemos relacionar con la diferencia de energía entre ambas órbitas:
-El trabajo realizado es la variación de energía cinética (teorema de las fuerzas vivas)
-El trabajo realizado para ir de órbita A a órbita B es la variación de energía potencial cambiada de signo.
En órbita circular, igualando fuerza centrípeta y gravitatoria, podemos llegar a que la energía mecánica y la cinética son la mitad en valor absoluto que la energía potencial, siendo la energía cinética positiva.
Situación A. $R_{oA}=5/2\ R_T$:

$$E_{pA}=-G\frac{M_T m}{5/2 R_T}=-2G\frac{M_T m}{5R_T} \qquad E_{cA}=\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{5/2 R_T}=G\frac{M_T m}{5R_T} \qquad E_{mA}=-G\frac{M_T m}{5R_T}$$

Situación B. $R_{oB}=5\ R_T$:

$$E_{pB}=-G\frac{M_T m}{5R_T} \qquad E_{cB}=\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{5R_T} \qquad E_{mB}=\frac{-1}{2}G\frac{M_T m}{5R_T}$$

-El trabajo realizado por el campo asociado asociado a la variación de energía potencial:

$$W_{FC\,A\to B}=-(E_{pB}-E_{pA})=-(-G\frac{M_T m}{5R_T}-(-2G\frac{M_T m}{5R_T}))=G\frac{M_T m}{5R_T}(1-2)$$

$$W_{FC\,A\to B}=-(E_{pB}-E_{pA})=-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot\frac{400}{5\cdot 6{,}37\cdot 10^6}=-5\cdot 10^9\,J$$

El resultado es negativo, trabajo no realizado por el campo sino aportado contra el campo (en sentido opuesto campo): estamos llevando el satélite a una “altura mayor”, con más energía potencial, aportamos energía al sistema.
-El trabajo asociado asociado a la variación de energía cinética:

$$W_{Total\,A\to B}=E_{cB}-E_{cA}=\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{5R_T}-G\frac{M_T m}{5R_T}=G\frac{M_T m}{5R_T}(\frac{1}{2}-1)=\frac{-1}{2}G\frac{M_T m}{5R_T}$$

$$W_{Total\,A\to B}=E_{cB}-E_{cA}=-0{,}5\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot\frac{400}{5\cdot 6{,}37\cdot 10^6}=-2{,}5\cdot 10^9\,J$$

El resultado es negativo, en la órbita B la energía cinética es menor. Se extrae trabajo/energía del sistema, que “pierde” energía cinética.
El trabajo total a realizar será el trabajo aportado para aumentar la energía potencial (cambiamos el signo porque las expresiones son para el trabajo realizado por el campo, no externamente) menos el trabajo extraído para reducir la energía cinética:

$$W_{No\ conservativo\,A\to B}=\Delta E_m=\Delta E_p+\Delta E_c=5\cdot 10^9-2{,}5\cdot 10^9\,J=2{,}5\cdot 10^9\,J$$

Nota: podemos llegar a la misma expresión indicando que el trabajo aportado es la variación de energía mecánica. Como en las órbitas E_m=-E_c,

$$W_{No\ conservativo\,A\to B}=E_{mB}-E_{mA}=-(E_{cB}-E_{cA})=2{,}5\cdot 10^9\,J$$

b) Órbita circular, igualamos fuerza centrípeta y gravitatoria, y $v_o=2\pi R_o/T$

$$m\frac{v_o^2}{R_o}=\frac{GM_T m}{R_o^2}\Rightarrow\frac{(2\pi R_o)^2}{T^2}=\frac{GM_T}{R_o}\Rightarrow T=\sqrt{\frac{4\pi^2 R_o^3}{GM_T}}=T=\sqrt{\frac{4\pi^2(5\cdot 6{,}37\cdot 10^6)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}}=5{,}68\cdot 10^4\,s$$

B. Pregunta 2.- *(Similitudes con 2010-Junio-Coincidentes-B.Cuestión 1: 1/6≈0,166, 1/4≈0,273)*

a) Introducción genérica (o bien plantear directamente la expresión para la velocidad de escape)
El significado físico de la velocidad de escape es la velocidad que debería tener un cuerpo en la superficie terrestre para escapar del campo gravitatorio, es decir, llegar al infinito con velocidad nula. Utilizando el principio de conservación de la energía y teniendo en cuenta que en el infinito la E_p y E_c son nulas

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R_T}=0\,;\,v_{escape}=\sqrt{\frac{2GM}{R_T}}\ .$$

Se pide la velocidad de escape de la Luna y no disponemos de masa: intentamos relacionar masa de la Luna con la de la Tierra según la relación entre aceleraciones de la gravedad proporcionada:

$$\frac{|\vec{g}_L|}{|g_T|}=0{,}166=\frac{\frac{GM_L}{R_L^2}}{\frac{GM_T}{R_T^2}}=\frac{M_L}{M_T}\cdot\frac{R_T^2}{R_L^2}=\frac{M_L}{M_T}\frac{R_T^2}{(0{,}273R_T)^2}\Rightarrow\frac{M_L}{M_T}=0{,}166\cdot0{,}273^2$$

$$v_{e_L}=\sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}}=\sqrt{2\cdot6{,}67\cdot10^{-11}0{,}166\cdot0{,}273^2\cdot5{,}98\cdot\frac{10^{24}}{0{,}273\cdot6{,}37\cdot10^6}}=2382\,m/s$$

b) Órbita circular, igualamos fuerza centrípeta y gravitatoria. Pasamos la velocidad a m/s

$$m\frac{v_o^2}{R_o}=\frac{GM_Lm}{R_o^2}\Rightarrow R_o=\frac{GM_L}{v_o^2}=\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot0{,}166\cdot0{,}273^2\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{1{,}5\cdot10^{32}}=2{,}19\cdot10^6\,m$$

2012-Junio

A. Pregunta 1.-

a) Órbita circular, igualamos fuerza centrípeta y gravitatoria. Pasamos el radio de la órbita a metros.
$R_S=R_T+h=6{,}37\cdot10^6+2\cdot10^7=2{,}637\cdot10^7$ m

$$m\frac{v_o^2}{R_S}=\frac{GM_Tm}{R_S^2}\Rightarrow v_o=\sqrt{\frac{GM_T}{R_S}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{2{,}637\cdot10^7}}=3889\,m/s$$

b) Si la velocidad se anulase repentinamente, no tendría energía cinética y solamente tendría energía potencial asociada a la altura de la órbita, y caería verticalmente. Sin considerar el rozamiento del aire solamente actúa la fuerza de la gravedad conservativa y podemos considerar que hay conservación de la energía mecánica.

A. Órbita tras el frenado: $E_c=0, E_p=-G\frac{M_Tm}{R_S}$

B. Llegada a la superficie. $E_c=\frac{1}{2}mv_{suelo}^2, E_p=-G\frac{M_Tm}{R_T}$

Igualando energías mecánicas en A y B

$$-G\frac{M_Tm}{R_S}=\frac{1}{2}mv_{suelo}^2-G\frac{M_Tm}{R_T}\Rightarrow v_{suelo}=\sqrt{2GM_T\left(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{R_S}\right)}$$

$$v_{suelo}=\sqrt{2\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\left(\frac{1}{6{,}37\cdot10^6}-\frac{1}{2{,}637\cdot10^7}\right)}=9746\,m/s$$

B. Pregunta 1.-

a) Órbita circular, igualamos fuerza centrípeta y gravitatoria. Pasamos el radio de la órbita (R_O) a metros, y obtenemos periodo ya que $v_O=2\pi R_O/T$. Con datos enunciado
$R_O=R_T+h=6{,}37\cdot10^6+2{,}5\cdot10^7=3{,}137\cdot10^7$ m

$$m\frac{\left(\frac{2\pi R_O}{T}\right)^2}{R_O}=\frac{GM_Tm}{R_O^2}\Rightarrow4\pi^2R_O^3=GM_TT^2\Rightarrow T=\sqrt{\frac{4\pi^2R_O^3}{GM_T}}$$

$$T=\sqrt{\frac{4\cdot\pi^2\cdot(3{,}137\cdot10^7)^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}}=55276\,s$$

b) $E_p=-G\frac{M_T m}{R_S}=-6{,}67\cdot10^{-11}\frac{5{,}98\cdot10^{24}\cdot3000}{3{,}137\cdot10^{7}}=-3{,}81\cdot10^{10}J$

Para la energía cinética calculamos la velocidad con el periodo

$$E_c=\frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi R_O}{T}\right)^2=0{,}5\cdot3000\cdot\left(\frac{2\cdot\pi\cdot3{,}137\cdot10^7}{55276}\right)^2=1{,}91\cdot10^{10}J$$

También podríamos saber que en una órbita circular estable la energía mecánica y la cinética son la mitad en valor absoluto que la energía potencial, siendo la energía cinética positiva.

$$E_c=\frac{|E_p|}{2}=\frac{|-3{,}81\cdot10^{10}|}{2}=1{,}91\cdot10^{10}J$$

2012-Modelo

A. Pregunta 1.-

a) $g=G\frac{M}{R^2};M=\frac{g\cdot R^2}{G}=\frac{7{,}2\cdot(4100\cdot10^3)^2}{6{,}67\cdot10^{-11}}=1{,}81\cdot10^{24}kg$

b) Calculamos la diferencia de energía entre ambas situaciones

$$Superficie:E_c=0;E_p=-G\frac{Mm}{R}=\frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot1{,}81\cdot10^{24}\cdot3}{4100\cdot10^3}=-8{,}83\cdot10^7J$$

$$Órbita:E_c=\frac{1}{2}mv^2;E_p=-G\frac{Mm}{R_o}$$

$$R_o=4100+1000=5100\,km$$

$$E_p=\frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot1{,}81\cdot10^{24}\cdot3}{5100\cdot10^3}=-7{,}1\cdot10^7J$$

Calculamos velocidad en la órbita estable, donde $F_g=F_c$

$$G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_0};v=\sqrt{\frac{GM}{R_o}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot1{,}81\cdot10^{24}}{5100\cdot10^3}}=4865\,m/s$$

$$E_c=0{,}5\cdot3\cdot4865^2=3{,}55\cdot10^7J$$

Energía mecánica total en superficie: E_s=-8,83·10^7 J

Energía mecánica total en órbita: E_o=-7,1·10^7 +3,55·10^7 = -3,55·10^7 J

Nota: en una órbita estable la E_m es la mitad en valor absoluto de la E_p , $E_m=\frac{-GMm}{2R}$

La energía a suministrar es la diferencia: E_o-E_s=-3,55·10^7 -(-8,83·10^7)=5,28·10^7 J

B. Pregunta 1.-

$$Órbita:E_c=\frac{1}{2}mv^2;E_p=-G\frac{Mm}{R_o}$$

$$R_o=6370+2500=8870\,km$$

Calculamos velocidad en la órbita estable, donde $F_g=F_c$

a) $G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_0};v=\sqrt{\frac{GM}{R_o}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{8870\cdot10^3}}=6706\,m/s$

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2=0{,}5\cdot1100\cdot6706^2=2{,}47\cdot10^{10}J$$

$$E_p=\frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot1100}{8870\cdot10^3}=-4{,}95\cdot10^{10}J$$

$$E_m total=2{,}47\cdot10^{10}-4{,}95\cdot10^{10}=-2{,}48\cdot10^{10}J$$

b) El momento angular es un vector $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\cdot\vec{v}$

Al calcular el momento angular respecto al centro de la Tierra para una órbita circular, el vector posición siempre es perpendicular al vector velocidad, por lo que su módulo será

$$|\vec{L}|=|\vec{r}|m|\vec{v}|=8870\cdot10^3\cdot1100\cdot6706=6{,}54\cdot10^{13}kg\frac{m^2}{s}[también\,J\cdot s]$$

2011-Septiembre-Coincidentes

A. Problema 1.-

a) El momento angular es constante en la órbita al ser fuerzas centrales, por lo que su módulo es igual entre dos puntos cualquiera de la órbita. Como en perigeo y apogeo los vectores r y p son perpendiculares, podemos igualar $r_A m v_A = r_P m v_P$ y despejar para obtener el módulo de la velocidad solicitado.

$$v_A = \frac{r_p v_p}{r_A} = \frac{7{,}02\cdot10^6\cdot 8{,}22\cdot10^3}{10{,}30\cdot10^6} = 5{,}60\cdot10^3\, m/s$$

b) El módulo del momento angular es constante en la órbita, lo podemos calcular en perigeo o apogeo, tomamos uno de ellos.

$$|\vec{L}| = r_p m v_p = 7{,}02\cdot10^6\cdot 200\cdot 8{,}22\cdot10^3 = 1{,}15\cdot10^{13}\, kg\, m^2 s^{-1} [también\, J\cdot s]$$

Su dirección es perpendicular al pano de la órbita, y su sentido vendrá dado por la regla de la mano derecha al realizar el producto vectorial de los vectores r y p.

c) La velocidad areolar es constante según la 2ª ley de Kepler. Hay dos opciones

A.-Teniendo el periodo de la órbita, se puede utilizar la fórmula del área de la elipse y dividir por él (similar a resolución apartado a de 2011-Junio-A.Cuestión 1 para órbita circular). No se da T explícitamente, pero se puede obtener con la 3ª ley de Kepler $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$ recordando que para órbitas elípticas en hay que usar como R el semieje mayor de la elipse “a”, que podemos calcular como la mitad de la suma de radio en perigeo y apogeo.

$$a = \frac{r_{apogeo} + r_{perigeo}}{2} = \frac{10{,}30\cdot10^6 + 7{,}02\cdot10^6}{2} = 8{,}66\cdot10^6\, m$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2\cdot(8{,}66\cdot10^6)^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot10^{24}}} = 8017{,}6\, s$$

Para calcular el área de la elipse debemos calcular su semieje menor, “b”

Una vez conocido el semieje mayor y el apogeo, podemos calcular la distancia del centro al foco

$$r_{focoa\ centro} = a - r_{perigeo} = 8{,}66\cdot10^6 - 7{,}02\cdot10^6 = 1{,}64\cdot10^6\, m$$

Sabiendo que por geometría de la elipse la suma de distancias entre un punto cualquiera y ambos focos es constante, tomando los puntos donde cortan semieje menor y mayor tenemos $f^2 + b^2 = a^2$

luego $b = \sqrt{(8{,}66\cdot10^6)^2 - (1{,}64\cdot10^6)^2} = 8{,}5\cdot10^6\, m$

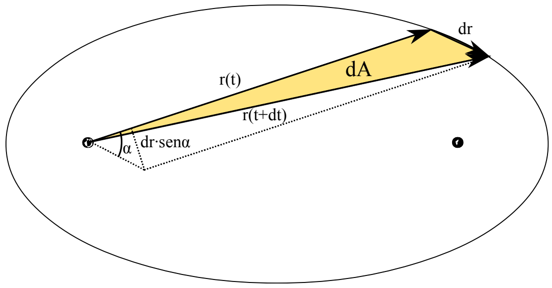
El área es $A = \pi a b = \pi\cdot 8{,}66\cdot10^6\cdot 8{,}5\cdot10^6 = 2{,}31\cdot10^{14}\, m^2$

La velocidad areolar es $\frac{dA}{dt} = \frac{2{,}31\cdot10^{14}}{8017{,}6} = 2{,}88\cdot10^{10}\,\frac{m^2}{s}$

B.-Usar la relación de proporcionalidad entre el módulo del momento angular, que es constante en toda la órbita, y la velocidad areolar, también constante. La expresión o bien se conoce, o se deduce:

Si planteamos la órbita elíptica y un área diferencial barrida

$dA = \frac{1}{2}|\vec{r}\times d\vec{r}|$ (La mitad del área del paralelogramo formado por vectores r y dr)



Operando para obtener la velocidad areolar

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}|$$

Como $|\vec{L}| = cte = m|\vec{r}\times\vec{v}|$ $\quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\frac{|\vec{L}|}{m} = \frac{|\vec{L}|}{2m} = cte$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1{,}15\cdot10^{13}}{2\cdot 200} = 2{,}88\cdot10^{10}\,\frac{m^2}{s}$$

d) La energía mecánica del satélite es constante en toda la órbita. La calculamos en uno de los puntos: perigeo.

$$E_{c\,perigeo}=\frac{1}{2}m\,v_{perigeo}^2=0{,}5\cdot 200\cdot(8{,}22\cdot 10^3)^2=6{,}76\cdot 10^9 J$$

$$E_{p\,perigeo}=-G\frac{M_T\cdot m}{r_{perigeo}}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 200}{7{,}02\cdot 10^6}=-1{,}136\cdot 10^{10} J$$

$$E_m=E_{m\,perigeo}=6{,}76\cdot 10^9-1{,}136\cdot 10^{10}=-4{,}6\cdot 10^9 J$$

Nota: la expresión $E_m=-G\frac{Mm}{2r}$ que se conoce / deduce fácilmente para órbitas circulares es válida en órbitas elípticas si se sustituye el radio r por el semieje mayor de la elipse “a”, calculado en una de las opciones de apartado c.

$$E_m=-G\frac{Mm}{2a}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 200}{2\cdot 8{,}66\cdot 10^6}=-4{,}6\cdot 10^9 J$$

2011-Junio-Coincidentes

B. Cuestión 1 .-

a) $\text{Órbita circular, igualando } F_g=F_c \text{ se llega a } E_m=\frac{-GMm}{2r}=\frac{1}{2}E_p=-E_c$

$$E_p=\frac{-GMm}{r}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}\cdot 200}{3\cdot 10^7}=-2{,}65\cdot 10^9 J$$

$$E_m=\frac{-GMm}{2r}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}\cdot 200}{2\cdot 3\cdot 10^7}=-1{,}33\cdot 10^9 J$$

$$E_c=E_m-E_p=-1{,}33\cdot 10^9-(-2{,}65\cdot 10^9)=1{,}32\cdot 10^9 J$$

b) La energía a aportar es la diferencia de energía mecánica entre ambas situaciones

$$E_m(r=4\cdot 10^7 m)=\frac{-GMm}{2}r=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}\cdot 200}{2\cdot 4\cdot 10^7}=-9{,}95\cdot 10^8 J$$

$$\Delta E=E_m(r=4\cdot 10^7 m)-E_m(r=3\cdot 10^7 m)=-9{,}95\cdot 10^8-(-1{,}32\cdot 10^9)=3{,}25\cdot 10^8 J$$

2011-Septiembre

A. Cuestión 1.-

a) $|\vec{g}|=\frac{|\vec{F}_g|}{m}=\frac{GM}{r^2}$ En la superficie, si el radio del plantea es R_p $|\vec{g}|=\frac{GM}{R_p^2}$

La aceleración de la gravedad es una magnitud vectorial; tomando el origen de coordenadas en el centro del planeta y considerando $\vec{u}_r$ un vector unitario que va desde el centro del planeta (lo asumimos homogéneo y su centro geométrico coincide con el centro de masas) hasta el punto de la superficie del planeta

$\vec{g}=-|\vec{g}|\vec{u}_r=\frac{-GM}{R_p^2}\vec{u}_r$ El signo menos indica que está dirigido hacia el centro del planeta.

b) Si $h=R_T$, $r_h=R_T+h=2R_T$; $\frac{|\vec{g}_{superfice}|}{|\vec{g}_h|}=\frac{\frac{GM}{R_T^2}}{\frac{GM}{(2R_T)^2}}=\frac{4R_T^2}{R_T^2}=4\Rightarrow|\vec{g}_h|=\frac{|\vec{g}_{superficie}|}{4}=\frac{9{,}8}{4}=2{,}45\,m\,s^{-2}$

B. Problema 1.-

a)
$$\text{En órbita circular estable}, F_g=F_c$$
$$G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_0};v=\sqrt{\frac{GM}{R_o}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{2{,}26\cdot 6{,}37\cdot 10^6}}=5264\,m/s$$

Nota: la velocidad es independiente de la masa de la sonda.

b) $E_p=\frac{-GMm}{R_o}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 1000}{2{,}26\cdot 6{,}37\cdot 10^6}=-2{,}77\cdot 10^{10} J$

c) $\acute{O}rbita\ circular,\ igualando\ F_g=F_c\ se\ llega\ a\ E_m=\frac{-GMm}{2r}=\frac{1}{2}E_p=-E_c$

$$E_m=\frac{-GMm}{2r}=0{,}5\cdot(-2{,}77\cdot10^{10})=-1{,}39\cdot10^{10}\,J$$

d) La energía a comunicar es la diferencia de energía entre ambas situaciones.
En el infinito la E_p y la E_c es cero, por lo que la E_m es cero.
$\Delta E = E_{infinito}-E_{órbita}=0-(-1{,}39\cdot10^{10}) = 1{,}39\cdot10^{10}$ J

2011-Junio

A. Cuestión 1.-

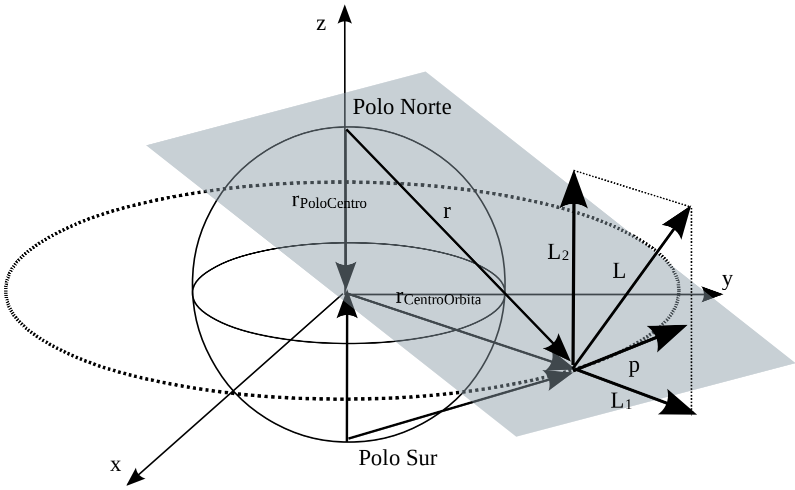
Nota: suponemos ciertos los datos (el radio real de una órbita geoestacionaria no es 3,6×10⁷ m, el dato suministrado es el valor real de la altura de una órbita geoestacionaria)

a) Como la órbita es circular y según la tercera ley de Kepler la velocidad areolar es constante

$$v_{areolar}=\frac{\pi\cdot r^2}{T}=\frac{\pi\cdot(3{,}6\cdot10^7)^2}{24\cdot3600}=4{,}7\cdot10^{10}\,m^2/s$$

b) El momento angular es un vector $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\cdot\vec{v}$. Si es geoestacionario la órbita está en el plano ecuatorial, pero el momento angular es referido a un punto, por lo que no lo hacemos respecto al centro de la Tierra sino que utilizamos los dos puntos que indica el enunciado.
El momento angular respecto a los polos de la Tierra es respecto a dos puntos que están en el eje de giro, por lo que el vector posición siempre lo podemos descomponer en un vector que vaya desde el polo hasta el centro de la Tierra más un vector que vaya desde el centro de la Tierra hasta el punto de la órbita (y este último vector está en el mismo plano que el vector velocidad)

$$\vec{L}=(\vec{r}_{PoloCentro}+\vec{r}_{CentroOrbita})\times m\cdot\vec{v}=\vec{r}_{PoloCentro}\times m\cdot\vec{v}+\vec{r}_{CentroOrbita}\times m\cdot\vec{v}=\vec{L}_1+\vec{L}_2$$



Para calcular el módulo de la la velocidad, podemos calcular de manera intermedia la velocidad angular, o sabiendo que es constante, utilizar el cociente entre espacio recorrido en la órbita circular

$$|\vec{v}|=\frac{2\cdot\pi\cdot r}{T}$$

$$|\vec{v}|=\frac{2\cdot\pi\cdot 3{,}6\cdot 10^{7}}{24\cdot 3600}=2618\,m/s$$

Si tomamos el plano ecuatorial como plano xy y el eje de giro en el que están los dos polos como eje z, tomando como sentido positivo el dirigido hacia el polo norte geográfico, tendremos:

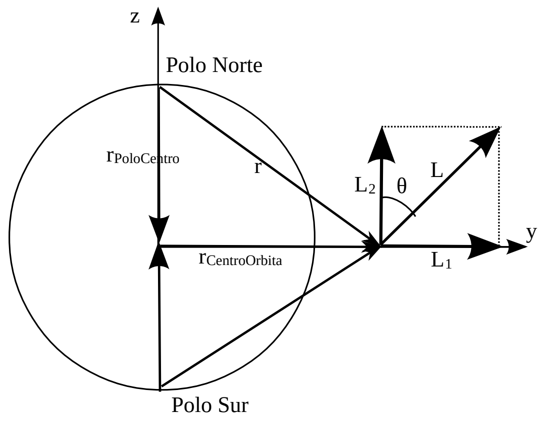
- $\vec{L}_1=\vec{r}_{PoloCentro}\times m\cdot\vec{v}$
  - Dirección: perpendicular al plano formado por eje z y el vector velocidad: será dirección radial, misma dirección de vector posición.
  - Sentido: de acuerdo al sentido de giro del satélite, y según de qué polo se trate, será el mismo sentido que el vector posición (para polo norte) o sentido opuesto (polo sur).
  - Módulo: al ser siempre el vector perpendicular a la velocidad, será (no se proporciona como dato el radio de la Tierra, se toma 6370 km.

$$6{,}37\cdot 10^{6}\cdot 5\cdot 10^{3}\cdot 2618=8{,}3\cdot 10^{13}\frac{kg\cdot m^{2}}{s}[también\,J\cdot s]$$

- $\vec{L}_2=\vec{r}_{CentroOrbita}\times m\cdot\vec{v}$
  - Dirección: perpendicular al plano xy
  - Sentido: de acuerdo al sentido de giro del satélite, que tiene que ser el mismo que el de la tierra, estará dirigido hacia z positivas.
  - Módulo: al ser siempre el vector perpendicular a la velocidad, será

$$3{,}6\cdot 10^{7}\cdot 5\cdot 10^{3}\cdot 2618=4{,}7\cdot 10^{14}\frac{kg\cdot m^{2}}{s}[también\,J\cdot s]$$

Fijándonos en los que nos solicita el enunciado, indicamos de manera global el módulo, dirección y sentido. Realizamos un diagrama en 2 dimensiones más simplificado donde se ve el ángulo que forma con la vertical: no está a escala, ya que se ve que $|\vec{L}_2|\gg|\vec{L}_1|$, por lo que podríamos intentar aproximar $|\vec{L}|\approx|\vec{L}_2|$



- Módulo: Viendo que los dos vectores calculados antes son perpendiculares entre sí:

$$|\vec{L}|=\sqrt{|\vec{L}_1|^{2}+|\vec{L}_2|^{2}}$$

$$|\vec{L}|=\sqrt{(8{,}3\cdot 10^{13})^{2}+(4{,}7\cdot 10^{14})^{2}}$$

$$|\vec{L}|=4{,}8\cdot 10^{14}\frac{kg\cdot m^{2}}{s}[también\,J\cdot s]$$

- Dirección: en una recta que está en el plano formado por el eje de la Tierra y el satélite, y que f orma con el eje z un ángulo θ, siendo

$$tg\theta=\frac{|\vec{L}_1|}{|\vec{L}_2|}=\frac{4{,}7\cdot 10^{14}}{8{,}3\cdot 10^{13}}\Rightarrow\theta=arctg(5{,}66)=1{,}4\,rad=80º$$

- Sentido: dirigido hacia z positivas (Polo Norte) o z negativas (Polo Sur),

B. Problema 1.-

a) Aplicando la tercera Ley de Kepler para los datos de la Luna, y teniendo en cuenta que la masa que aparece en la fórmula es la del objeto central respecto al que se orbita, en este caso la Tierra, y haciendo cambios de unidades

$$\frac{T^2}{R^3}=\frac{4\pi^2}{GM};G=\frac{4\pi^2\cdot R^3}{M\cdot T^2}=\frac{4\cdot\pi^2\cdot(3{,}84\cdot10^8)^3}{5{,}98\cdot10^{24}\cdot(27{,}32\cdot24\cdot3600)^2}=6{,}7\cdot10^{-11}\frac{N\cdot m^2}{kg^2}$$

b) De acuerdo a la Ley de Gravitación universal, la fuerza será un vector, de dirección la línea que une los centros de gravedad de ambos cuerpos, de sentido atractivo, y de módulo

$$|\vec{F}|=G\frac{Mm}{r^2}=\frac{6{,}7\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot7{,}35\cdot10^{22}}{3{,}84\cdot10^{82}}=2\cdot10^{20}N$$

c) Para calcular el trabajo podríamos plantear una integral de la fuerza (variable según la posición) en el recorrido, o plantear que $W=-\Delta E_p$ teniendo en cuenta que el trabajo sería el realizado por el campo y que la masa a mover de 5000 kg tendrá Energía potencial respecto de la Tierra y de la Luna. Despreciamos el radio respecto de la distancia global, pero no para considerar el cuerpo sobre la superficie de cada planeta.

En el punto final (la Luna)

$$E_{p\,Final\,respecto\,Tierra}=-G\frac{Mm}{r}=\frac{-6{,}7\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot5000}{3{,}84\cdot10^8}=-5{,}2\cdot10^9J$$

$$E_{p\,Final\,respecto\,Luna}=-G\frac{Mm}{r}=\frac{-6{,}7\cdot10^{-11}\cdot7{,}35\cdot10^{22}\cdot5000}{1{,}74\cdot10^6}=-1{,}4\cdot10^{10}J$$

$$E_{p\,Final}=-1{,}92\cdot10^{10}J$$

En el punto inicial (la Tierra)

$$E_{p\,Inicial\,respecto\,Luna}=-G\frac{Mm}{r}=\frac{-6{,}7\cdot10^{-11}\cdot7{,}35\cdot10^{22}\cdot5000}{3{,}84\cdot10^8}=-6{,}4\cdot10^7J$$

$$E_{p\,Inicial\,respecto\,Tierra}=-G\frac{Mm}{r}=\frac{-6{,}7\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot5000}{6{,}37\cdot10^6}=-3{,}14\cdot10^{11}J$$

$$E_{p\,Inicial}=-6{,}4\cdot10^7-3{,}14\cdot10^{11}=-3{,}14064\cdot10^{11}J$$

Calculamos la variación para calcular el trabajo

$$W=-\Delta E_p=-(E_{p\,Final}-E_{p\,inicial})=-(-1{,}92\cdot10^{10}-(-3{,}14064\cdot10^{11}))=-2{,}95\cdot10^{11}J$$

El trabajo es negativo porque claramente no es realizado por el campo, sino que se realiza de manera externa a él.

d) Si la distancia a la Tierra es $R_L/4$, la distancia a la Luna será ¾ R_L

$$\frac{|\vec{F}_T|}{|\vec{F}_L|}=\frac{G\frac{M_Tm}{r_T^2}}{G\frac{M_Lm}{r_L^2}}=\frac{M_T(3/4R_L)^2}{M_L(1/4R_L)^2}=\frac{M_T}{M_L}\cdot3^2=\frac{5{,}98\cdot10^{24}}{7{,}35\cdot10^{22}}\cdot9=732$$

2011-Modelo

A. Problema 1.-

a) Aplicando la tercera Ley de Kepler para los datos del planeta, y teniendo en cuenta que la masa que aparece en la fórmula es la del objeto central respecto al que se orbita, en este caso la estrella, y haciendo cambios de unidades (se puede llegar también igualando F_g y F_c)

$$\frac{T^2}{R^3}=\frac{4\pi^2}{GM};M=\frac{4\pi^2\cdot R^3}{G\cdot T^2}=\frac{4\cdot\pi^2\cdot(10^8\cdot10^3)^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot(3\cdot365\cdot24\cdot3600)^2}=6{,}61\cdot10^{28}kg$$

b)

$$E_m=E_c+E_p=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r};[F_c=F_g\Rightarrow v^2=\frac{GM}{r}]=\frac{-GMm}{2r}$$

$$E_m=\frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6{,}61\cdot10^{28}\cdot10^{24}}{2\cdot10^8\cdot10^3}=-2{,}2\cdot10^{31}J$$

c) El momento angular es un vector $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\cdot\vec{v}$

Al calcular el momento angular respecto al centro de la estrella para una órbita circular, el vector posición siempre es perpendicular al vector velocidad, por lo que su módulo será

$$|\vec{L}|=|\vec{r}|m|\vec{v}|=10^8\cdot10^3\cdot10^{24}\cdot\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6{,}61\cdot10^{28}}{10^8\cdot10^3}}=6{,}64\cdot10^{38}\frac{kg\cdot m^2}{s}[también J\cdot s]$$

d) $$r_2=2\cdot r_1;\omega_2=\frac{v_2}{r_2}=\frac{\sqrt{\frac{GM}{r_2}}}{r_2}=\sqrt{\frac{GM}{(2r_1)^3}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6{,}61\cdot10^{28}}{(2\cdot10^8\cdot10^3)^3}}=2{,}35\cdot10^{-8}rad/s$$

B. Cuestión 1.-

$$Órbita\ circular\ F_g=F_c;\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r};v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

a) $$\frac{E_{c_A}}{E_{c_B}}=\frac{\frac{1}{2}m_Av_A^2}{\frac{1}{2}m_Bv_B^2}=(\frac{v_A}{v_B})^2=\frac{\frac{GM}{r_A}}{\frac{GM}{r_B}}=\frac{r_B}{r_A}<1, luego\ E_{c_A}<E_{c_B}. Tiene\ mayor\ E_c\ el\ satélite\ B$$

b) $$\frac{E_{c_A}}{E_{c_B}}=\frac{\frac{1}{2}m_Av_A^2}{\frac{1}{2}m_Bv_B^2}=\frac{m_A}{m_B}(\frac{v_A}{v_B})^2=\frac{m_A}{m_B}\frac{\frac{GM}{r_A}}{\frac{GM}{r_B}}=\frac{m_A}{m_B}<1, luego\ E_{c_A}<E_{c_B}. Tiene\ mayor\ E_c\ el\ satélite\ B$$

2010-Septiembre-Fase General

A. Problema 1.-

Solución 100% idéntica a 2008-Septiembre-A-Problema 2, varía ligeramente enunciado apartado d

B. Cuestión 1.-

a) $$Órbita\ circular\ F_g=F_c;\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r};v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$E_{c_L}=\frac{1}{2}m_Lv_L^2=\frac{1}{2}m_L\frac{GM_T}{r}$$

$$E_{p_L}=-GM_T\frac{m_L}{r}$$

$$\frac{E_{c_L}}{E_{p_L}}=\frac{-1}{2};E_{p_L}=-2E_{c_L}$$

b) $$Órbita\ circular\ v_L=\frac{2\pi r}{T};T=\frac{2\pi r}{v_L}=\frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM_T}{r}}}=\frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{GM}};T^2=4\frac{\pi^2}{GM}r^3(Tercer\ ley\ de\ Kepler)$$

2010-Septiembre-Fase Específica

A. Cuestión 1.-

a) (Similar a 2009-Septiembre-Cuestión 1-b) Se puede razonar de dos maneras

- El momento angular es constante en la órbita al ser fuerzas centrales. Como en perihelio y afelio los vectores r y p son perpendiculares, podemos igualar $r_Amv_A=r_Pmv_P$ y dado que $r_A>r_P$, tiene que cumplirse que $v_P>v_A$
- La Energía mecánica es constante en toda la órbita al ser fuerzas conservativas, por lo tanto en el punto donde la Ep es menor (perihelio deducible según expresión Ep, la Ep será mínima en valor absoluto pero máxima (es negativa)), la Energía cinética será mayor y por lo tanto también la velocidad.

b) Como sólo actúan fuerzas conservativas, la energía mecánica se conserva en toda la órbita, por lo que es la misma en toda ella, incluyendo afelio y perihelio $E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{r}+\frac{1}{2}mv^2$

B. Cuestión 1.-

$$\acute{O}rbita\,circular\,F_g=F_c;\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r};v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

a)

$$E_{c_{asteroide}}=\frac{1}{2}m_{asteroide}v_{asteroide}^2=\frac{1}{2}m_{asteroide}\frac{GM_{estrella}}{r}$$

$$E_{p_{asteroide}}=-GM_{estrella}\frac{m_{asteroide}}{r}$$

$$\frac{E_{c_{asteroide}}}{E_{p_{asteroide}}}=\frac{-1}{2};E_{p_{asteroide}}=-2E_{c_{asteroide}}$$

b)

$$E_m=E_p+E_c=-2E_c+E_c=-E_c$$

$$E_c=10^{10}J;E_p=-2\cdot10^{10}J$$

2010-Junio-Coincidentes

A. Problema 1.-

a) Según la segunda ley de Kepler sabemos que la velocidad areolar es constante, por lo que podemos obtener el periodo del satélite A.

$$v_{areolar}=\frac{\acute{a}rea}{tiempo}=8210\cdot10^6=\frac{\pi r_A^2}{T_A}\Rightarrow T_A=\frac{\pi\cdot(8400\cdot10^3)^2}{8210\cdot10^6}=27000\,s$$

b) Igualando Fc y Fg en órbita circular obtenemos expresión de la relación entre periodo, radio y masa del planeta, que es la tercera ley de Kepler

$$\acute{O}rbita\,circular\,F_g=F_c;v=\frac{2\pi R_o}{T};\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r};\frac{(2\pi R_o)^2}{T^2}=\frac{GM}{R_o};T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R_o^3$$

Despejando la masa y sustituyendo $M=\frac{4\pi^2R_o^3}{GT^2}=\frac{4\pi^2(8400\cdot10^3)^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot(27000)^2}=4{,}8\cdot10^{23}kg$

c) $\acute{O}rbita\,circular,\,igualando\,F_g=F_c\,se\,llega\,a\,E_m=\frac{-GMm}{2r}=\frac{1}{2}E_p=-E_c$

$$\frac{|\vec{F}_A|}{|F_B|}=37=\frac{\frac{GMm_A}{R_{oA}^2}}{\frac{GMm_B}{R_{oB}^2}}=\frac{m_A}{m_B}\frac{R_{oB}^2}{R_{oA}^2}\Rightarrow\frac{m_A}{m_B}=37\frac{R_{oA}^2}{R_{oB}^2}$$

$$\frac{E_{mA}}{E_{mB}}=\frac{\frac{-GMm_A}{2R_{oA}}}{\frac{-GMm_B}{2R_{oB}}}=\frac{m_A}{m_B}\frac{R_{oB}}{R_{oA}}=37\frac{R_{oA}^2}{R_{oB}^2}\frac{R_{oB}}{R_{oA}}=37\frac{8400}{23500}=13{,}2$$

d) El momento angular es un vector $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\cdot\vec{v}$. Si tomamos el origen de coordenadas en el centro de la órbita, el plano ecuatorial como plano xy, y el giro del planeta en el sentido de las agujas del reloj visto desde z positivas, tendremos que los vectores posición y momento lineal siempre estarán en el plano xy, y su producto vectorial tendrá dirección del eje z y sentido dirigido hacia z negativas.
El módulo lo podemos calcular teniendo en cuenta que la órbita es circular, por lo que vectores posición y momento lineal son siempre perpendiculares, y la expresión de la velocidad la podemos deducir de la expresión vista en apartado b.

$$|\vec{L}|=|\vec{r}|m|\vec{v}|=8400\cdot10^3\cdot1{,}08\cdot10^{16}\cdot\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot4{,}8\cdot10^{23}}{8400\cdot10^3}}=1{,}77\cdot10^{26}\frac{kg\cdot m^2}{s}[tambi\acute{e}n\,J\cdot s]$$

B. Cuestión 1.-

a) El significado físico de la velocidad de escape es la velocidad que debería tener un cuerpo en la superficie terrestre para escapar del campo gravitatorio, es decir, llegar al infinito con velocidad nula. Utilizando el principio de conservación de la energía y teniendo en cuenta que en el infinito la E_p y E_c son nulas

$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R_T}=0\,;v_{escape}=\sqrt{\frac{2GM}{R_T}}$ independiente de la masa del objeto. Lo que sí variará con la masa será la energía cinética del objeto lanzado a esa velocidad

b) $\frac{|\vec{g}_L|}{|g_T|}=\frac{1}{6}=\frac{\frac{GM_L}{R_L^2}}{\frac{GM_T}{R_T^2}}=\frac{M_L}{M_T}\cdot\frac{R_T^2}{R_L^2}=\frac{M_L}{M_T}\frac{(4R_L)^2}{R_L}\Rightarrow\frac{M_L}{M_T}=\frac{1}{6\cdot 16}=\frac{1}{96}$

$$\frac{v_{e_L}}{v_{e_T}}=\frac{\sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}}}{\sqrt{\frac{2GM_T}{R_T^2}}}=\sqrt{\frac{M_L}{M_T}\cdot\frac{R_T}{R_L}}=\sqrt{\frac{1}{96}\frac{4R_L}{R_L}}=\sqrt{\frac{4}{96}}=0{,}2$$

2010-Junio-Fase General

***A.* Cuestión 1.-** *(Cuestiones de fechas anteriores donde se piden enunciados leyes Kepler: 2009-Modelo-Cuestión 1 (3ª), 2006-Modelo-Cuestión 1 (1ª, 2ª y 3ª), 2000-Junio-Cuestión 1 (1ª y 2ª))*

a) Ley de las áreas. El área barrida por unidad de tiempo por el radio vector que une el Sol y el planeta, la velocidad areolar, es constante. En una órbita elíptica en la que el Sol está en uno de los focos según la primera ley, en el perihelio (punto más cercano al Sol, radiovector de valor mínimo) la velocidad debe ser máxima para que barra la misma cantidad de área por unidad de tiempo que en otros puntos de la órbita. De la misma manera la velocidad es mínima en el afelio (punto más alejado del Sol, radiovector de valor máximo), ya que con poco giro el radiovector barre más área que en otros puntos de la órbita donde el radiovector es menor.

b) Ley de los períodos. Los cuadrados de los períodos son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las órbitas. $T^2 = C\cdot R^3$.

$$\text{Órbita}\,F_g=F_c\,;\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r}\,;v^2=\frac{GM}{r}\,;\text{Circular}\,v=\frac{2\pi r}{T}$$

$$\frac{GM}{r}=\frac{4\pi^2r^2}{T^2}\,;T^2=\frac{4\pi^2}{GM}r^3=Cr^3\,\text{donde}\,C=\frac{4\pi^2}{GM}$$

B. Problema 1.-

a) Aplicando la tercera Ley de Kepler para los datos de Io, y teniendo en cuenta que la masa que aparece en la fórmula es la del objeto central respecto al que se orbita, en este caso Júpiter, y haciendo cambios de unidades (se puede llegar también igualando F_g y F_c)

$$\frac{T_{Io}^2}{R_{Io}^3}=\frac{4\pi^2}{GM_{Júpiter}}\,;M_{Júpiter}=\frac{4\pi^2\cdot R_{Io}^3}{G\cdot T_{Io}^2}=\frac{4\cdot\pi^2\cdot(4{,}22\cdot 10^8)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot(1{,}77\cdot 24\cdot 3600)^2}=1{,}9\cdot 10^{27}\,kg$$

b) La intensidad de campo es un vector:
- su dirección será radial uniendo centro Júpiter y centro Io
- su sentido será dirigido hacia el centro de Júpiter
- su módulo $|g|=\frac{GM}{r^2}=6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{1{,}9\cdot 10^{27}}{(4{,}22\cdot 10^8)^2}=0{,}712\,m/s^2\,ó\,N/kg$

c) $E_c=\frac{1}{2}m_{Io}v_{Io}^2$ Necesitamos calcular v, y tenemos varias opciones:

$$1.\,\text{Igualando}\,F_g\,y\,F_c;\,v=\sqrt{\frac{GM_{Júpiter}}{R_{Io}}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}9\cdot 10^{27}}{4{,}22\cdot 10^8}}=17329\,m/s$$

$$2.\,\text{Órbita circular}\,v=\frac{2\pi r}{T}=\frac{2\pi 4{,}22\cdot 10^8}{1{,}77\cdot 24\cdot 3600}=17338\,m/s$$

$$E_c=0{,}5\cdot 8{,}9\cdot 10^{22}\cdot 17338^2=1{,}34\cdot 10^{31}\,J$$

d) Como es una órbita circular, el vector r y el vector v son perpendiculares en todo momento

$$|\vec{L}|=|\vec{r}|\cdot m|\vec{v}|sen\,90^{o}=4{,}22\cdot 10^{8}\cdot 8{,}9\cdot 10^{22}\cdot 17338=6{,}51\cdot 10^{35}\frac{kg\cdot m^{2}}{s}[también\,J\cdot s]$$

2010-Junio-Fase Específica

A. Cuestión 1.- *(Idéntico a 2005-Junio-Cuestión 2)*

B. Problema 1.-

a) R= $12\cdot 10^3\cdot 10^3=12\cdot 10^6$ m

$$Órbita\,circular\,F_g=F_c;\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r};v=\sqrt{\frac{GM}{r}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{12\cdot 10^{6}}}=5765\,m/s$$

$$|\vec{p}|=mv=1000\cdot 5765=5{,}765\cdot 10^{6}\frac{kg\cdot m}{s}$$

Al ser una órbita circular los vectores r y v son perpendiculares en todo momento

$$|\vec{L}|=|\vec{r}|\cdot m|\vec{v}|sen\,90^{o}=12\cdot 10^{6}\cdot 1000\cdot 5765=6{,}918\cdot 10^{13}\frac{kg\cdot m^{2}}{s}[también\,J\cdot s]$$

El vector momento lineal sí cambia de dirección continuamente, de manera cíclica: siempre es tangencial a la órbita circular.
El vector momento angular no cambia de dirección, se mantiene constante perpendicular al plano de la órbita: el vector globalmente es constante (módulo, dirección y sentido) al ser fuerzas centrales.

b) $$Órbita\,circular\,v=\frac{2\pi r}{T};T=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2\pi\,12\cdot 10^{6}}{5765}=13079\,s=3{,}63\,h$$

$$E_m=\frac{-GMm}{2R}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 1000}{2\cdot 12\cdot 10^{6}}=-1{,}66\cdot 10^{10}\,J$$

2010-Modelo

A. Problema 1.-

a) Consideramos sólo fuerzas conservativas por lo que se conserva la energía mecánica

Punto A, lanzamiento: $E_{c_A}=\frac{1}{2}mv^2;E_{p_A}=\frac{-GMm}{R_T}$

Punto B, altura 300 km: $E_{c_B}=0;E_{p_B}=\frac{-GMm}{(R_T+h)}$

Igualando energía mecánica en A y en B

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R_T}=\frac{-GMm}{(R_T+h)};v=\sqrt{2GM(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{R_T+h})}$$

$$v=\sqrt{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}(\frac{1}{6{,}37\cdot 10^{6}}-\frac{1}{6{,}37\cdot 10^{6}+300\cdot 10^{3}})}=2373{,}3\,m/s$$

b) $$E_{p_B}=\frac{-GMm}{(R_T+h)}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 100}{6{,}37\cdot 10^{6}+300\cdot 10^{3}}=-5{,}98\cdot 10^{9}\,J$$

c) Calculamos la energía que tendría en órbita, y luego restaremos la calculada anteriormente

$$E_{m\,órbita\,circular}=\frac{-GMm}{2(R_T+h)}=-2{,}99\cdot 10^{9}\,J$$

La energía a suministrar sería $\Delta E=E_{m\,órbita\,circular}-E_{p\,a\,300\,km}=-2{,}99\cdot 10^{9}-(-5{,}98\cdot 10^{9})=2{,}99\cdot 10^{9}$ J

d) Igualando F_c y F_g, $$v=\sqrt{\frac{GM}{R_T+h}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{6{,}37\cdot 10^{6}+300\cdot 10^{3}}}=7733\,m/s$$

$$v=\frac{2\pi(R_T+h)}{T};T=\frac{2\pi(R_T+h)}{v}=\frac{2\pi(6{,}37\cdot 10^{6}+300\cdot 10^{3})}{7733}=5419{,}5\,s$$

El período también se puede calcular utilizando la tercera ley de Kepler

B. Cuestión 1.-

a) Utilizando la tercera ley de Kepler

$$\frac{T_s^2}{T_L^2}=\frac{R_s^3}{R_L^3};T_s=T_L\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{4}R_L}{R_L}\right)^3}=T_L\sqrt{\frac{1}{4^3}}=\frac{T_L}{2^3};T_s=\frac{27{,}32}{8}=3{,}415\,días=3\,días,9\,horas,57{,}6\,min$$

b) Igualando F_c y F_g en órbita circular $v^2=\frac{GM}{R_{órbita}}$ $\frac{v_s}{v_L}=\frac{\sqrt{\frac{GM}{R_s}}}{\sqrt{\frac{GM}{R_L}}}=\sqrt{\frac{R_L}{R_s}}=\sqrt{\frac{R_L}{\frac{1}{4}R_L}}=2;v_s=2\cdot v_L$

También se puede hacer usando la relación entre períodos del apartado anterior.

$$\frac{v_s}{v_L}=\frac{\frac{2\pi R_s}{T_s}}{\frac{2\pi R_L}{T_L}}=\frac{R_s}{R_L}\frac{T_L}{T_s}=\frac{1}{4}8=2$$

2009-Septiembre

Cuestión 1.-

a) Falso. La velocidad de escape es la velocidad que debe tener un objeto para escapar del campo gravitatorio llegando al infinito con velocidad nula. Utilizando el principio de conservación de la energía y teniendo en cuenta que en el infinito la E_p y E_c son nulas

$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R_T}=0;v_{escape}=\sqrt{\frac{2GM}{R_T}}$ independiente de la masa del objeto. Lo que sí variará con la masa será la energía cinética del objeto lanzado a esa velocidad.

b) Verdadero. Se puede razonar de dos maneras

- El momento angular es constante en la órbita al ser fuerzas centrales. Como en perihelio y afelio los vectores r y p son perpendiculares, podemos igualar $r_Amv_A=r_Pmv_P$ y dado que $r_A>r_P$, tiene que cumplirse que $v_P>v_A$
- La Energía mecánica es constante en toda la órbita al ser fuerzas conservativas, por lo tanto en el punto donde la E_p es menor (perihelio deducible según expresión Ep, la Ep será mínima en valor absoluto pero máxima (es negativa)), la Energía cinética será mayor y por lo tanto también la velocidad.

2009-Junio

Cuestión 1.-

a) $$Órbita\ circular\ F_c=F_g;\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r};v^2=\frac{GM}{r}$$

$$E_m=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}=(\frac{1}{2}-1)mv^2=\frac{-1}{2}\cdot 500\cdot(6{,}5\cdot 10^3)^2=-1{,}056\cdot 10^{10}J$$

b) $$r=\frac{GM}{v^2}=\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{(6{,}5\cdot 10^3)^2}=9{,}44\cdot 10^6 m$$

Como se pide altura desde superficie, restamos radio de la Tierra:

$$h=9{,}44\cdot 10^6-6{,}37\cdot 10^6=3{,}07\cdot 10^6 m$$

B. Problema 1.-

a) Aplicando la tercera Ley de Kepler

$$\frac{T_{Venus}^2}{T_{Tierra}^2}=\frac{R_{Venus}^3}{R_{Tierra}^3};T_{Venus}=T_{Tierra}\sqrt{\left(\frac{R_{Venus}}{R_{Tierra}}\right)^3}=365\sqrt{\left(\frac{1{,}08\cdot 10^{11}}{1{,}49\cdot 10^{11}}\right)^3}=225\,días$$

b) $$Órbita\ circular\ v=\frac{2\pi r}{T}=\omega r$$

$$v_{Venus}=\frac{2\pi\,1{,}08\cdot 10^{11}}{225\cdot 24\cdot 3600}=3{,}49\cdot 10^4 m/s;v_{Tierra}=\frac{2\pi\,1{,}49\cdot 10^{11}}{365\cdot 24\cdot 3600}=2{,}97\cdot 10^4 m/s$$

2009-Modelo

Cuestión 1.- *(Cuestiones de fechas anteriores donde se piden enunciados leyes*

Kepler: 2006-Modelo-Cuestión 1 (1ª, 2ª y 3ª), 2000-Junio-Cuestión 1 (1ª y 2ª))
a) Ley de los períodos. Los cuadrados de los períodos son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las órbitas. $T^2 = C \cdot R^3$.

$$Órbita\ F_g = F_c ; \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} ; v^2 = \frac{GM}{r} ; Circular\ v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$\frac{GM}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} ; T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 = C r^3\ donde\ C = \frac{4\pi^2}{GM}$$

b) No se indica el período de la Tierra explícitamente, por lo que consideramos un año como 365 días

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 ; M = \frac{4\pi^2}{GT^2} r^3 = \frac{4\pi^2}{6{,}67\cdot 10^{-11} \cdot (365\cdot 24\cdot 3600)^2} (1{,}49\cdot 10^8 \cdot 10^3)^3 = 1{,}97\cdot 10^{30}\ kg$$

2008-Septiembre

Cuestión 1.-

a) En este caso el vector v tiene el mismo sentido que r, luego su producto vectorial es cero ya que el seno del ángulo que forman es cero $|\vec{L}| = |\vec{r}| \cdot m \cdot |\vec{v}| \cdot sen\ 0º = 0$
b) En esa órbita circular el vector v, que siempre es tangencial a la trayectoria y estará en el plano ecuatorial, siempre formará 90º con el vector r, luego el seno del ángulo que forman será siempre 1.

$$Órbita\ circular\ F_c = F_g ; \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} ; v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$Radio\ órbita = 6{,}37\cdot 10^6 + 600\cdot 10^3 = 6{,}97\cdot 10^6\ m$$

$$|\vec{L}| = |\vec{r}| \cdot m \cdot |\vec{v}| \cdot sen\ 90º = 6{,}97\cdot 10^6 \cdot 1000 \cdot \sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{6{,}97\cdot 10^6}} = 5{,}27\cdot 10^{13} \frac{kg\cdot m^2}{s} [también\ J\cdot s]$$

Cómo sólo se pide módulo, no hace falta indicar dirección ni sentido de momento angular.

A. Problema 2.-

a) $Órbita\ circular\ F_g = F_c ; \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} ; r = \frac{GM}{v^2} = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{(7{,}5\cdot 10^3)^2} = 7{,}09\cdot 10^6\ m = 7090\ km$

b) $E_p = \frac{-GMm}{r} = \frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 100}{7{,}09\cdot 10^6} = -5{,}63\cdot 10^9\ J$

c) $E_m = \frac{-GMm}{2r} = \frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 100}{2\cdot 7{,}09\cdot 10^6} = -2{,}81\cdot 10^9\ J$

d) Calculamos la energía mecánica en la nueva órbita, y luego calculamos la diferencia

$$r' = 2r ; E_m' = \frac{-GMm}{2r'} = \frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 100}{2\cdot 2\cdot 7{,}09\cdot 10^6} = -1{,}41\cdot 10^9\ J$$

$$\Delta E = E_m' - E_m = -1{,}41\cdot 10^9 - (-2{,}81\cdot 10^9) = 1{,}4\cdot 10^9\ J$$

Nota: Dato de radio de la Tierra del enunciado no utilizado.

2008-Junio

Cuestión 2.-

a) Se pide momento angular, que es un vector, luego hay que dar módulo, dirección y sentido
- Dirección: perpendicular al plano de la órbita
- Sentido: el asociado al sentido de giro del satélite que fijará la dirección del vector v, tras aplicar el producto vectorial
- Módulo: como la órbita es circular, el vector r y el vector v siempre forman 90

$$Órbita\ circular\ F_c = F_g ; \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} ; v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$Radio\ órbita = R_T + h = R_T + 1{,}5\ R_T = 2{,}5\ R_T = 2{,}5\cdot 6{,}37\cdot 10^6 = 1{,}59\cdot 10^7\ m$$

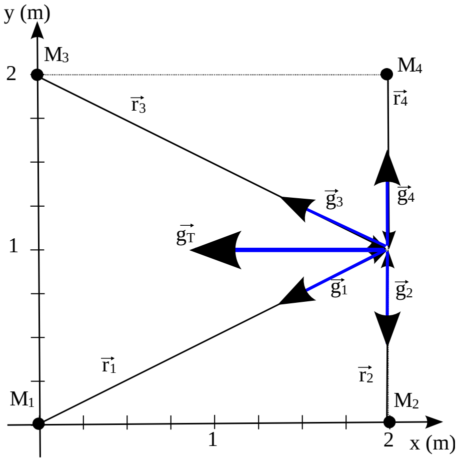
$$|\vec{L}| = |\vec{r}| \cdot m \cdot |\vec{v}| \cdot sen\ 90º = 1{,}59\cdot 10^7 \cdot 5000 \cdot \sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{1{,}59\cdot 10^7}} = 3{,}98\cdot 10^{14} \frac{kg\cdot m^2}{s} [también\ J\cdot s]$$

b) Para que escape del campo gravitatorio, tiene que llegar al infinito, donde tendrá energía potencial y cinética nula sin llega con velocidad cero. Por conservación de la energía, la energía que tiene más la que le comuniquemos será la que tendría en el infinito.

$$\Delta E=E_m(\infty)-E_m(órbita)=\frac{GMm}{2R}=\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,98\cdot 10^{24}\cdot 5000}{2\cdot 1,59\cdot 10^{7}}=6,27\cdot 10^{10}\,J$$

2008-Modelo

Cuestión 1.



a) Representamos en un diagrama para elegir x e y. Para cada lado del cuadrado (en diagrama representamos uno de los cuatro, entre masas M_2 y M4), los efectos de las dos masas más próximas tienen mismo módulo, dirección, pero sentido opuesto, por lo que se cancelan (en figura g_2 y g_4).
La distancia de cada una de las otras 2 masas (M_1 y M_3) al centro del lado es cuadrado es $\sqrt{2^2+1}=\sqrt{5}$ m. El campo tendrá una componente en la dirección del lado que también se cancelará. El campo total será la suma de las dos componentes perpendiculares al lado en el sentido dirigido hacia el centro del cuadrado. Podemos calcular la componente x de g_1 y g_3 de dos maneras:
A. Por trigonometría, utilizando el ángulo que forma r_1 con el eje x, cuya tangente es 1/2

$$|\vec{g}_x|=\frac{GM}{r^2}\cos(\arctan(\frac{1}{2}))$$

$$|\vec{g}_x|=\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 6}{5}\cdot 0,894=7,16\cdot 10^{-11}\,m/s^2$$

Como se suma el efecto de dos masas, el valor es el doble, y teniendo en cuenta el signo

$$\vec{g}_T=-2\cdot 7,16\cdot 10^{-11}\,\vec{i}=-1,43\cdot 10^{-10}\vec{i}\;m/s^2\,ó\,N/kg$$

B. Teniendo presente que $\vec{u}_r=\frac{\vec{r}}{|r|}$ y $\vec{g}=\frac{-GM}{r^2}\vec{u}_r$

$$\vec{g}_T=\vec{g}_1+\vec{g}_3=\frac{-GM_1}{r_1}\vec{u}_{r1}-\frac{GM_3}{r_3}\vec{u}_{r3}=\frac{-6,67\cdot 10^{-11}\cdot 6}{5}\frac{(2\vec{i}+1\vec{j})}{\sqrt{5}}+\frac{-6,67\cdot 10^{-11}\cdot 6}{5}\frac{(2\vec{i}-1\vec{j})}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{g}_T=2\cdot(\frac{-6,67\cdot 10^{-11}\cdot 6}{5\sqrt{5}})2\,\vec{i}=-1,43\cdot 10^{-10}\vec{i}\;m/s^2\,ó\,N/kg$$

Por simetría, ya que las cuatro masas son iguales, podemos indicar:
Punto entre M_1 y M_2 $\vec{g}_T=1,43\cdot 10^{-10}\vec{j}\,m/s^2\,ó\,N/kg$
Punto entre M_1 y M_3 $\vec{g}_T=1,43\cdot 10^{-10}\vec{i}\,m/s^2\,ó\,N/kg$
Punto entre M_3 y M_4 $\vec{g}_T=-1,43\cdot 10^{-10}\vec{j}\,m/s^2\,ó\,N/kg$
b) En el centro de cuadrado por simetría el campo es claramente cero, pero es no implica que el potencial sea también cero. Por el principio de superposición, dado que todas las masas están a la misma distancia $\sqrt{2}$ m del centro

$$V_{total}=4\,V=4(\frac{-GM}{r})=\frac{-4\cdot 6,67\cdot 10^{-11}\cdot 6}{\sqrt{2}}=-1,13\cdot 10^{-9}\,J/kg$$

B. Problema 1.

a) La fuerza es un vector, luego debemos indicar módulo, dirección y sentido
- Dirección radial, en la línea que une centro de la Tierra y centro de satélite.
- Sentido: hacia la Tierra, fuerza atractiva
- Módulo: $|\vec{F}|=\frac{GMm}{r^2}$ Necesitamos conocer r, radio de la órbita

  Utilizando la relación entre velocidades de escape (se pueden deducir la expresión para la velocidad de escape, pero la usamos directamente; para la órbita hay que tener presente que tiene energía potencial y cinética, la energía de escape no es idéntica a la que habría en una situación similar en superficie donde sólo hay energía potencial, pero la expresión de la velocidad de escape es independiente de si el punto inicial tiene velocidad de rotación o está en órbita, porque la velocidad de escape está asociada a la velocidad total que hay que tener para escapar)

$$\frac{v_{e\,órbita}}{v_{e\,superfice}}=\frac{\sqrt{2\frac{GM}{R_o}}}{\sqrt{2\frac{GM}{R_T}}}=\sqrt{\frac{R_T}{R_o}}=\frac{1}{2};R_o=4R_T$$

$$|\vec{F}|=\frac{GMm}{r^2}=\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot200}{(4\cdot6{,}37\cdot10^6)^2}=122{,}87\,N$$

b) $V=\frac{-GM}{r}=\frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{(4\cdot6{,}37\cdot10^6)}=-1{,}565\cdot10^7 J/kg$

c) $E_m=\frac{-GMm}{2r}=\frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot200}{(2\cdot4\cdot6{,}37\cdot10^6)}=-1{,}565\cdot10^9 J$

d) Para que sea geoestacionario, el período del satélite debe ser de 24 horas, además de estar su órbita en el plano ecuatorial. Utilizando la tercera ley de Kepler

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}r^3;T=\sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}(4\cdot6{,}37\cdot10^6)^3}=40464\,s\neq24\,horas\Rightarrow no\,es\,estacionario$$

2007-Septiembre

Cuestión 1.

a) La aceleración es un vector: calculamos la relación entre módulos

$$\rho=\frac{M}{V};M=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3;\rho_P=\rho_T;R_P=\frac{1}{2}R_T$$

$$\frac{|\vec{g}_P|}{|\vec{g}_T|}=\frac{\frac{GM_P}{R_P^2}}{\frac{GM_T}{R_T^2}}=\frac{M_P}{M_T}\cdot\frac{R_T^2}{R_P^2}=\frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R_P^3}{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R_T^3}\cdot\frac{R_T^2}{R_P^2}=\frac{R_P}{R_T}=\frac{1}{2}\Rightarrow|\vec{g}_p|=\frac{1}{2}|\vec{g}_T|=\frac{1}{2}\cdot9{,}8=4{,}9\,m/s^2$$

b) $Órbita\,circular\,F_c=F_g;\frac{GMm}{R_o^2}=\frac{mv^2}{R_o};v^2=\frac{GM}{R_o};v=\frac{2\pi R_o}{T}$

Utilizamos la tercera ley de Kepler, pero como no tenemos valor de M pero sí de g, lo dejamos en función de g, que depende de R_P, no de R_o

$$g_p=\frac{GM_P}{R_P^2};GM_P=g_pR_P^2$$

$$\left(\frac{2\pi R_o}{T}\right)^2=g_p\frac{R_P^2}{R_o}\Rightarrow T=\sqrt{\frac{4\pi^2R_o^3}{g_PR_P^2}};R_o=\frac{6371\cdot10^3}{2}+400\cdot10^6=3{,}586\cdot10^6\,m$$

$$T=\sqrt{\frac{4\pi^2\cdot(3{,}586\cdot10^6)^3}{4{,}9\cdot(\frac{6371\cdot10^3}{2})^2}}=6051\,s$$

A. Problema 1.-

a) Utilizamos la tercera Ley de Kepler, que podríamos deducir igualando Fc y Fg

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R_o^3\Rightarrow R_o=\sqrt[3]{\frac{T^2GM}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{(24\cdot3600)^2\,6{,}67\cdot10^{-11}\,5{,}96\cdot10^{24}}{4\pi^2}}=4{,}22\cdot10^7\,m$$

$$En\,altura,\,descontando\,el\,radio\,terrestre\;h=4{,}22\cdot10^7-6371\cdot10^3=3{,}5829\cdot10^7\approx36000\,km$$

b) La energía a aportar es la diferencia de energía entre ambas situaciones.

$$\Delta E=E_m(órbita)-E_m(superfice)=\frac{-GMm}{2R_o}-(\frac{-GMm}{R_T})=GMm(\frac{-1}{2R_o}+\frac{1}{R_T})$$

$$\Delta E=6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}96\cdot 10^{24}\cdot 20\cdot(\frac{-1}{2\cdot 4{,}22\cdot 10^{7}}+\frac{1}{6371\cdot 10^{3}})=1{,}15\cdot 10^{9}\,J$$

2007-Junio

Cuestión 1.-

$$\rho=\frac{M}{V};M=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3;R_L=0{,}27R_T;g_L=\frac{1}{6}g_T$$

a) $$\frac{g_L}{g_T}=\frac{\frac{GM_L}{R_L^2}}{\frac{GM_T}{R_T^2}}=\frac{M_L}{M_T}\cdot\frac{R_T^2}{R_L^2}=\frac{\rho_L\cdot\frac{4}{3}\pi R_L^3}{\rho_T\cdot\frac{4}{3}\pi R_T^3}\cdot\frac{R_T^2}{R_L^2}=\frac{\rho_L}{\rho_T}\cdot\frac{R_L}{R_T}=\frac{\rho_L}{\rho_T}\cdot 0{,}27=\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{\rho_L}{\rho_T}=\frac{1}{6\cdot 0{,}27}=0{,}62$$

b) La expresión para la velocidad de escape desde la superficie de un planeta se obtiene igualando energía en superficie (potencial y cinética) con energía en infinito (cero)

$$\frac{v_{e_L}}{v_{e_T}}=\frac{\sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}}}{\sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}}=\sqrt{\frac{M_L}{M_T}\cdot\frac{R_T}{R_L}}=\sqrt{\frac{\rho_L\frac{4}{3}\pi R_L^3R_T}{\rho_T\frac{4}{3}\pi R_T^3R_L}}=\sqrt{\frac{\rho_L R_L^2}{\rho_T R_T^2}}=\sqrt{0{,}62\cdot(0{,}27)^2}=0{,}213$$

B. Problema 1.-

a) Utilizamos la tercera ley de Kepler con los datos de Fobos (también igualando F_c y F_g)

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R^3;M=\frac{4\pi^2R^3}{GT^2}=\frac{4\pi^2\cdot(9380\cdot 10^3)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot(7{,}65\cdot 3600)^2}=6{,}44\cdot 10^{23}\,kg$$

b) Utilizando la tercera ley

$$\frac{T_{Deimos}^2}{T_{Fobos}^2}=\frac{R_{Deimos}^3}{R_{Fobos}^3};T_{Deimos}=T_{Fobos}\sqrt{\left(\frac{R_{Deimos}}{R_{Fobos}}\right)^3}=7{,}65\sqrt{\left(\frac{23460}{9380}\right)^3}=30{,}26\,horas=1{,}26\,días$$

c) $$E_{m\,Deimos}=\frac{-GM_M m_{Deimos}}{2R_{Deimos}}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6{,}44\cdot 10^{23}\cdot 2{,}4\cdot 10^{15}}{(2\cdot 23460\cdot 10^3)}=-2{,}2\cdot 10^{21}\,J$$

d) En órbita circular el vector v, que siempre es tangencial a la trayectoria y siempre formará 90º con el vector r, luego el seno del ángulo que forman será siempre 1.

$$Órbita\,circular\,F_c=F_g;\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r};v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$|\vec{L}|=|\vec{r}|\cdot m\cdot|\vec{v}|\cdot sen\,90º=23460\cdot 10^3\cdot 2{,}4\cdot 10^{15}\cdot\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6{,}44\cdot 10^{23}}{23460\cdot 10^3}}=7{,}62\cdot 10^{25}\frac{kg\cdot m^2}{s}[también\,J\cdot s]$$

Nota: no se utiliza el dato proporcionado de masa de Fobos.

2007-Modelo

Cuestión 1.-

a) $$Órbita\,circular\,F_c=F_g;\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r};v^2=\frac{GM}{r}$$

$$E_p=\frac{-GMm}{r}=-mv^2\Rightarrow v=\sqrt{\frac{-E_m}{m}}=\sqrt{\frac{-2\cdot 10^8}{5}}=6325\,m/s$$

b) $$E_c=\frac{1}{2}mv^2=0{,}5\cdot 5\cdot(9\cdot 10^3)^2=2{,}025\cdot 10^8\,J$$

$$E_m=E_p+E_c=-2\cdot 10^8+2{,}025\cdot 10^8=2{,}5\cdot 10^6\,J$$

Si la energía mecánica es mayor que cero, el objeto se escapa del campo gravitatorio, y por tanto no describe ningún tipo de órbita.

2006-Septiembre

Cuestión 1.-

a) Consideramos sólo fuerzas conservativas por lo que se conserva la energía mecánica

Punto A, lanzamiento: $E_{c_A}=\frac{1}{2}mv^2;E_{p_A}=\frac{-GMm}{R_T}$

Punto B, altura R_T=6370 km: $E_{c_B}=0;E_{p_B}=\frac{-GMm}{2R_T}$

Igualando energía mecánica en A y en B

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R_T}=\frac{-GMm}{2R_T};v=\sqrt{\frac{2GM}{R_T}(1-\frac{1}{2})}=\sqrt{\frac{GM}{R_T}}$$

$$v=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{6{,}37\cdot10^6}}=7913\,m/s$$

b) Para escapar al campo gravitatorio terrestre tiene que aportarse como mínimo energía para que llegue al infinito con energía potencial y cinética nula, lo que igualando supone para la Tierra

$$\frac{1}{2}mv_e^2-\frac{GMm}{R_T}=0;v_e=\sqrt{\frac{2GM}{R_T}}=\sqrt{\frac{2\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{6{,}37\cdot10^6}}=11191\,m/s$$

Por lo tanto si se lanza con una velocidad doble que la del apartado anterior, v = 2·7913=15826 m/s sí escapará del campo gravitatorio terrestre, llegando al infinito con cierta energía cinética.

2006-Junio

A. Problema 1.-

$$|\vec{p}|=m|\vec{v}|;\,necesitamos\,calcular\,m$$

a) $$\acute{O}rbita\,circular\,F_c=F_g;\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r};v^2=\frac{GM}{r}$$

$$E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{r}+\frac{1}{2}mv^2=(-1+\frac{1}{2})mv^2=\frac{-1}{2}mv^2$$

$$m=\frac{-2E_m}{v^2}=\frac{-2\cdot(-4{,}5\cdot10^9)}{7610^2}=155{,}4\,kg$$

$$|\vec{p}|=155{,}4\cdot7610=1{,}175\cdot10^6\,kg\frac{m}{s}$$

$$|\vec{L}|=|\vec{r}||\vec{p}|;\,necesitamos\,calcular\,r$$

$$\acute{O}rbita\,circular\,F_c=F_g;\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r};r=\frac{GM}{v^2}$$

$$|\vec{L}|=\frac{GM}{v^2}\cdot|\vec{p}|=\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{7610^2}\cdot1{,}175\cdot10^6=8{,}09\cdot10^{12}\,kg\frac{m^2}{s}[también\,J\cdot s]$$

$$\acute{O}rbita\,circular\,v=\frac{2\pi r}{T};T=\frac{2\pi r}{v};antes\,ya\,deducido\,r=\frac{GM}{v^2}\,luego\,T=2\pi\frac{GM}{v^3}$$

b) $$T=2\pi\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{7610^3}=5687\,s$$

$$Altura: restamos\,al\,radio\,de\,la\,órbita\,el\,radio\,terrestre$$

$$h=\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{7610^2}-6{,}37\cdot10^6=5{,}17\cdot10^5\,m$$

Cuestión 1.-

a) $g_h=\frac{g_0}{2}\Rightarrow\frac{GM}{(R_T+h)^2}=\frac{GM}{2R_T^2}\Rightarrow R_T+h=\sqrt{2}R_T;h=(\sqrt{2}-1)R_T\approx0{,}41\,R_T$

b) $V_h=\frac{V_0}{2}\Rightarrow-\frac{GM}{(R_T+h)}=\frac{-GM}{2R_T}\Rightarrow R_T+h=2R_T;h=R_T$

2006-Modelo

Cuestión 1.- *(Cuestiones de fechas anteriores donde se piden enunciados leyes Kepler: 2000-*

Junio-Cuestión 1 (1ª y 2ª))

a) 1. Ley de las órbitas. Planetas describen órbitas elípticas y el Sol está en uno de los focos.

2. Ley de las áreas. El área barrida por unidad de tiempo por el radio vector que une Sol-Planeta / la velocidad areolar es constante.

3. Ley de los períodos. Los cuadrados de los períodos son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las órbitas.

b) Utilizando la tercera ley de Kepler, y tomando el período orbital de la Tierra como referencia

$$\frac{T_{Urano}^2}{T_{Tiera}^2}=\frac{R_{Urano}^3}{R_{Tierra}^3}\Rightarrow T_{urano}=T_{Tierra}\sqrt{\left(\frac{R_{Urano}}{R_{Tierra}}\right)^3}=T_{Tierra}\sqrt{\left(\frac{2{,}87\cdot 10^{12}}{1{,}50\cdot 10^{11}}\right)^3}=83{,}7\ años\, terrestres$$

A. Problema 1.-

a) Tomamos como eje x la línea que une los planetas 1 y 2, y tomamos el origen de coordenadas en el centro del planeta 1. Si llamamos x a la coordenada del punto P, dado que los sentidos de las fuerzas son opuestos, podemos plantear

$$F_1=F_2\,;GM_1\frac{m}{x^2}=GM_2\frac{m}{(D-x)^2}\,;\frac{M_1}{x^2}=\frac{2M_1}{(D-x)^2}\,;x=\frac{D-x}{\sqrt{2}}\,;\sqrt{2}\,x+x=D\,;x=\frac{D}{1+\sqrt{2}}$$

$$x=\frac{4{,}83\cdot 10^{10}}{1+\sqrt{2}}=2\cdot 10^{10}\,m$$

b) Como sólo actúan fuerzas conservativas, se conserva la energía mecánica

Tenemos energía potencial de m respecto a ambos planetas, y las sumamos usando superposición

Punto inicial A, superficie planeta 1:

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2=0{,}5\cdot 5\cdot 10^3\cdot(2\cdot 10^4)^2=10^{12}J$$

$$E_{p_1}=-GM_1\frac{m}{R_1}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 4\cdot 10^{24}\cdot 5\cdot 10^3}{6\cdot 10^6}=-2{,}22\cdot 10^{11}J$$

$$E_{p_2}=-GM_2\frac{m}{D-R_1}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 2\cdot 4\cdot 10^{24}\cdot 5\cdot 10^3}{4{,}83\cdot 10^{10}-6\cdot 10^6}=-2{,}76\cdot 10^7 J$$

$$E_{m_1}=10^{12}-2{,}22\cdot 10^{11}-2{,}76\cdot 10^7=7{,}78\cdot 10^{11}J$$

Punto final B, superficie planeta 2:

$$E'_c=\frac{1}{2}m(v')^2$$

$$E_{p_1}=-GM_1\frac{m}{D-R_2}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 4\cdot 10^{24}\cdot 5\cdot 10^3}{4{,}83\cdot 10^{10}-6\cdot 10^6}=-2{,}76\cdot 10^7 J$$

$$E_{p_2}=-GM_2\frac{m}{R_2}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 2\cdot 4\cdot 10^{24}\cdot 5\cdot 10^3}{6\cdot 10^6}=-4{,}45\cdot 10^{11}J$$

$$E'_m=E'_c-2{,}76\cdot 10^7-4{,}45\cdot 10^{11}=E'_c-4{,}45\cdot 10^{11}$$

$$E_{m_1}=E_{m_2}\,;7{,}78\cdot 10^{11}=E'_c-4{,}45\cdot 10^{11}\,;E'_c=1{,}22\cdot 10^{12}J$$

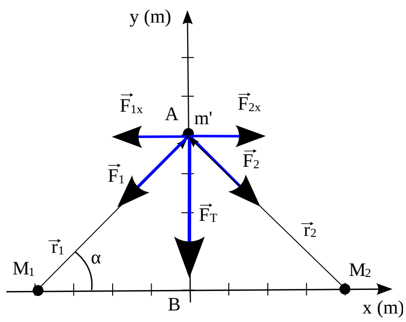
Comentario: se ven posibles aproximaciones:

Como D >> R_1 y D >> R_2 podríamos aproximar D-R_1 y D-R_2 a D

Como D >> R_1 y D >> R_2, en cada una de las dos situaciones prevalece la E_p respecto al objeto más lejano, ya que es mayor (un número negativo mucho más pequeño)

2005-Septiembre

Cuestión 2.-



a) Cualitativamente, por la configuración de la figura, tomando como eje x la línea que une las masas M, las componentes de la fuerza resultante en el eje x se cancelan, quedando sólo componente en el sentido de las y negativas. El valor absoluto de la fuerza de ambas masas sobre m' es el mismo ya que ambas tienen la misma masa y están a la misma distancia, por lo que su módulo será la contribución de una de ellas multiplicada por dos.

Podemos calcularlo de dos maneras:
A. Trigonometría. Calculamos la componente y multiplicando el módulo por el seno de α, y multiplicamos por dos para sumar el efecto de ambas masas.

$$\vec{F}=-2G\frac{Mm'}{r^2}sen\alpha\vec{j}=-2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{20\cdot 0{,}2}{2}sen\,45^o\vec{j}=-1{,}89\cdot 10^{-10}\vec{j}\,N$$

B. Teniendo presente que $\vec{u}_r=\frac{\vec{r}}{|r|}$ y $\vec{g}=\frac{-GM}{r^2}\vec{u}_r$

El vector que va de M_1 a A es $\vec{i}+\vec{j}$ y la distancia entre ellos $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ m
El vector que va de M_2 a A es $-\vec{i}+\vec{j}$ y la distancia entre ellos $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ m

$$\vec{F}=-G\frac{M_1m'}{2}\frac{(\vec{i}+\vec{j})}{\sqrt{2}}--G\frac{M_2m'}{2}\frac{(-\vec{i}+\vec{j})}{\sqrt{2}}=-2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{20\cdot 0{,}2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}=-1{,}89\cdot 10^{-10}\vec{j}\,N$$

b) $\vec{a}(A)=\frac{\vec{F}(A)}{m'}=\frac{-1{,}89\cdot 10^{-10}}{0{,}2}\vec{j}=-9{,}45\cdot 10^{-10}\vec{j}\,m/s^2$

$$\vec{a}(B)=\frac{\vec{F}(B)}{m'}=0\ ya\,que\,en\,B\ por\,simetría\,la\ fuerza\,total\,es\,nula$$

A. Problema 1.-

a) La intensidad de campo gravitatorio es un vector, indicamos módulo, dirección y Dirección radial, en la línea que une centro de la Tierra y centro de satélite.
Sentido: hacia la Tierra, fuerza atractiva

Módulo $g=\frac{GM}{R_o^2}=\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{(\frac{7}{6}\cdot 6{,}37\cdot 10^6)^2}=7{,}22\,m/s^2$

b) $Órbita\,circular\,F_g=F_c;\frac{GMm}{R_o^2}=\frac{mv^2}{R_o};v=\sqrt{\frac{GM}{R_o}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{\frac{7}{6}\cdot 6{,}37\cdot 10^6}}=7326\,m/s$

$$Órbita\,circular\,v=\frac{2\pi R_o}{T};T=\frac{2\pi R_o}{v}=\frac{2\pi\frac{7}{6}\cdot 6{,}37\cdot 10^6}{7326}=6374\,s$$

$$También\,T=\sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}R_o^3}=\sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}\cdot(\frac{7}{6}\cdot 6{,}37\cdot 10^6)^3}=6374\,s$$

c) $E_m=\frac{-GMm}{2R_o}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 400}{2\cdot\frac{7}{6}\cdot 6{,}37\cdot 10^6}=-1{,}07\cdot 10^{10}\,J$

d) Se pide variación de energía potencial, no de energía mecánica

$$\Delta E=E_{p_o}-E_{p_{superficie}}=\frac{-GMm}{R_o}-(\frac{-GMm}{R_T})$$

$$\Delta E=6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 400\cdot(\frac{1}{6{,}37\cdot 10^6}-\frac{1}{\frac{7}{6}\cdot 6{,}37\cdot 10^6})=3{,}58\cdot 10^9\,J$$

<u>2005-Junio</u>

Cuestión 2.-

En ambos apartados, para órbita circular de radio órbita R_o $F_g=F_c;\frac{GMm}{R_o^2}=\frac{mv^2}{R_o};v^2=\frac{GM}{R_o}$

a) $E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\frac{GM}{R_o}=\frac{1}{2}\frac{GMm}{R_o}$

b) $E_m=E_c+E_p=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}=\frac{GMm}{r}(\frac{1}{2}-1)=\frac{-GMm}{2r}=\frac{1}{2}E_p$

A. Problema 1.-

a) Utilizando la tercera ley de Kepler

$$R_o = R_T + h = 6{,}37\cdot10^6 + 655\cdot10^3 = 7{,}025\cdot10^6\,m$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}R_o^3 ; T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}R_o^3} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}(7{,}025\cdot10^6)^3} = 5858\,s$$

b) $E_m = \frac{-GMm}{2R_o} = \frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot100}{2\cdot7{,}025\cdot10^6} = -2{,}84\cdot10^9\,J$

c) Como es una órbita circular los vectores r y v forman siempre 90º

$$\text{Órbita circular } F_g = F_c ; \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} ; v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$|\vec{L}| = |\vec{r}|m|\vec{v}|\,sen\,90º = 7{,}025\cdot10^6\cdot100\cdot\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{7{,}025\cdot10^6}} = 5{,}29\cdot10^{10}\,kg\frac{m^2}{s}[también\ J\cdot s]$$

d) $\frac{g_o}{g_T} = \frac{\frac{GM_T}{R_o^2}}{\frac{GM_T}{R_T^2}} = \frac{R_T^2}{R_o^2} = \frac{(6{,}37\cdot10^6)^2}{(7{,}025\cdot10^6)^2} = 0{,}82$

2005-Modelo

Cuestión 1.-

a) Falso. Para escapar al campo gravitatorio terrestre tiene que aportarse como mínimo energía para que llegue al infinito con energía potencial y cinética nula, lo que igualando supone para la Tierra un valor de velocidad independiente de la masa.

$$\frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{GMm}{R_T} = 0 ; v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}}$$

b) Verdadero, haciendo los cálculos. El trabajo a realizar es la diferencia de energía entre la energía que tiene en órbita (el radio de la órbita es el mismo en los dos casos) y la energía que tiene en la superficie. Si hallamos la expresión para una masa cualquiera y una altura de órbita cualquiera

Energía en órbita: $E_m = E_p + E_c = \frac{-GMm}{2R_o}$ Energía en superficie: $E_m = E_p = \frac{-GMm}{R_T}$

Energía a aportar, que es el trabajo a realizar, espresada en función de la masa del satélite, que es lo único que varía entre los dos casos.

$\Delta E = \frac{-GMm}{2R_o} - \left(\frac{-GMm}{R_T}\right) = -GMm\left(\frac{1}{2R_o} - \frac{1}{R_T}\right) = constante\cdot m$ Se ve que a mayor masa, mayor trabajo a realizar.

2004-Septiembre

Cuestión 1.-

a) Utilizamos la tercera ley de Kepler

$$\frac{T_{Venus}^2}{T_{Tierra}^2} = \frac{R_{Venus}^3}{R_{Tierra}^3} ; T_{Venus} = T_{Tierra}\sqrt{\left(\frac{R_{Venus}}{R_{Tierra}}\right)^3} = 365{,}25\sqrt{\left(\frac{c\cdot6{,}01}{c\cdot8{,}31}\right)^3} = 224{,}65\,días\ terrestres$$

b) $v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\cdot\pi\cdot3\cdot10^8\cdot6{,}01\cdot60}{224{,}65\cdot24\cdot2600} = 35019\,m/s$

A. Problema 1.-

a)

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} ; g = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow M = \frac{gR^2}{G}(R = radio\ del\ planeta, en\ superficie)$$

$$\rho = \frac{3gR^2}{4\pi GR^3} = \frac{3g}{4\pi GR} = \frac{3\cdot6{,}2}{4\cdot\pi\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\cdot3200\cdot10^3} = 6935\frac{kg}{m^3}$$

Se pide también la velocidad de escape, $v_e = \sqrt{2G\frac{M}{R}}$

Para no calcular la masa del planeta como dato intermedio ya que no se pide, expresamos el producto GM en función de los datos del enunciado

$$g=\frac{GM}{R^2}\Rightarrow GM=gR^2 \qquad v_e=\sqrt{2\,gR}=\sqrt{2\cdot 6{,}2\cdot 3200\cdot 10^3}=6299\,m/s$$

b) La energía a comunicar es la diferencia de energía entre la energía que tiene en órbita y la energía que tiene en la superficie.

Energía en órbita: $E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{2\mathrm{R}_o}$ Energía en superficie: $E_m=E_p=\frac{-GMm}{R}$

Utilizamos la tercera ley de Kepler con los datos de que el período son dos horas y la masa para calcular el radio de la órbita.

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R_o^3=\frac{4\pi^2}{g\,R^2}R_o^3\Rightarrow R_o=\sqrt[3]{\frac{T^2\cdot g\cdot R^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{(2\cdot 3600)^2\cdot 6{,}2\cdot(3200\cdot 10^3)^2}{4\pi^2}}=4{,}37\cdot 10^6\,m$$

Energía a comunicar

$$\Delta E=\frac{-GMm}{2\mathrm{R}_o}-\left(\frac{-GMm}{R}\right)=-GMm\left(\frac{1}{2\mathrm{R}_o}-\frac{1}{R}\right)=-gmR^2\left(\frac{1}{2\mathrm{R}_o}-\frac{1}{R}\right)$$

$$\Delta E=-6{,}2\cdot 50\cdot(3200\cdot 10^3)^2\left(\frac{1}{2\cdot 4{,}37\cdot 10^6}-\frac{1}{3200\cdot 10^3}\right)=6{,}29\cdot 10^8\,J$$

2004-Junio

Cuestión 2.-

a) El momento angular es constante en la órbita al ser fuerzas centrales, y es el mismo en el afelio y perihelio.

b) El momento lineal y la velocidad es mayor en el perihelio. Se puede razonar de dos maneras

- El momento angular es constante en la órbita al ser fuerzas centrales. Como en perihelio y afelio los vectores r y p son perpendiculares, podemos igualar $r_A m v_A = r_P m v_P$ y dado que $r_A > r_P$, tiene que cumplirse que $v_P > v_A$
- La Energía mecánica es constante en toda la órbita al ser fuerzas conservativas, por lo tanto en el punto donde la Ep es menor (perihelio deducible según expresión Ep, la Ep será mínima en valor absoluto pero máxima (es negativa)), la Energía cinética será mayor y por lo tanto también la velocidad.

c) La energía potencial es mayor en el afelio, ya que al ser la distancia mayor en afelio, según la expresión $E_p=\frac{-GMm}{R}$ será un número mayor (un número negativo de menor valor absoluto)

d) Al haber sólo fuerzas conservativas la energía mecánica se conserva en toda la órbita, y es la misma en afelio y perihelio.

2004-Modelo

Cuestión 1.-

a) El momento angular es constante en la órbita al ser fuerzas centrales. Como en perihelio y afelio los vectores r y p son perpendiculares, podemos plantear $r_A m v_A = r_P m v_P \Rightarrow \frac{r_P}{r_A}=\frac{v_A}{v_P}=\frac{14}{20}=0{,}7$

b) $$\frac{E_{p_A}}{E_{p_P}}=\frac{\frac{-GMm}{r_A}}{\frac{-GMm}{r_P}}=\frac{r_P}{r_A}=\frac{14}{20}=0{,}7$$

A. Problema 1.-

a) Utilizando la tercera ley de Kepler

$$\frac{T^2_{sonda}}{T^2_{satélite}}=\frac{R^3_{sonda}}{R^3_{satélite}};T_{sonda}=T_{satélite}\sqrt{\left(\frac{R_{sonda}}{R_{satélite}}\right)^3}=7{,}7\cdot\sqrt{\left(\frac{3390\cdot 10^3+400\cdot 10^3}{9390\cdot 10^3}\right)^3}=1{,}97\,h$$

b) Utilizando la tercera ley de Kepler

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R^3\Rightarrow M=\frac{4\pi^2 R^3}{G T^2}=\frac{4\pi^2(9390\cdot10^3)^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot(7{,}7\cdot3600)^2}=6{,}38\cdot10^{23}kg$$

$$g=\frac{GM}{R^2}=\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6{,}38\cdot10^{23}}{(3390\cdot10^3)^2}=3{,}7\frac{m}{s^2}$$

2003-Septiembre

A. Problema 1.-

a) Utilizando la tercera ley de Kepler, ya que conocemos período y radio órbita

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R^3\Rightarrow T=\sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{G M}}=\sqrt{\frac{4\pi^2(7100\cdot10^3)^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}}=5952\,s$$

b) El momento lineal es un vector; será siempre tangencial a la órbita, y su módulo será

$$|\vec{p}|=m|\vec{v}|=m\frac{2\pi R_o}{T}=\frac{100\cdot2\pi7100\cdot10^3}{5952}=749506\frac{kg\cdot m}{s}$$

El momento angular es un vector; será perpendicular al plano de la órbita, formará siempre 90º con el vector r, y su módulo será

$$|\vec{L}|=|\vec{r}|m|\vec{v}|sen90º=R_o|\vec{p}|=7100\cdot10^3\cdot749506=5{,}32\cdot10^{12}kg\frac{m^2}{s}[también\,J\cdot s]$$

c)

$$\Delta E_p=E_{p_{órbita}}-E_{p_{superficie}}=\frac{-GMm}{R_o^2}-(\frac{-GMm}{R_T^2})=-GMm(\frac{1}{R_o^2}-\frac{1}{R_T^2})$$

$$\Delta E_p=-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot100(\frac{1}{7100\cdot10^3}-\frac{1}{6{,}37\cdot10^6})=6{,}4\cdot10^8J$$

d)

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi R_o}{T}\right)^2=0{,}5\cdot100\cdot\left(\frac{2\pi7100\cdot10^3}{5952}\right)^2=2{,}8\cdot10^9J$$

$$E_m=E_c+E_p=2{,}8\cdot10^9-\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot100}{7100\cdot10^3}=-2{,}8\cdot10^9J$$

También podríamos haber razonado directamente que en órbita circular $E_m = - E_c = 1/2\ E_p$

2003-Junio

Cuestión 1.-

$$\rho=\frac{M}{V};M=\frac{\rho\cdot4}{3}\pi R^3;R_P=\frac{1}{2}R_T;\rho_P=\rho_T$$

a)

$$\frac{g_P}{g_T}=\frac{\frac{GM_P}{R_P^2}}{\frac{GM_T}{R_T^2}}=\frac{\rho_P\cdot\frac{4}{3}\pi R_P^3\cdot R_T^2}{\rho_T\cdot\frac{4}{3}\pi R_T^3\cdot R_P^2}=\frac{R_P}{R_T}=\frac{1}{2}\Rightarrow g_P=\frac{1}{2}g_T=0{,}5\cdot9{,}81=4{,}905\frac{m}{s^2}$$

b) La velocidad de escape se obtiene igualando la energía mecánica en superficie con la energía mecánica en infinito (cero), con lo que se llega a la expresión

$$\frac{1}{2}mv_e^2-\frac{GMm}{R}=0\Rightarrow v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}=\sqrt{2gR}$$

$$\frac{v_{e_P}}{v_{e_T}}=\frac{\sqrt{2g_P R_P}}{\sqrt{2g_T R_T}}=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow v_{e_P}=0{,}5\cdot11{,}2\cdot10^3=5{,}6\cdot10^3m/s$$

A. Problema 1.-

a) El momento angular es constante en la órbita al ser fuerzas centrales. Como en perihelio y afelio los vectores r y p son perpendiculares, podemos plantear

$$r_A m v_A=r_P m v_P\Rightarrow v_P=\frac{r_A v_A}{r_P}=\frac{6{,}99\cdot10^{10}\cdot3{,}88\cdot10^4}{4{,}60\cdot10^{10}}=5{,}9\cdot10^4m/s$$

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2=0{,}5\cdot 3{,}18\cdot 10^{23}\cdot(5{,}9\cdot 10^4)^2=5{,}5\cdot 10^{32}\,J$$

b) $$E_p=\frac{-GMm}{R}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}99\cdot 10^{30}\cdot 3{,}18\cdot 10^{23}}{4{,}6\cdot 10^{10}}=-9{,}18\cdot 10^{32}\,J$$

$$E_m=E_c+E_p=5{,}5\cdot 10^{32}-9{,}18\cdot 10^{32}=-3{,}68\cdot 10^{32}\,J$$

c) $$|\vec{p}|=m|\vec{v}|=3{,}18\cdot 10^{23}\cdot 5{,}9\cdot 10^4=1{,}88\cdot 10^{28}\,kg\,\frac{m}{s}$$

$$|\vec{L}|=|\vec{r}|m|\vec{v}|\,sen\,90º=R|\vec{p}|=4{,}6\cdot 10^{10}\cdot 1{,}88\cdot 10^{28}=8{,}65\cdot 10^{38}\,kg\,\frac{m^2}{s}[\,también\,J\cdot s]$$

d) Energía total: igual en afelio y perihelio, ya que se conserva al haber sólo fuerzas conservativas.
Momento angular: igual en afelio y perihelio, ya que se conserva al ser fuerzas centrales.
Energía cinética y potencial: distinta en afelio y perihelio al depender de la distancia.
Momento lineal: distinto en afelio y perihelio al haber distintas velocidades.

2003-Modelo

Cuestión 1.-

$$M_P=27\,M_T\,;\,v_{e_P}=3\,v_{e_T}$$

a) $$\frac{v_{e_P}}{v_{e_T}}=\frac{\sqrt{\frac{2GM_P}{R_P}}}{\sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}}=\sqrt{\frac{M_P}{M_T}\cdot\frac{R_T}{R_P}}=\sqrt{\frac{27\cdot R_T}{R_P}}=3\Rightarrow\frac{R_T}{R_P}=\frac{3^2}{27}=\frac{1}{3}\approx 0{,}33$$

b) $$\frac{g_P}{g_T}=\frac{\frac{GM_P}{R_P^2}}{\frac{GM_T}{R_T^2}}=\frac{M_P}{M_T}\cdot\left(\frac{R_T}{R_P}\right)^2=\frac{27\cdot 1}{3^2}=3$$

A. Problema 1.-

a) Utilizamos la tercera ley de Kepler

$$T^2_{satélite}=\frac{4\pi^2}{GM_{Júpiter}}R^3_{satélite}\Rightarrow R_{satélite}=\sqrt[3]{\frac{GM_{Júpiter}T^2_{satélite}}{4\pi^2}}$$

Expresamos la masa de la Júpiter en función de los datos proporcionados

$$M_{Júpiter}=320\,M_{Tierra}\,;\,g_{Tierra}=\frac{GM_{Tierra}}{R_T^2}\Rightarrow M_{Tierra}=\frac{g_{Tierra}\cdot R_T^2}{G}\,;\,M_{Júpiter}=\frac{320\cdot g_{Tierra}\cdot R_T^2}{G}$$

Despejamos el Radio de la órbita del satélite, y calculamos altura

$$R_{satélite}=\sqrt[3]{\frac{320\cdot g_{Tierra}\cdot R_T^2\,T^2_{satélite}}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{320\cdot 9{,}8\cdot(6{,}37\cdot 10^6)^2\cdot(9\cdot 3600+50\cdot 60)^2}{4\pi^2}}=1{,}59\cdot 10^8\,m$$

$$V_{Júpiter}=\frac{4}{3}\pi R^3_{Júpiter}=1320\cdot\frac{4}{3}\pi R^3_{Tierra}\Rightarrow R_{Júpiter}=\sqrt[3]{1320}\,R_{Tierra}$$

$$h=R_{satélite}-R_{Júpiter}=1{,}59\cdot 10^8-\sqrt[3]{1320}\cdot 6{,}37\cdot 10^6=8{,}91\cdot 10^7\,m$$

b) $$Órbita\,circular\,v=\frac{2\pi R_{satélite}}{T_{satélite}}=\frac{2\cdot\pi\cdot 1{,}59\cdot 10^8}{9\cdot 3600+50\cdot 60}=28221\,m/s$$

2002-Septiembre

A. Problema 1 .-

a) Si el satélite pasa sobre un punto cada dos días, el período es T = 2 días. Utilizamos la tercera ley de Kepler

$$T^2_{satélite}=\frac{4\pi^2}{GM_T}R^3_{satélite}\Rightarrow R_{satélite}=\sqrt[3]{\frac{GM_T T^2_{satélite}}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot(2\cdot 24\cdot 3600)^2}{4\pi^2}}=6{,}71\cdot 10^7\,m$$

$$h=R_{satélite}-R_T=6{,}707\cdot 10^7-6{,}37\cdot 10^6=6{,}07\cdot 10^7\,m$$

b) La energía a comunicar para colocarlo en esa órbita desde el lanzamiento es la diferencia de energías entre órbita y situación de lanzamiento

En órbita $E_m = E_c + E_p = \frac{-GMm}{2\mathrm{R}_{satélite}}$; En lanzamiento: $E_m = E_p = \frac{-GMm}{R_T}$

Energía a comunicar para llevar a órbita:

$$\Delta E_{órbita} = \frac{-GMm}{2\mathrm{R}_{satélite}} - \left(\frac{-GMm}{R_T}\right) = -GMm \cdot \left(\frac{1}{2\mathrm{R}_{satélite}} - \frac{1}{R_T}\right)$$

La energía de escape es la energía a comunicar para que escape del campo gravitatorio terrestre, llegando al infinito con energía cinética nula. Por lo tanto esa energía es en valor absoluto, la energía potencial gravitatoria.

Energía a comunicar para escape: $\Delta E_{escape} = \frac{GMm}{R_T}$

La relación entre ambas es

$$\frac{\Delta E_{órbita}}{\Delta E_{escape}} = \frac{-GMm \cdot \left(\frac{1}{2\mathrm{R}_{satélite}} - \frac{1}{R_T}\right)}{\frac{GMm}{R_T}} = \frac{-R_T}{2\mathrm{R}_{satélite}} + 1 = \frac{-6{,}37 \cdot 10^6}{2 \cdot 6{,}71 \cdot 10^7} + 1 = 0{,}9525 = 95{,}25\%$$

2002-Junio

Cuestión 1.-

a) $g = \frac{GM}{R^2} = \frac{G\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{R^2} = \rho\frac{4}{3}\pi G R \Rightarrow \rho = \frac{3\mathrm{g}}{4\pi G R} = \frac{3 \cdot 6}{4\pi \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 3000 \cdot 10^3} = 7158\frac{kg}{m^3}$

b) $v_e = \sqrt{\frac{2\mathrm{GM}}{R}} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 6 \cdot 3000 \cdot 10^3} = 6000\, m/s$

A. Problema 1.-

a) Como sabemos la velocidad angular, sabemos el periodo

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1{,}45 \cdot 10^{-4}} = 43332\, s$$

Conocido el periodo y la masa del objeto respecto al que orbita, podemos conocer el radio de la órbita utilizando la tercera ley de Kepler

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r_1^3 \Rightarrow r_1 = \sqrt[3]{\frac{GMT_1^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 4{,}87 \cdot 10^{24} \cdot 43332^2}{4\pi^2}} = 2{,}49 \cdot 10^7\, m$$

Al ser una órbita circular los vectores r y v forman siempre 90º

$$L_1 = r_1 \cdot m \cdot v_1 = r_1 \cdot m \cdot \omega_1 \cdot r_1 \Rightarrow m = \frac{L_1}{\omega_1 \cdot r_1^2} = \frac{2{,}2 \cdot 10^{12}}{1{,}45 \cdot 10^{-4} \cdot (2{,}49 \cdot 10^7)^2} = 24{,}47\, kg$$

b) La energía a invertir será la diferencia de energía entre ambas situaciones

Órbita 1: $E_{m_1} = \frac{-GMm}{2\mathrm{r}_1} = \frac{-6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 4{,}87 \cdot 10^{24} \cdot 24{,}47}{2 \cdot 2{,}49 \cdot 10^7} = -1{,}6 \cdot 10^8\, J$

En la órbita 2 hay que tener en cuenta que tendremos un nuevo radio que debemos calcular, calculando el periodo y utilizando la tercera ley de Kepler como en el apartado anterior.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10^{-4}} = 62832\, s$$

$$T_2^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r_2^3 \Rightarrow r_2 = \sqrt[3]{\frac{GMT_2^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 4{,}87 \cdot 10^{24} \cdot 62832^2}{4\pi^2}} = 3{,}19 \cdot 10^7\, m$$

Órbita 2: $E_{m_2} = \frac{-GMm}{2\mathrm{r}_2} = \frac{-6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 4{,}87 \cdot 10^{24} \cdot 24{,}47}{2 \cdot 3{,}19 \cdot 10^7} = -1{,}25 \cdot 10^8\, J$

Energía a invertir $\Delta E = E_{m_2} - E_{m_1} = -1{,}25 \cdot 10^8 - (-1{,}6 \cdot 10^8) = 3{,}5 \cdot 10^7\, J$

2002-Modelo

Cuestión 1.-

a) Como P=mg pero la masa no varía, calculamos la altura a la que la intensidad del campo gravitatorio sea la mitad

$$\frac{g_h}{g_0}=\frac{\frac{GM}{(R_T+h)^2}}{\frac{GM}{R_T^2}}=\left(\frac{R_T}{R_T+h}\right)^2=\frac{1}{2}\Rightarrow\sqrt{2}\,R_T=R_T+h\,;\,h=(\sqrt{2}-1)\,R_T\approx 0{,}41\,R_T$$

b) Porque la intensidad de campo gravitatorio mide la fuerza por unidad de masa, y la aceleración es inversamente proporcional a la masa. Si tenemos dos cuerpos de m_1 y m_2, siendo m_2 el más pesado ($m_2 > m_1$), tendremos que $F_1=m_1g$ y $F_2=m_2g$, por lo que efectivamente $F_2 > F_1$, sin embargo como F=ma, a = F/m, luego $a_1=F_1/m_1$ y $a_2=F_2/m_2$, siendo en ambos casos $a_1=a_2=g$, misma aceleración independientemente de la masa del objeto.

A. Problema 1.-

a) Utilizamos la tercera ley de Kepler con los datos del planeta 1

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R^3\Rightarrow M=\frac{4\pi^2R^3}{GT^2}=\frac{4\pi^2\cdot(10^{11})^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot(2\cdot 365\cdot 24\cdot 3600)^2}=1{,}49\cdot 10^{29}\,kg$$

b) Utilizamos la tercera ley de Kepler, teniendo en cuenta que R, cuando no se trata de una órbita circular, hace referencia al semieje mayor.

$$\frac{T_2^2}{T_1^2}=\frac{R_2^3}{R_1^3};\,T_2=T_1\sqrt{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3}=2\cdot\sqrt{\left(\frac{1{,}8\cdot 10^{11}}{10^{11}}\right)^3}=4{,}83\,años$$

c) Utilizando el principio de conservación del momento angular, ya que son fuerzas centrales, y teniendo en cuenta que en el punto más próximo (perihelio) y más alejado (afelio) los vectores r y v forman 90º, podemos plantear para el planeta 2

$$L_A=L_P\Rightarrow r_A m v_A=r_P m v_P$$

Utilizando el principio de conservación de la energía mecánica, ya que sólo actúan fuerzas conservativas, podemos plantear para el planeta 2

$$E_{m_A}=E_{m_P}\Rightarrow\frac{1}{2}m v_A^2-\frac{GMm}{r_A}=\frac{1}{2}m v_P^2-\frac{GMm}{r_P}$$

Tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas (v_A y v_P), como nos interesa v_P, despejamos v_A en la primera y sustituimos en la segunda.

$$v_A=\frac{r_P v_P}{r_A}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{r_P v_P}{r_A}\right)^2-\frac{GM}{r_A}=\frac{1}{2}v_P^2-\frac{GM}{r_P}\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\left(\frac{r_P}{r_A}\right)^2-\frac{1}{2}\right)v_P^2=GM\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_P}\right)$$

$$v_P=\sqrt{\frac{GM\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_P}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{r_P}{r_A}\right)^2-\frac{1}{2}}}=v_P=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}49\cdot 10^{29}\left(\frac{1}{1{,}8\cdot 10^{11}}-\frac{1}{10^{11}}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{10^{11}}{1{,}8\cdot 10^{11}}\right)^2-\frac{1}{2}}}=11304\,m/s$$

2001-Septiembre

Cuestión 1.-

a) Si ignoramos fuerzas de rozamiento podemos asumir que solamente actúa la fuerza de la gravedad, conservativa, y planteamos la conservación de energía mecánica entre ambos puntos:
Punto 1, lanzamiento:

$$E_c=\frac{1}{2}m v^2=\frac{1}{2}10\,3200^2=5{,}12\cdot 10^7\,J$$

$E_p=-G\frac{Mm}{R_{superficie}}$ No se da en el enunciado los valores de G ni de M, pero el valor de su producto podemos obtenerla del valor proporcionado de la gravedad en la superficie de la Tierra, ya que

$$g=G\frac{M}{R_{superficie}^2}\Rightarrow GM=g\cdot R_{superficie}^2=9{,}8\cdot(6{,}37\cdot10^6)^2=3{,}9765\cdot10^{14}\,m^3/s^2$$

En el lanzamiento $E_p=-G\frac{Mm}{R_{superficie}}=-3{,}9765\cdot10^{14}\cdot\frac{10}{6{,}37\cdot10^6}=-6{,}24\cdot10^8\,J$

Punto 2, altura máxima

E_c=0, $E_p=-GM\frac{m}{(R_{superficie}+h_{máx})}=-3{,}9765\cdot10^{14}\cdot\frac{10}{6{,}37\cdot10^6+h_{máx}}$

Igualamos ambas energías, podemos responder a la pregunta del enunciado indicando que

$$E_{m1}=E_{m2}=E_{p2}=5{,}12\cdot10^7-6{,}24\cdot10^8=-5{,}728\cdot10^8\,J$$

b) Si sustituimos

$$E_{m1}=E_{m2}\Rightarrow-5{,}728\cdot10^8=-3{,}9765\cdot10^{14}\cdot\frac{10}{6{,}37\cdot10^6+h_{máx}}\Rightarrow1{,}44\cdot10^{-7}=\frac{1}{6{,}37\cdot10^6+h_{máx}}$$

$$6{,}94\cdot10^6=6{,}37\cdot10^6+h_{máx}\Rightarrow h_{máx}=570000\,m$$

2001-Junio

Cuestión 1.- *(Enunciado similar a 2001-Modelo-Cuestión 1, resolución idéntica)*

a) En una órbita circular podemos igualar fuerza gravitatoria y centrípeta

$\text{Órbita circular}\;F_g=F_c;\;\frac{GMm}{R_o^2}=\frac{mv^2}{R_o};\;v^2=\frac{GM}{R_o}$ Sustituimos en la expresión de la E_c:

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\frac{GM}{R_o}=\frac{GMm}{2R_o}$$

b) La energía potencial es $E_p=-G\frac{Mm}{R_o}$, por lo que la energía mecánica es

$$E_m=E_c+E_p=\frac{GMm}{2R_o}-\frac{GMm}{R_o}=\frac{-GMm}{2R_o}$$

La relación solicitada es $E_m=\frac{1}{2}E_p$

A. Problema 1.-

a) $\text{Órbita circular}\;F_g=F_c;\;\frac{GMm}{R_o^2}=\frac{mv^2}{R_o};\;v^2=\frac{GM}{R_o}$

$$\frac{v_1^2}{v_2^2}=\frac{\frac{GM}{r_1}}{\frac{GM}{r_2}}=\frac{r_2}{r_1}\Rightarrow v_1=\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}v_2=\sqrt{\frac{9{,}034\cdot10^6}{8\cdot10^6}}v_2\Rightarrow v_1=1{,}063\,v_2;\;\text{también}\;v_2=0{,}94\,v_1$$

b) Según la tercera ley de Kepler $\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{r_1^3}{r_2^3}\Rightarrow T_1=\sqrt{\frac{r_1^3}{r_2^3}}T_2=\sqrt{\frac{(8\cdot10^6)^3}{(9{,}034\cdot10^6)^3}}\cdot T_2\Rightarrow T_1=0{,}83\,T_2$

Para describir la posición en este caso utilizamos coordenadas polares, tomando θ=0º en el instante inicial para ambos satélites. Enunciado no pide posición relativa entre satélites: basta con dar la posición del segundo satélite respecto al sistema de coordenadas elegido.

El primer satélite es el que tiene mayor velocidad, y en recorrer 6 vueltas tardará un tiempo

$$t_{tardado\,por\,S1}=\frac{e_{recorrido\,por\,S1}}{v_1}=\frac{6\cdot2\pi r_1}{v_1}$$

En ese tiempo, el segundo satélite habrá recorrido $e_{recorrido\,por\,S2}=v_2\cdot t_{tardado\,por\,S1}=v_2\cdot\frac{6\cdot2\pi r_1}{v_1}$

Como queremos conocer la fase de este satélite y en un movimiento circular la fase en radianes es $\theta=\frac{e}{R}$, donde en este caso estamos hablando de la fase de S_2 y tenemos que usar r_2, de modo que

$$\theta_{recorrido\ por\ S2} = \frac{v_2}{v_1} \cdot 6 \cdot 2\pi \frac{r_1}{r_2}$$

Sustituyendo la relación entre velocidades del apartado a

$$\theta_{recorrido\ por\ S2} = 0{,}94 \cdot 6 \cdot 2\pi \frac{8 \cdot 10^6}{9{,}034 \cdot 10^6} = 9{,}98\pi\, rad \approx 10\pi\, rad$$

Como el ángulo recorrido por el segundo satélite es aproximadamente un múltiplo de 2π, el satélite S_2 ha completado vueltas completas (5 vueltas completas) y se encuentra en la misma posición que en el instante inicial. Como el satélite S_1 también ha completado un número completo de vueltas, 6 según el enunciado, ambos están en la posición inicial.

2001-Modelo

Cuestión 1.-

En una órbita circular podemos igualar fuerza gravitatoria y centrípeta

$$\text{Órbita circular } F_g = F_c; \frac{GMm}{R_o^2} = \frac{mv^2}{R_o}; v^2 = \frac{GM}{R_o}$$ Sustituimos en la expresión de la E_c:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \frac{GM}{R_o} = \frac{GMm}{2R_o}$$

La energía potencial es $E_p = -G\frac{Mm}{R_o}$, por lo que la energía mecánica es

$$E_m = E_c + E_p = \frac{GMm}{2R_o} - \frac{GMm}{R_o} = \frac{-GMm}{2R_o}$$

La relación solicitada es $E_m = \frac{1}{2} E_p$

A. Problema 1.-

a) Según el enunciado $T_{Júpiter} = 12 T_{Tierra}$.

Según la tercera ley de Kepler $\frac{T_J^2}{T_T^2} = \frac{R_J^3}{R_T^3} \Rightarrow \sqrt[3]{12^2} = \frac{R_J}{R_T} \Rightarrow R_J = 5{,}24\, R_T$

b) La aceleración en la órbita es centrípeta.

$$\frac{a_J}{a_T} = \frac{\frac{v_J^2}{R_J}}{\frac{v_T^2}{R_T}} = \frac{v_J^2}{v_T^2} \frac{R_T}{R_J}$$

Para hallar la relación entre las velocidades, igualamos fuerza gravitatoria y centrípeta al ser órbita circular $F_g = F_c; \frac{GM_{Sol} m_{planeta}}{R^2} = m_{planeta} \frac{v_{planeta}^2}{R}; v_{planeta}^2 = \frac{GM_{Sol}}{R}$

$$\frac{a_J}{a_T} = \frac{G\frac{M_{Sol}}{R_J}}{G\frac{M_{Sol}}{R_T}} \frac{R_T}{R_J} = \frac{R_T^2}{R_J^2} = (12^2)^{2/3} \approx 27{,}47$$

2000-Septiembre

Cuestión 1.-

a) La frecuencia angular con la que debe girar es la misma que la frecuencia angular de giro de la Tierra; se trata de un satélite geoestacionario.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 7{,}27 \cdot 10^{-5}\, rad/s$$

b) En una órbita circular podemos igualar fuerza centrípeta y gravitatoria, y podemos sustituir $v = \omega R_o$, luego

$$F_g=F_c; \frac{GMm}{R_o^2}=\frac{mv^2}{R_o}; \frac{GM}{R_o}=(\omega R_o)^2 \Rightarrow R_o=\sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}$$
No se da en el enunciado los valores de G ni de M, pero el valor de su producto podemos obtenerla del valor proporcionado de la gravedad en la superficie de la Tierra, ya que
$$g=G\frac{M}{R_{superficie}^2} \Rightarrow GM=g \cdot R_{superficie}^2=9{,}8\cdot(6{,}37\cdot 10^6)^2=3{,}9765\cdot 10^{14}\, m^3/s^2$$
Sustituyendo
$$R_o=\sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}=\sqrt[3]{\frac{3{,}9765\cdot 10^{14}}{(7{,}27\cdot 10^{-5})^2}}=4{,}22\cdot 10^7\, m$$
Como se pide altura, $h=R_o-R_{superficie}=4{,}22\cdot 10^7-6{,}37\cdot 10^6=3{,}58\cdot 10^7$ m

A. Problema 1.-

a) La velocidad del satélite, igualando fuerza centrípeta y gravitatoria
$$\text{Órbita circular } F_g=F_c; \frac{GMm}{R_o^2}=\frac{mv^2}{R_o}; v^2=\frac{GM}{R_o} \Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM}{R_o}}$$
No se da en el enunciado los valores de G ni de M, pero el valor de su producto podemos obtenerla del valor proporcionado de la gravedad en la superficie de la Tierra, ya que
$$g=G\frac{M}{R_{superficie}^2} \Rightarrow GM=g \cdot R_{superficie}^2=9{,}8\cdot(6{,}37\cdot 10^6)^2=3{,}9765\cdot 10^{14}\, m^3/s^2$$
Para hallar el radio de la órbita, usamos la relación entre el campo del enunciado: llamamos g_T al valor de la gravedad en la superficie y g_O al valor en la órbita.
$$|\vec{g}|=g=\frac{GM}{R^2} \Rightarrow \frac{g_O}{g_T}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\frac{GM}{r_O^2}}{\frac{GM}{r_T^2}}=\frac{r_T^2}{r_O^2}=\frac{1}{2} \Rightarrow r_O=\sqrt{2}\, r_T$$
No se solicita la altura, pero se puede calcular $r_O=r_T+h \Rightarrow r_T+h=\sqrt{2}\, r_T \Rightarrow h=(\sqrt{2}-1)\, r_T$

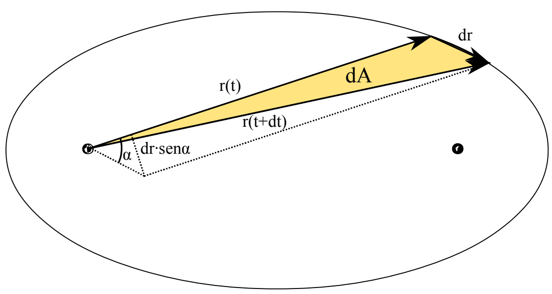
Sustituyendo:
$$v=\sqrt{\frac{3{,}9765\cdot 10^{14}}{\sqrt{2}\, 6{,}37\cdot 10^6}}=6643{,}9\, m/s$$
b) Para una órbita circular se puede llegar a la expresión $E_m=\frac{-GMm}{2R_o}$ que también se puede comprobar que $E_m=-E_c$, que es más cómoda ya que en el apartado a tenemos calculada la velocidad, por lo que sustituyendo: $E_m=-0{,}5\cdot 200\cdot 6643{,}9^2=-4{,}4\cdot 10^9$ J

2000-Junio

Cuestión 1.-

a) 1. Ley de las órbitas. Planetas describen órbitas elípticas y el Sol está en uno de los focos.
2. Ley de las áreas. El área barrida por unidad de tiempo por el radio vector que une Sol-Planeta / la velocidad areolar es constante.

b) Como no se indica en enunciado para órbita circular debemos contemplar el caso genérico de órbita elíptica. Si planteamos la órbita elíptica y un área diferencial barrida



$dA=\frac{1}{2}|\vec{r}\times d\vec{r}|$ (La mitad del área del paralelogramo formado por vectores r y dr)

Operando para obtener la velocidad areolar
$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=\frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}|$$
Según el teorema de la conservación del momento

angular $\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}$. Tomando como referencia para el momento de las fuerzas el objeto respecto al que se orbita, siempre tendremos que vector posición y vector fuerza son paralelos, ya que son fuerzas centrales, por lo que $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=0$. Por lo tanto la variación del momento angular es nula, y el vector momento angular es constante, en concreto su módulo, $|\vec{L}|=m|\vec{r}\times\vec{v}|=cte$.
Podemos plantear $\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}\frac{|\vec{L}|}{m}=\frac{|\vec{L}|}{2m}=cte$, que muestra que la segunda ley de Kepler es un caso particular del teorema de conservación del momento angular.

A. Problema 1-

a) Calculamos la energía potencial en ambos puntos:
En superficie antes del lanzamiento:

$$E_{pT}=-G\frac{Mm}{R_T}=-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot\frac{600}{6{,}37\cdot10^6}=-3{,}76\cdot10^{10}J$$

En la órbita;

$$E_{pO}=-G\frac{Mm}{R_O}=-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot\frac{600}{6{,}37\cdot10^6+1200\cdot10^3}=-3{,}16\cdot10^{10}J$$

La diferencia de energía es $\Delta E_p=E_{pO}-E_{pT}=-3{,}16\cdot10^{10}-(-3{,}76\cdot10^{10})=6\cdot10^9$ J
b) La energía de escape es la energía que hay que suministrar para que llegue a una posición infinitamente alejada ($E_p=0$), con velocidad nula ($E_c=0$). Al no considerar fuerzas no conservativas podemos plantear la conservación de la energía mecánica: la energía mecánica que tenga el satélite en la órbita más la energía adicional suministrada será igual a la energía mecánica en la posición infinitamente alejada
-Energía mecánica en órbita: ya conocemos la E_{pO} del apartado a, calculamos la E_c. Si asumimos órbita circular podemos llegar a la expresión $E_{mO}=1/2\cdot E_{pO}=0{,}5\cdot(-3{,}16\cdot10^{10})=-1{,}58\cdot10^{10}$ J
-Energía mecánica en posición infinitamente alejada ($E_p=0$), con velocidad nula ($E_c=0$): $E_{m\infty}=0$.
La diferencia de energía es la energía a suministrar $\Delta E_m=E_{m\infty}-E_{mO}=0-(-1{,}58\cdot10^{10})=1{,}58\cdot10^{10}$ J

<u>2000-Modelo</u>

Cuestión 1.-

a) Según la segunda ley de Kepler, la velocidad areolar es constante, luego para barrer la misma cantidad de área estando más cerca del Sol, perihelio, tendrá que ir a mayor velocidad. También podemos razonar que como se trata de fuerzas centrales, el momento angular es constante, y como tanto en perihelio como en afelio el vector posición y el vector velocidad son perpendiculares podemos establecer la relación

$$|\vec{L}_{afelio}|=|\vec{L}_{perihelio}|\Rightarrow m\cdot r_{afelio}\cdot v_{afelio}=m\cdot r_{perihelio}\cdot v_{perihelio}\Rightarrow\frac{r_{afelio}}{r_{perihelio}}=\frac{v_{perihelio}}{v_{afelio}}$$

Como $r_{afelio} > r_{perihelio} \rightarrow v_{perihelio} > v_{afelio}$
Respecto a la aceleración, al ser la única fuerza la gravitatoria y ser central, en módulo podemos $a=F/m=GM/r^2$, luego en los puntos donde r sea menor (perihelio), el módulo del vector aceleración será mayor.
Nota: Se podría intentar plantear que la aceleración es centrípeta $a=v^2/r$, pero en ese caso r no es el asociado a perihelio y afelio, sino el radio de curvatura, y para la elipse es el mismo en perihelio y afelio. En perihelio y afelio los vectores posición y velocidad son perpendiculares y toda la aceleración es realmente centrípeta, pero no es cierto en todos los puntos de una órbita no circular, donde la aceleración global tiene una componente tangencial a la trayectoria y otra normal, no solamente hay aceleración centrípeta. Con ese razonamiento, dado que v es mayor en perihelio que en afelio, también se llega a la misma conclusión de que es mayor la aceleración en perihelio que en afelio.
b) La expresión de la energía potencial $E_p=-GMm/R$ nos indica que a mayor distancia, el valor negativo es de módulo menor, lo que implica mayor energía potencial: tiene mayor energía potencial en el afelio.
La energía mecánica es constante ya que solamente actúan fuerzas conservativas, por lo que tiene el

mismo valor en perihelio y en afelio.
Nota: sería un error utilizar la expresión de que en una órbita $E_{mO}=1/2\cdot E_{pO}$, ya que eso solamente es cierto para órbitas circulares en las que la E_{pO} es constante.

A. Problema 1.-

a) $\acute{O}rbita\ circular\ F_g=F_c;\ \frac{GMm}{R_o^2}=\frac{mv^2}{R_o};v^2=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM}{R_o}}$

No se da en el enunciado los valores de G ni de M, pero el valor de su producto podemos obtenerla del valor proporcionado de la gravedad en la superficie de la Tierra, ya que

$$g=G\frac{M}{R_{superficie}^2}\Rightarrow GM=g\cdot R_{superficie}^2=9{,}8\cdot(6{,}37\cdot 10^6)^2=3{,}9765\cdot 10^{14}\,m^3/s^2$$

El radio de la órbita $R_o=R_T+h=6{,}37\cdot 10^6+300\cdot 10^3=6{,}67\cdot 10^6$ m

Sustituyendo

$$v=\sqrt{\frac{3{,}9765\cdot 10^{14}}{6{,}67\cdot 10^6}}=7721\,m/s$$

Como la órbita es circular, toda la aceleración es centrípeta con dirección radial y sentido dirigido hacia el centro de la Tierra, y su módulo es $a=\frac{v^2}{R_o}=\frac{7721^2}{6{,}67\cdot 10^6}=8{,}94\,m/s^2$

El periodo de la órbita es $T=\frac{2\pi R_o}{v}=\frac{2\pi\cdot 6{,}67\cdot 10^6}{7721}=5428\,s$

b) El trabajo que hay que realizar, considerando solamente hay fuerzas conservativas, es la diferencia de energía mecánica entre las dos situaciones:

-En la superficie antes del lanzamiento: $E_c=0$, $E_p=-GMm/R_T$

No se da en el enunciado los valores de G ni de M, pero el valor de su producto podemos obtenerla del valor proporcionado de la gravedad en la superficie de la Tierra, ya que

$$g=G\frac{M}{R_{superficie}^2}\Rightarrow GM=g\cdot R_{superficie}^2=9{,}8\cdot(6{,}37\cdot 10^6)^2=3{,}9765\cdot 10^{14}\,m^3/s^2$$

Sustituyendo: $E_p=-3{,}9765\cdot 10^{14}\cdot 1000/6{,}37\cdot 10^6=-6{,}24\cdot 10^{10}$ J

-En la órbita, al ser órbita circular se puede llegar a la expresión $E_{mO}=1/2\cdot E_{pO}= -1/2\cdot GMm/R_o = -0{,}5\cdot 3{,}9765\cdot 10^{14}\cdot 1000/(6{,}37\cdot 10^6+300\cdot 10^3)=-2{,}98\cdot 10^{10}$ J

La diferencia de energía es el trabajo a realizar: $\Delta E_m=E_{mo}-E_{mT}=-2{,}98\cdot 10^{10}-(-6{,}24\cdot 10^{10})=3{,}26\cdot 10^{10}$ J