PROBLEMAS DE FÍSICA

TEMA 2   MOVIMIENTOS   CURSO 13-14

1) Un ciclista marcha por una región donde hay muchas subidas y bajadas. En las cuestas arriba lleva una velocidad constante de 5 km/h y en las cuestas abajo de 20 km/h. Calcular: 1) ¿Cuál es su velocidad media si las subidas y bajadas tienen la misma longitud? 2) ¿Cuál es su velocidad media si emplea el mismo tiempo en las subidas que en las bajadas? 3) ¿Cuál es su velocidad media si emplea doble tiempo en las subidas que en las bajadas?

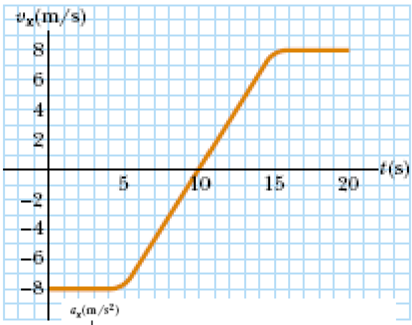
Sol: 8Km/h; 12,5Km/h; 10Km/h

2) Un acorazado se aleja de la costa, en la que hay un alto acantilado. A 680 m de la costa dispara un cañonazo; el eco es percibido 4,1 s después. Calcular la velocidad del acorazado. (Se supone para el sonido la velocidad de 340 m/s).

Sol: 8,20m/s

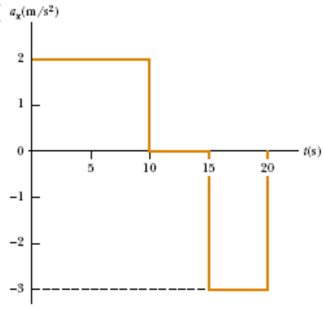
3) La velocidad de un punto que se mueve en trayectoria recta queda expresada en el SI por la ecuación: v = 40-8t. Para t = 2 s el punto dista del origen 80 m. Determinar: 1) La expresión general de la distancia al origen. 2) El espacio inicial. 3) La aceleración. 4) ¿En qué instante tiene el móvil velocidad nula? 5) ¿Cuánto dista del origen en tal instante? 6) Distancia al origen y espacio recorrido sobre la trayectoria a partir de t = 0, cuando t = 5 s, t = 7

$$\text{Sol}: \begin{array}{l} x = -4t^2 + 40t + 16m \\ x_0 = 16m; \quad a = -8m/s^2; t = 5s \\ (0,5) \rightarrow 16m \; y \; 100m \\ (0,7) \rightarrow 100m \; y \; 116m \end{array}$$



4) La grafica muestra la velocidad frente al tiempo para un objeto que se mueve en el eje x (a) Trazar una grafica de la aceleración frente al tiempo. (b) Determinar la aceleración media del objeto en los intervalos (5s, 15s) y (0s, 20s).

Sol: 1,6m/s^2 y 0,8m/s^2



5) Una partícula arranca del reposo y acelera como se ve en la gráfica. Determinar: (a) la velocidad de la partícula en t=10s y en t=20s (b) la distancia recorrida en los primeros 20s.

Sol:V=5m/s; e=262,5 m

6) Una estudiante lanza un llavero verticalmente hacia arriba a su hermana que esta en una ventana 4 m arriba. Las llaves son atrapadas 1,5 s después por el brazo extendido de la hermana. (a) ¿Con qué velocidad inicial fueron lanzadas las llaves? (b) ¿Cuál era la velocidad de las llaves justo antes de ser atrapadas?

Sol: v_0=10m/s; v=-4,7m/s

7) El vector aceleración de una partícula en movimiento viene expresado en el SI: $\vec{a}$ = 6t $\vec{i}$ - 2$\vec{k}$, inicialmente la partícula se encuentra en P_0 (1, 3, -2) m y transcurridos 3 s su velocidad es: $\vec{v}$ = 3 $\vec{i}$ + 2. $\vec{j}$ - 6 $\vec{k}$ m/s. Calcúlese el vector velocidad y el vector de posición en cualquier instante

$$\text{Sol:} \begin{array}{l} \vec{v} = (3t^2+3)\vec{i} + 2\vec{j} - (2t+6)\vec{k} \; m/s \\ \vec{r} = (t^3+t+1)\vec{i} + (2t+3)\vec{j} - (t^2+6t+2)\vec{k} \; m \end{array}$$

8) Una partícula describe una trayectoria curva $y^2=4x$ con x e y medidas en metros. La componente x de la aceleración es cte e igual a $8 m/s^2$ y en el instante inicial la partícula está en el origen de coordenadas. Calcular: (a) Los vectores de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo (b) los vectores aceleración normal y aceleración tangencial para t=1s (c) Dibujar la trayectoria de la partícula.

$$\vec{r} = 4t^2\vec{i} + 4t\vec{j}\ m$$

$$\vec{v} = 8t\vec{i} + 4\vec{j}\ m/s$$

Sol: $\vec{a} = 8\vec{i}\ m/s^2$

$$\vec{a}_t = \frac{32}{17}(4\vec{i} + \vec{j}) m/s^2$$

$$\vec{a}_N = (8 - \frac{32}{17}4)\vec{i} - \frac{32}{17}\vec{j} m/s^2$$

9) Una partícula se mueve en trayectoria circular de radio 1 m. La partícula, inicialmente en reposo es acelerada con $\alpha = 12t^2 - 6t - 4$ (SI). Determinar: (1) La posición angular de la partícula en función del tiempo.(2) Los módulos de las componentes intrínsecas del vector aceleración. (3) Espacio recorrido sobre la trayectoria a los 2,3 s de iniciado el movimiento

$$\theta = t^4 - t^3 - 2t^2 rad$$

Sol:
$$a_t = 12t^2 - 6t + 4 m/s^2$$

$$a_N = 4t^3 - 3t^2 + 4t\ m/s^2$$

$$11m$$

10) El patio de juegos de una escuela, está en el techo plano del edificio, a 6 m por encima del nivel de la calle. Una barandilla de protección de 1 m de alto rodea el patio. Una pelota ha caído a la calle, y un transeúnte chuta la pelota para devolverla, con un ángulo de 53sobre la horizontal en un punto a 24 metros de la base de la pared del edificio. La pelota tarda 2.2 s. en llegar a un punto verticalmente por encima de la barandilla. Calcular: (a) La velocidad con la que fue lanzada la pelota. (b)La distancia vertical con la que la pelota rebasa la barandilla. (c) ¿A qué distancia horizontal desde la pared del edificio impacta la pelota con el patio? (d) ¿Cuál es el ángulo que forma la velocidad de la pelota con la vertical en el momento del impacto?

Sol: v_0=18,12 m/s; h=1,124 m; x=27,8 m; φ=-46º

11) Un patinador desciende por una pista helada, alcanzando al finalizar la pista una velocidad de 45 m/s. En una competición de salto, debería alcanzar 90 m a lo largo de una pista inclinada 60º respecto de la horizontal. (a)¿Cuál será el ángulo (o los ángulos) a que debe formar su vector velocidad inicial con la horizontal?, (b) Si salta con el mayor de los ángulos obtenidos ¿ cuánto tiempo tarda en aterrizar?, (c) Calcular y dibujar las componentes tangencial y normal de la aceleración en el instante t /2. Siendo t el tiempo de vuelo. Tomar g =10 m/s^2

Sol: α_1=84,5º y α_2=-54,5º; El tiempo t=10,45s; $a_t=5(3)^{1/2}$ m/s^2 y a_N=5 m/s^2

Un ciclista marcha por una región donde hay muchas subidas y bajadas. En las cuestas arriba lleva una velocidad constante de 5 km/h y en las cuestas abajo 20 km/h. Calcular:

(1) ¿Cuál es su velocidad media si las subidas y bajadas tienen la misma longitud?

Sea d la longitud de la subida y bajada.

El tiempo que tarda en subir es:

$$t_{subida} = \frac{d}{v_{subida}}$$

El tiempo que tarda en bajar es:

$$t_{bajar} = \frac{d}{v_{bajada}}$$

El tiempo total:

$$t = t_{subida} + t_{bajada} = d \cdot \left(\frac{1}{v_{subida}} + \frac{1}{v_{bajada}} \right)$$

Y la velocidad media.

$$\bar{v} = \frac{2d}{t} = \frac{2\cancel{d}}{\cancel{d}\left(\frac{1}{v_{subida}} + \frac{1}{v_{bajada}} \right)} = \frac{2\, v_{subida}\, v_{bajada}}{v_{subida} + v_{bajada}}$$

$$= \frac{2 \cdot 5 \cdot 20}{(20 + 5)}\ km/h = \frac{200}{25}\ km/h = 8\ km/h$$

(2) ¿Cuál es su velocidad media si emplea el mismo tiempo en las subidas y en las bajadas?

Si el tiempo empleado en las subidas y bajadas es el mismo, entonces la distancia de subida y bajada difieren:

$$d_{subida} = v_{subida} \cdot t \qquad d_{bajada} = v_{bajada} \cdot t$$

Y la velocidad media.

$$\bar{v} = \frac{d_{subida} + d_{bajada}}{2t} = \frac{(v_{subida} + v_{bajada})\cancel{t}}{2\cancel{t}} = 12{,}5\ km/h$$

¿Cuál es su velocidad media si emplea doble tiempo en las subidas que en las bajadas?

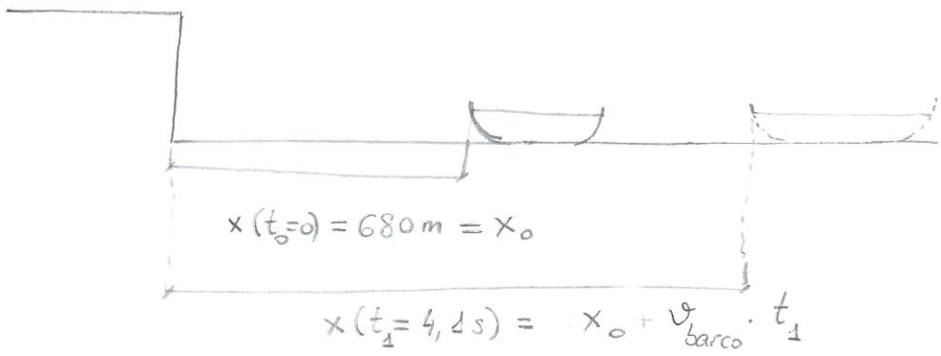
tiempo total = tiempo subidas + tiempo bajadas = 3 tiempo bajadas. $\equiv 3t$

$$d_{subida} = v_{subida}\, t_{subida} = v_{subida}\, 2t_{bajada} = 2v_{subida}\, t$$

$$d_{bajada} = v_{bajada}\, t_{bajada} = v_{bajada}\, t$$

$$\bar{v} = \frac{d_{subida} + d_{bajada}}{t_{subida} + t_{bajada}} = \frac{(2v_{subida} + v_{bajada})\cancel{t}}{3\cancel{t}} = 10 \text{ km/h}.$$

Un acorazado se aleja de la costa en la que hay un acantilado. A 680 m de la costa dispara un cañonazo. El eco es percibido 4,1 s después. Calcular la velocidad del acorazado (Se supone que para el sonido la velocidad es de 340 m/s)



Distancia recorrida por el sonido:

$$d_{sonido} = x_0 + \left[x_0 + v_{barco} \cdot t_1 \right]$$

Y el sonido recorre esta distancia a una velocidad de 340 m/s en $t_1 = 4,1$ s, luego

$$d_{sonido} = v_{sonido} \cdot t_1$$

$$2x_0 + v_{barco} \cdot t_1 = v_{sonido} \cdot t_1$$

$$v_{barco} = \frac{v_{sonido} \cdot t_1 - 2x_0}{t_1} = \frac{340 \cdot 4,1 - 2 \cdot 680}{4,1} s = 8,3 \text{ m/s}$$

La velocidad de un punto que se mueve en trayectoria recta queda expresada en el SI por la ecuación $v = 40 - 8t$. Para $t = 2s$ el punto dista del origen 80 m. Determinar:

(1) La expresión general de la distancia al origen.

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow x(t) = \int v(t)\,dt = \int (40-8t)\,dt = 40t - 8\frac{t^2}{2} + C$$

Para conocer la constante de integración hacemos uso de las condiciones de contorno:

$$x(t=2) = 40\cdot 2 - 4\cdot 2^2 + C = 80 - 16 + C = 80 \text{ m}$$

$$\Rightarrow C = 16$$

$$\boxed{x(t) = 16 + 40t - 4t^2 \quad (m)}$$

(2) El espacio inicial:

$$x(t=0) = 16 \text{ m}$$

(3) La aceleración:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -8 \text{ m/s}^2$$

(4) ¿En qué instante tiene el móvil velocidad nula?

$$v = 0 \Rightarrow 40 - 8t = 0 \Rightarrow t = 5s$$

(5) ¿Cuánto dista del origen en tal instante?

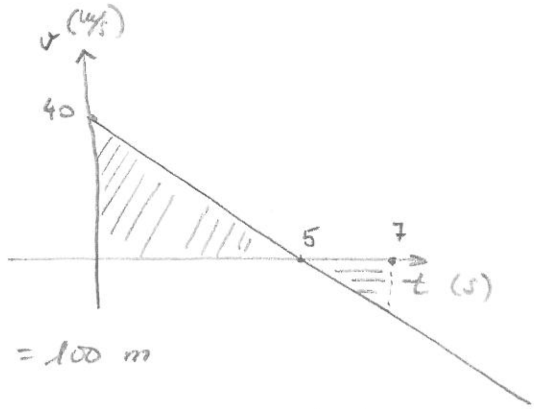
$$x(t=5) = 16 + 40\cdot 5 - 4\cdot 5^2 = 16 + 200 - 100 = 116 \text{ m}$$

(6) Distancia al origen y espacio recorrido sobre la trayectoria a partir de $t=0$, cuando $t = 5s$ y $t = 7s$.

$$x(t=5) = 116 \text{ m}$$

$$x(t=7) = 16 + 40\cdot 7 - 4\cdot 7^2 = 16 + 280 - 4\cdot 49 = 100 \text{ m}$$

Cálculo de camino sobre la trayectoria a partir de $t=0$.



El móvil cambia el sentido de su velocidad para $t=5s$.

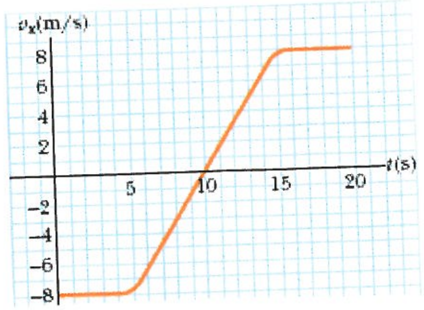
El recorrido en los primeros 5s es:

$$C = x(t=5) - x(t=0) = 116 - 16 = 100 \text{ m}$$

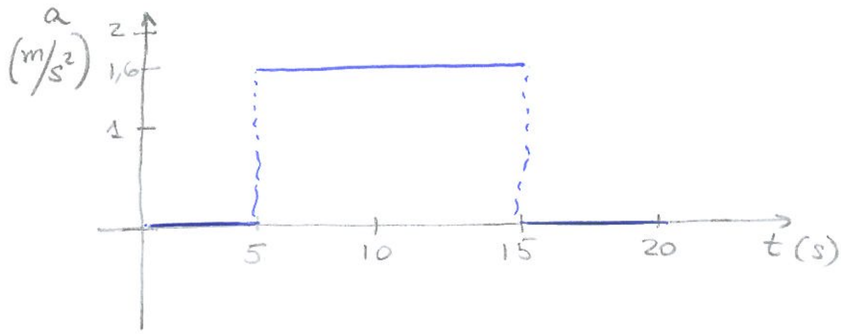
A ello hay que sumar el recorrido de los segundos restantes que se obtienen de la integral de la ecuación general de la velocidad, en valor absoluto, entre los límites $t=5s$ y $t=7s$

$$C_7 = 100 + \left| \int_5^7 (40-8t)\,dt \right| = 116 \text{ m}$$

La gráfica muestra la velocidad frente al tiempo para un objeto que se mueve en el eje x. (a) Trazar una gráfica de la aceleración frente al tiempo. (b) Determinar la aceleración media del objeto en los intervalos (5s, 15s) y (0s, 20s).



(a)



(b)

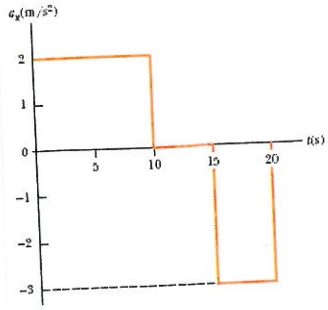
$$\bar{a}_{5-15} = \frac{\Delta v_{5-15}}{\Delta t} = \frac{v(t=15) - v(t=5)}{15 - 5} = \frac{0,8 - (-0,8)}{10}\ m/s^2 = 1,6\ m/s^2$$

$$\bar{a}_{0-20} = \frac{\Delta v_{0-20}}{\Delta t} = \frac{v(t=20) - v(t=0)}{20 - 0} = \frac{0,8 - (-0,8)}{20}\ m/s^2 = 0,8\ m/s^2$$

Una partícula arranca del reposo y acelera como se ve en la figura.

Determinar: (a) la velocidad de la partícula en $t = 10s$ y en $t = 20s$

(b) la distancia recorrida en los primeros 20s.



- $0 \le t < 10$

En la primera parte del movimiento la partícula sigue un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. con $a = 2 m/s^2$.

Luego

$$v(t=10s) = v_0 + at = 0 + 2 \cdot 10 \ (m/s) = \underline{\underline{20 \ m/s}}$$

$$x_1(t=10s) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^2 \ m = 100 \ m$$

- $10 < t < 15$

En la segunda parte del movimiento la partícula sigue un movimiento rectilíneo uniforme. Luego.

$$v(t) = v(t=10s) = 20 \ m/s$$

$$x(t=15s) = x(t=10s) + v \cdot t = 100 + 20 \cdot 5 = 200 \ m$$

- $15 < t < 20$

En la tercera parte del movimiento la partícula sigue un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado con $a = -3 \ m/s^2$. Luego.

$$v(t=20s) = v(t=15s) + a \cdot t = 20 - 3 \cdot 5 = \underline{\underline{5 \ m/s}}$$

$$x_3 = x(t=15s) + v(t=15s) \cdot t + \frac{1}{2} a t^2 = 200 + 20 \cdot 5 - \frac{1}{2} 3 \cdot 5^2 = \underline{262,5 \ m}$$

Una estudiante lanza un llavero verticalmente hacia arriba a su hermana que está en una ventana 4 m más arriba. Las llaves son atrapadas 1,5 s después por el brazo extendido de la hermana.

(a) ¿Con qué velocidad inicial fueron lanzadas las llaves?

(b) ¿Cuál era la velocidad de las llaves justo antes de ser atrapadas?

El movimiento de las llaves es rectilíneo uniformemente acelerado, con aceleración $-g$. (si tomamos el eje y creciendo hacia arriba)

Por lo tanto.

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= 0 \\ y_f &= 4\,m \\ a &= -g \\ t &= 1,5\,s \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y_f &= y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ &= y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad v_0 = \frac{(y_f - y_0) + \frac{1}{2} g t^2}{t} = \frac{4 + \frac{1}{2} 9,8 \cdot (1,5)^2}{1,5} \; m/s$$

$$\boxed{v_0 = 10 \; m/s}$$

$$\boxed{v(t = 1,5\,s) = v_0 - gt = (10 - 9,8 \cdot 1,5)\; m/s = -4,7\; m/s}$$

El vector aceleración de una partícula en movimiento viene expresado por $\vec{a} = 6t\,\vec{i} - 2\vec{k}$ (SI). Inicialmente la partícula se encuentra en $P_0(1, 3, -2)$ m y transcurridos 3s su velocidad es $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$ m/s. Calcúlese el vector velocidad y el vector posición en cualquier instante.

Por definición:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \int \vec{a}\, dt$$

$$\vec{v} = \int \vec{a}\, dt = \int (6t\,\vec{i} - 2\vec{k})\, dt = \frac{6t^2}{2}\,\vec{i} - 2t\,\vec{k} + \vec{c}$$

Para conocer la constante de integración, recurrimos a las condiciones de contorno:

$$\vec{v}(t = 3s) = \frac{6\cdot(3)^2}{2}\,\vec{i} - 2\cdot 3\,\vec{k} + \vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad 27\,\vec{i} - \cancel{6\vec{k}} + \vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \cancel{6\vec{k}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{c} = -24\,\vec{i} + 2\vec{j}$$

Y por lo tanto:

$$\vec{v} = (3t^2 - 24)\,\vec{i} + 2\vec{j} - 2t\,\vec{k} \quad (\text{m/s})$$

— o — o —

Para conocer la posición:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{r} = \int \vec{v}\, dt$$

$$\vec{r} = \int \vec{v}\, dt = \int \left[(3t^2 - 24)\,\vec{i} + 2\vec{j} - 2t\,\vec{k}\right] dt = (t^3 - 24t)\,\vec{i} + 2t\,\vec{j} - t^2\,\vec{k} + \vec{c}_2$$

$$\vec{r}(t=0) = \vec{c}_2 = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$$

Luego:

$$\vec{r} = (t^3 - 24t + 1)\,\vec{i} + (2t + 3)\,\vec{j} - (t^2 + 2)\,\vec{k}$$

Una partícula describe una trayectoria curva $y^2 = 4x$ con x e y medidas en m. La componente x de la aceleración es constante e igual a $8\, m/s^2$ y en el instante inicial la partícula está en el origen de coordenadas. Calcular:

(a) los vectores de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 8\ m/s^2$$

$$\Rightarrow dv_x = a\, dt \quad ;; \quad \int dv_x = \int a\, dt \Rightarrow v_x = 8t + C_1 \quad (m/s)$$

Podemos conocer la constante de integración C_1 a partir de las condiciones iniciales. Sabemos que la velocidad es tangente a la trayectoria. En $t=0$ la partícula está en el origen y allí la tangente a la trayectoria apunta en la dirección y. No hay componente según x luego $C_1 = 0$. Si integramos una segunda vez

$$\Rightarrow dx = v_x\, dt \quad ;; \quad x = \int v_x\, dt = \int (8t + c)\, dt = 4t^2 + C_1 t + C_2$$

En el instante inicial la partícula está en el origen de coordenadas, luego

$$x(t=0) = C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = 4t^2$$

Conocida la componente x, podemos conocer la componente y:

$$y^2 = 4x \Rightarrow y^2 = 16t^2 \Rightarrow y = 4t$$

Luego la posición como función del tiempo toma el valor:

$$\vec{r}(t) = 4t^2\, \vec{i} + 4t\, \vec{j} \quad (m)$$

$$\vec{v}(t) = 8t\, \vec{i} + 4\, \vec{j} \quad (m/s)$$

$$\vec{a}(t) = 8\, \vec{i} \quad (m/s^2)$$

(b) los vectores aceleración normal y aceleración tangencial para $t = 1\, s$.

La aceleración tangencial viene dada por:

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d}{dt}\left((64t^2+16)^{1/2}\right) = \frac{1}{2}\ \frac{128t}{(64t^2+16)^{1/2}}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{64t^2+16}$$

Para $t = 1$, el módulo de la aceleración tangencial es,

$$a_t (t = 1\ s) = \frac{1}{2} \frac{128}{\sqrt{64+16}} = \frac{64}{\sqrt{80}} = \frac{64}{4\sqrt{5}} = \frac{16}{\sqrt{5}}\ m/s^2$$

Su dirección y sentido vienen marcados por el vector velocidad unitario:

$$\vec{a}_t = |\vec{a}_t| \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

En $t = 1$ s,

$$\vec{a}_t (t=1\ s) = \frac{16}{\sqrt{5}} \cdot \frac{8\vec{i}+4\vec{j}}{\sqrt{64+16}} = \frac{16}{\sqrt{5}} \cdot \frac{(8\vec{i}+4\vec{j})}{\sqrt{5}\cdot 4} = \frac{16}{5} (2\vec{i}+\vec{j})\ m/s^2$$

La aceleración radial podemos calcularla a partir de:

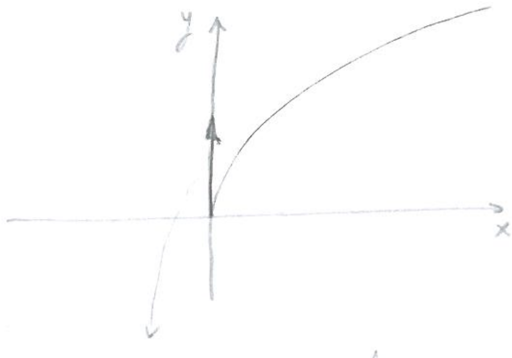
$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r \Rightarrow \vec{a}_r = \vec{a} - \vec{a}_t$$

$$\Rightarrow \vec{a}_r = 8\vec{i} - \frac{16}{5} \cdot 2\vec{i} - \frac{16}{5}\vec{j}$$

$$= \frac{8}{5}\vec{i} - \frac{16}{5}\vec{j}$$

(c) Dibujar la trayectoria de la partícula:

$y^2 = 4x \Rightarrow y = \sqrt{4x} = 2\sqrt{x}$



$\vec{v}$ en $t=0$, no hay componente en la dirección x.

Una partícula se mueve en una trayectoria circular de radio 1 m. La partícula, inicialmente en reposo es acelerada con $\alpha = 12t^2 - 6t - 4$ (SI). Determinar

(1) la posición angular de la partícula en función del tiempo.

Por definición de aceleración angular:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \alpha\, dt$$

$$\omega = \int d\omega = \int \alpha\, dt = \int (12t^2 - 6t - 4)\, dt = 4t^3 - 3t^2 - 4t + C$$

Para conocer la constante de integración usamos las condiciones iniciales:

$$\omega(t=0) = C = 0.$$

Luego

$$\omega(t) = 4t^3 - 3t^2 - 4t$$

Por definición de velocidad angular

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega\, dt$$

$$\theta = \int d\theta = \int \omega\, dt = \int (4t^3 - 3t^2 - 4t)\, dt$$

$$= t^4 - t^3 - 2t^2 + C_2$$

Si suponemos que la partícula está inicialmente sobre el eje utilizado para medir los ángulos:

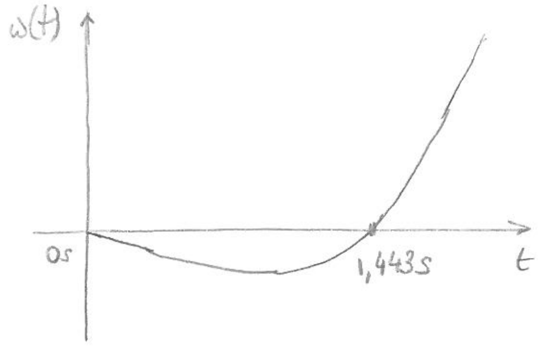
$$\boxed{\theta(t) = t^4 - t^3 - 2t^2}$$

(2) los módulos de las componentes intrínsecas del vector aceleración.

$$a_t = \alpha \cdot R = 12t^2 - 6t - 4 \quad ;; \quad a_n = \omega^2 \cdot R = (4t^3 - 3t^2 - 4t)^2$$

(3) espacio recorrido sobre la trayectoria a los 2,3 s de iniciado el movimiento

Para calcular el espacio recorrido, primero dibujamos la figura de la velocidad angular frente al tiempo.



La velocidad angular se anula en

$$\omega(t) = 4t^3 - 3t^2 - 4t = t\cdot(4t^2 - 3t - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_0 = 0 \\ t_1 = 1,443\ s \\ \cancel{t_2 = -0,69\ s} \text{ (no sentido físico)} \end{cases}$$

Entre $t_0 = 0$ y $t_1 = 1,443\ s$ la partícula se mueve por la trayectoria en el sentido de las agujas del reloj (velocidad angular negativa), y en ese tiempo barre un ángulo de

$$\varphi_1 = \varphi(t_1 = 1,443\ s) = -2,84\ rad$$

lo que corresponde con una distancia de

$$s_1 = |\varphi_1|\cdot R = +2,84\ m$$

Entre $t_1 = 1,443\ s$ y $t_2 = 2,3\ s$ la partícula se mueve por la trayectoria en el sentido antihorario (velocidad angular positiva), y en ese tiempo barre un ángulo

$$\varphi_2(t_2 = 2,3\ s) - \varphi_1(t_1 = 1,443\ s) = 5,24\ rad - (-2,84\ rad) = 8,08\ rad.$$

lo que se corresponde con una distancia de

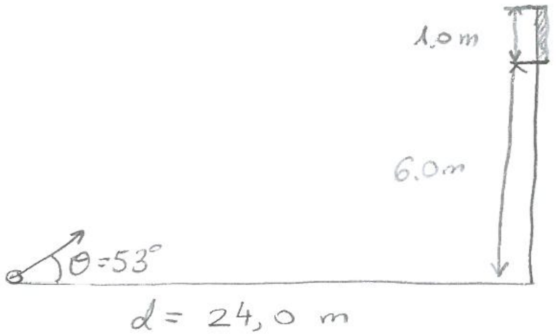
$$s_2 = [\varphi_2 - \varphi_1]\ R = 8,08\ m$$

La distancia total recorrida es

$$\underline{\underline{s}} = s_1 + s_2 = 8,08 + 2,84 = \underline{\underline{10,92\ m}}$$

El patio de juegos de una escuela está en el techo de un edificio, a 6 m por encima del nivel de la calle. Una barandilla de protección de 1 m de alto rodea el patio. Una pelota ha caído en la calle y un transeúnte chuta la pelota para devolverla con un ángulo de 53° sobre la horizontal en un punto a 24 m de la base de la pared del edificio. La pelota tarda 2,2 s en llegar a un punto verticalmente por encima de la barandilla. Calcular:

(a) la velocidad con la que fue lanzada la pelota.



En el eje horizontal, el movimiento es rectilíneo y uniforme con velocidad

$$v_x = |\vec{v}_i| \cdot \cos\theta$$

Si tarda un tiempo $t = 2{,}2\,s$ en recorrer una distancia $d = 24\,m$ entonces:

$$d = v_x \cdot t = |\vec{v}_i| \cos\theta \cdot t$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{v}_i| = \frac{d}{\cos\theta \cdot t} = \frac{24{,}0}{2{,}2 \cdot \cos 53°} \,m/s = 18{,}13\,m/s$$

(b) la distancia vertical con la que la pelota rebasa la barandilla

En el eje vertical el movimiento es rectilíneo uniformemente acelerado, con $v_{oy} = |\vec{v}_i| \cdot \text{sen}\,\theta$ y $a_y = -g$.

Después de $t = 2{,}2\,s$, la altura de la pelota será:

$$y = \cancel{y_o}^{\,0} + v_{oy}\,t - \frac{1}{2} g t^2 = |\vec{v}_i| \cdot \text{sen}\,\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = 8{,}13\ m$$

Luego la pelota rebasará la valla por 1,13 m

(c) ¿A qué distancia horizontal desde la pared del edificio impacta la pelota en el patio?

El tiempo de vuelo de la pelota se puede calcular teniendo en cuenta que la altura final es de $y_f = 6.0$ m.

$$y_f = \cancel{y_0} + v_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\frac{1}{2} g t^2 - |\vec{v}_i| \cdot \operatorname{sen}\theta \, t + y_f = 0$$

$$t = \frac{|\vec{v}_i| \cdot \operatorname{sen}\theta \pm \sqrt{|\vec{v}_i|^2 \operatorname{sen}^2\theta - 2 g y_f}}{g} =$$

$$= \frac{18,13 \cdot \operatorname{sen} 53 \pm \sqrt{(18,13)^2 \cdot \operatorname{sen}^2 53 - 2 \cdot 9,8 \cdot 6}}{9,8}$$

$$= \frac{14.47 \pm 9,59}{9,8} = \begin{cases} t_1 = 2,45 s \\ t_2 = \cancel{0,49} s \end{cases}$$

no tiene sentido físico (tarda 2,2 s en llegar hasta la vertical de la valla).

En ese tiempo recorre en el eje x:

$$x(t = 2,45 s) = v_x \cdot t = |\vec{v}_i| \cos\theta \cdot t = 26,73 m$$

Luego llega al suelo a 2,73 m de la pared del edificio.

(d) ¿Cuál es el ángulo que forma la velocidad de la pelota con la vertical en el momento del impacto?

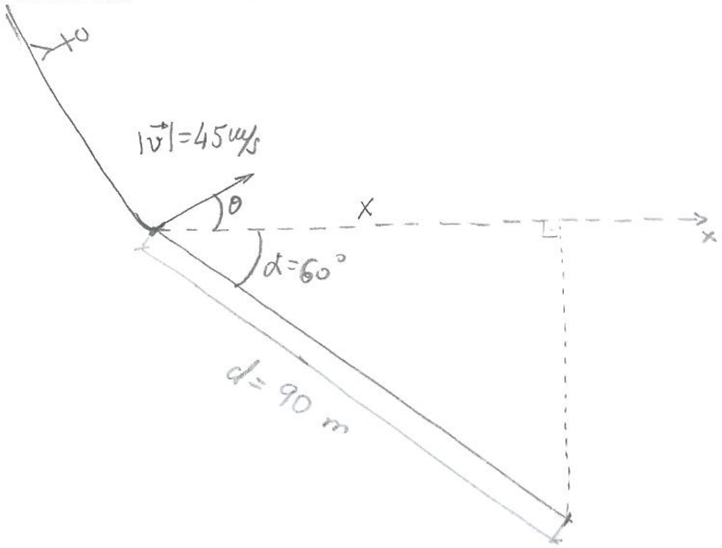
$$v_y (t = 2,45 s) = v_{oy} - gt = |\vec{v}_i| \cdot \operatorname{sen}\theta - gt = -9,53 \, m/s$$

$$v_x (t = 2,45 s) = v_{ox} = |\vec{v}_i| \cos\theta = 10,91 \, m/s$$

$$\theta_{final} = \arctan \frac{v_y}{v_x} = -41.13°$$

Un patinador desciende por una pista helada alcanzando al finalizar la pista una velocidad de 45 m/s. En una competición de salto debería alcanzar 90 m a lo largo de una pista inclinada 60° con respecto a la horizontal.

(a) ¿Cual sería el ángulo o los ángulos que debe formar su vector velocidad inicial con la horizontal?



Para alcanzar 90 m en una pista inclinada 60° con respecto a la horizontal, la distancia x que tiene que recorrer el objeto en la horizontal es

$$x = d\cos\alpha$$

y la distancia y (tomando el sentido positivo hacia abajo:

$$y = d\cdot\operatorname{sen}\alpha$$

La velocidad inicial del patinador viene dada por

$$v_{ox} = |\vec{v}_i|\cos\theta$$

$$v_{oy} = -|\vec{v}_i|\operatorname{sen}\theta$$ (si tomamos que el eje y crece hacia abajo) v_{oy} es negativa

Y por lo tanto el tiempo de vuelo del patinador es

$$x = v_{ox}\,t = |\vec{v}_i|\cos\theta\cdot t = d\cdot\cos\alpha \Rightarrow t = \frac{d\cos\alpha}{|\vec{v}_i|\cdot\cos\theta}$$

En ese tiempo, el desplazamiento a lo largo de y es:

$$y = v_{oy}t + \frac{1}{2}gt^2 = -\frac{\cancel{|\vec{v}_i|}\operatorname{sen}\theta}{\cancel{|\vec{v}_i|}\cos\theta}\cancel{d}\cos\alpha + \frac{1}{2}g\frac{d^2\cos^2\alpha}{|\vec{v}_i|^2\cos^2\theta} = \cancel{d}\operatorname{sen}\alpha$$

$$-\cos\alpha \cdot tg\theta + \frac{d\cos^2\alpha}{2\,|\vec{v}_i|^2} g \frac{1}{\cos^2\theta} - sen\,\alpha = 0$$

Empleamos la relación trigonométrica

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + tg^2\theta$$

$$-\cos\alpha \cdot tg\theta + \frac{d\cos^2\alpha}{2\,|\vec{v}_i|^2} g\, tg^2\theta + \frac{d\cos^2\alpha}{2\,|\vec{v}_i|^2} g - sen\,\alpha = 0$$

$$tg^2\theta - \frac{2|\vec{v}_i|^2}{g\,d\,\cos\alpha} tg\theta + 1 - \frac{2\,|\vec{v}_i|^2 sen\,\alpha}{d\,g\,\cos^2\alpha} = 0$$

Sustituyendo los datos del problema. (tomamos $g = 10\ m/s^2$)

$d = 90\ m$

$\alpha = 60^\circ$

$|\vec{v}_i| = 45\ m/s$

$$tg^2\theta - \frac{2\cdot 45^2}{90\cdot 10\cdot \frac{1}{2}} tg\theta + 1 - \frac{2\cdot 45^2\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{90\cdot 10\cdot \frac{1}{2}} = 0$$

$$tg^2\theta - 9\,tg\theta + 1 - 9\sqrt{3} = 0$$

$$tg\theta = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4\cdot(1-9\sqrt{3})}}{2} \Rightarrow$$

$tg\,\theta_1 = 10.40 \Rightarrow \underline{\theta_1 = 84,5^\circ}$

$tg\,\theta_2 = -1,40 \Rightarrow \underline{\theta_2 = -54,2^\circ}$

(b) Si salta con el mayor de los ángulos obtenidos, ¿cuánto tiempo tarda en aterrizar?

El tiempo de vuelo es $t = \frac{d\cdot\cos\alpha}{|\vec{v}_i|\,\cos\theta} = \frac{90\cdot\frac{1}{2}}{45\cdot\cos 84,5} = 10,45\,s$

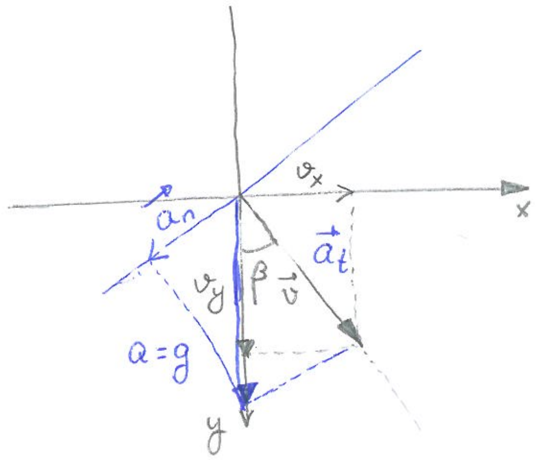
(c) Calcular y dibujar las componentes tangencial y normal de la aceleración en el instante $t/2$, siendo t el tiempo de vuelo.

Para $t = t/2$

$v_x = v_{ox} = |\vec{v}_i|\cos\theta = 4,31\ m/s$ $\qquad a_x = 0$

$v_y = v_{oy} + g\,t/2 = -|\vec{v}_i|\,sen\theta + g\cdot t/2 = \cdot 7,46\ m/s$ $\qquad a_y = 10\ m/s^2$

Luego en el instante $t = \frac{t}{2}$ la velocidad forma un ángulo β con el eje vertical



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_x}{v_y} = \frac{4{,}31}{7{,}46} \Rightarrow \beta = 30^\circ$$

La componente tangencial de la aceleración lleva la dirección de la velocidad,

$$a_t = |\vec{a}| \cdot \cos\beta = 10 \cdot \cos 30 = 5\sqrt{3} \ m/s^2$$

$$a_n = |\vec{a}| \cdot \operatorname{sen}\beta = 10 \cdot \operatorname{sen} 30 = 5 \ m/s^2$$