PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

1 La suma del perímetro de un cuadrado de lado a cm, y de la circunferencia de un círculo de radio r cm es de 240 cm. ¿Cuál es el valor de r si la suma de las áreas ha de ser mínima?

2 Un pastor dispone de 1.000 m de tela metálica para construir una cerca rectangular aprovechando una pared ya existente. ¿Podrías indicarle las dimensiones para que el corral sea lo mayor posible?

3 ¿Cuál es el número que sumado con 25 veces su inverso da un valor mínimo? ¿Cuál es este valor?

4 ¿Qué medidas tiene el triángulo rectángulo de máxima área entre todos los que tienen 10 cm de hipotenusa?

5 Dos números no negativos son tales que sumando el primero al cuadrado del segundo resulte 9. Halle estos números de manera que su suma sea tan grande como sea posible

6 Halla dos números que sumen 20 y su producto sea máximo.

7 Los barriles que se utilizan para almacenar petróleo tienen forma cilíndrica con una capacidad de 160 litros. Halla las dimensiones del cilindro para que la cantidad de chapa empleada en su construcción sea mínima.

8 A un placa de vidrio rectangular de 15 cm de largo y 10 cm de ancho se le ha roto en una esquina un pedazo triangular de tal modo que la longitud ha disminuido en 5cm y la anchura en 3cm. Queremos aprovechar el vidrio de manera que forme una nueva placa rectangular. ¿Cómo debemos hacer los cortes si queremos que tenga la mayor superficie posible?

9 Dada una lámina rectangular de tamaño 2m x 1m estudio cómo deberíamos cortar sus cuatro esquinas de manera que se pueda formar con ella una caja abierta de volumen máximo

10 Estudia qué puntos de la curva $y^2 = 4x$ son los más cercanos al punto (4, 0)

11 Dos líneas férreas se cortan perpendicularmente. Por cada línea avanza una locomotora, una a 60 km/h y la otra a 120 km/h. Ambas se dirigen hacia el punto de corte y han salido al mismo tiempo desde dos estaciones situadas respectivamente a 40km y 30 km del punto de intersección.
a) Halla la distancia a la que se encuentran las locomotoras, en función del tiempo transcurrido desde el inicio del recorrido.
b) Halla el mínimo de esta distancia.

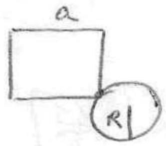
12 Se dibuja un rectángulo cuyos vértices inferiores se encuentran en el eje OX y cuyos vértices superiores se encuentran en la curva $y = sen x$, siendo $0 \le x \le \pi$
a) Escriba una expresión para el área del rectángulo
b) Halle el área máxima del rectángulo

13 Una hoja de papel debe contener 18 cm2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm. cada uno, y los laterales 1 cm. Halla las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

14 Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio.

15 Entre todos los rectángulos de perímetro 12 cm. ¿cuál es el que tiene la diagonal menor?

①



$$4a+2\pi R=240 \Rightarrow a = 60 - \frac{\pi R}{2}$$

$$S = a^2+\pi R^2 = \left(60-\frac{\pi R}{2}\right)^2 + \pi R^2 = 3600 - 60\pi R + \frac{\pi^2 R^2}{4} + \pi R^2 =$$
$$= \frac{\pi}{4}(\pi+4)R^2 - 60\pi R + 3600$$

$$S' = \frac{\pi}{2}(\pi+4)R - 60\pi$$

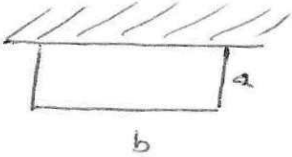
$$S'=0 \Rightarrow R = \frac{60\pi}{\frac{\pi}{2}(\pi+4)} = \frac{120}{\pi+4}$$

$- \quad 30/\pi+1 \quad +$

signo S'

$\boxed{\text{Mínima área para } R = \frac{120}{\pi+4}}$

②



$$2a+b=1000 \Rightarrow b = 1000-2a$$

$$A = ab = a(1000-2a) = 1000a - 2a^2$$

$$A' = 1000-4a$$

$$A'=0 \Rightarrow \boxed{a = 250\text{ m} \Rightarrow b = 500\text{ m}}$$

$+ \quad 250 \quad -$

signo A'

$\boxed{\text{Máxima Área para } a=250\text{ m},\ b=500\text{ m}}$

③

$$S = x + \frac{25}{x}$$

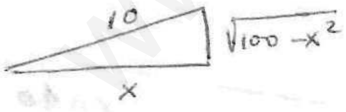
$$S' = 1 - \frac{25}{x^2} \qquad S'=0 \Rightarrow x = \pm 5$$

$+ \quad -5 \quad - \quad - \quad 5 \quad +$

signo S'

$\boxed{\text{Mínima suma para } x=5}$

④



$$A = \frac{x\sqrt{100-x^2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{100x^2-x^4}$$

$$A' = \frac{1}{2}\cdot\frac{200x-4x^3}{2\sqrt{100x^2-x^4}} = \frac{50x-x^3}{\sqrt{100x^2-x^4}} = \frac{x(50-x^2)}{x\sqrt{100-x^2}} = \frac{50-x^2}{\sqrt{100-x^2}}$$

$$A'=0 \Rightarrow x = \cancel{\pm}\sqrt{50}$$

$0 \quad + \quad \sqrt{50} \quad -$

signo A'

$\boxed{\text{Máxima Área para } x=\sqrt{50},\ \sqrt{100-x^2}=\sqrt{50}}$

(5) $a+b^2=9 \Rightarrow a=9-b^2$

$S=a+b=9-b^2+b$

$S'=-2b+1 \qquad S'=0 \Rightarrow \boxed{b=\frac{1}{2}} \Rightarrow a=9-\frac{1}{4}=\boxed{\frac{35}{4}}$

+	1/2	−

signo S'

Máximo para $b=1/2$, $a=35/4$

(6) $P=x\cdot(20-x)=20x-x^2$

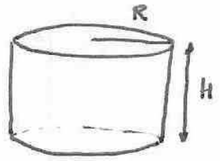
$P'=20-2x \qquad P'=0 \Rightarrow x=10$

+	10	−

signo P'

Máximo producto para $x=10$, $20-x=10$

(7)



$V=160\,l=160\ dm^3$

$\pi R^2 H=160 \longrightarrow H=\frac{160}{\pi R^2}$

$S=2\cdot\pi R^2+2\pi RH=2\pi R^2+2\pi R\frac{160}{\pi R^2}=2\pi R^2+\frac{320}{R}$

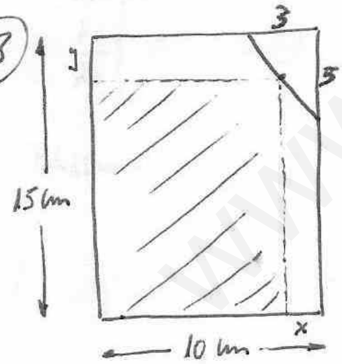
$\frac{dS}{dR}=4\pi R-\frac{320}{R^2}=\frac{4\pi R^3-320}{R^2}$

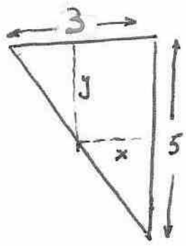
$\frac{dS}{dR}=0 \Rightarrow 4\pi R^3=320\ ;\ R=\sqrt[3]{\frac{320}{4\pi}}=\sqrt[3]{\frac{80}{\pi}}$

R	0		$\sqrt[3]{80/\pi}$		$+\infty$
S		↘		↗	
dS/dR		−	0	+	

Mínima superficie para $\boxed{R=\sqrt[3]{\frac{80}{\pi}}\ dm} \longrightarrow H=\frac{160}{\pi\sqrt[3]{\left(\frac{80}{\pi}\right)^2}}=\frac{160\sqrt[3]{\frac{80}{\pi}}}{\pi\frac{80}{\pi}}=\boxed{2\sqrt[3]{\frac{80}{\pi}}\ dm}$

(8)





$\frac{3}{5}=\frac{3-x}{y} \Rightarrow y=\frac{5(3-x)}{3}$

$S=(15-y)\cdot(10-x)=\left(15-\frac{5(3-x)}{3}\right)\cdot(10-x)=\frac{45-15+5x}{3}\cdot(10-x)=\frac{30+5x}{3}\cdot(10-x)$

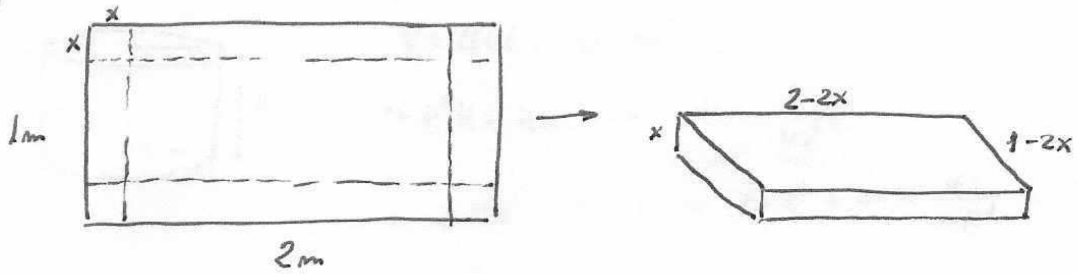
$\frac{dS}{dx}=\frac{5}{3}(10-x)+\frac{30+5x}{3}\cdot(-1)=\frac{50-5x-30-5x}{3}=\frac{20-10x}{3}$

$\frac{dS}{dx}=0 \Rightarrow 20=10x\ ;\ x=2$

x	0		2		10
S		↘		↗	
dS/dx		−	0	+	

Mínima superficie para $\boxed{x=2\,cm} \longrightarrow \boxed{y=\frac{5}{3}\ cm}$

(9)



$$V = x\cdot(2-2x)(1-2x) = 2x(1-x)(1-2x) = 2(x-3x^2+2x^3)$$

$$\frac{dV}{dx} = 2(1-6x+6x^2)$$

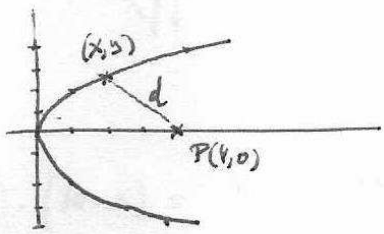
$$\frac{dV}{dx}=0 \Rightarrow 6x^2-6x+1=0 \;;\quad x=\frac{6\pm\sqrt{36-24}}{12} = \frac{6\pm\sqrt{12}}{12} = \frac{6\pm2\sqrt3}{12} = \frac{3\pm\sqrt3}{6} \begin{cases} \frac{3+\sqrt3}{6} \\ \frac{3-\sqrt3}{6} \end{cases}$$

x	0		$\frac{3-\sqrt3}{6}$		$\frac{3+\sqrt3}{6}$		1
V		↗		↘		↗	
$\frac{dV}{dx}$		+	0	−	0	+	

Máximo volumen para $\boxed{x=\frac{3-\sqrt3}{6}\ m}$

(10)

$$y^2=4x \longrightarrow y=\pm\sqrt{4x}$$



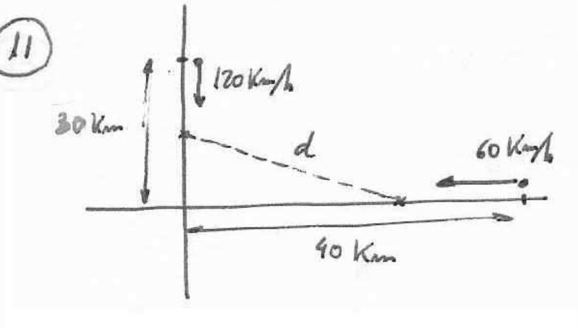
$$d=\sqrt{(x-4)^2+y^2} = \sqrt{(x-4)^2+4x} = \sqrt{x^2-4x+16}$$

$$d' = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+16}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+16}}$$

x	0		2		$+\infty$
d		↘		↗	
d'		−	0	+	

Mínima distancia para $x=2 \Rightarrow$ Puntos $(2, \pm\sqrt8)$

(11)



$t=0$ $\begin{cases} \text{locomotora 1 está en el punto } (40,0) \\ \text{locomotora 2 " " " " } (0,30) \end{cases}$

t horas $\begin{cases} \text{locomotora 1 " " " " } (40-60t,0) \\ \text{locomotora 2 " " " " } (0,30-120t) \end{cases}$

$$d=\sqrt{(40-60t)^2+(30-120t)^2}=\sqrt{1600-4800t+3600t^2+900-7200t+14400t^2}=$$

$$=\sqrt{2500-12000t+18000t^2}=10\sqrt{25-120t+180t^2}$$

$$d'=10\,\frac{-120+360t^2}{2\sqrt{25-120t+180t^2}}=5\,\frac{120(-1+3t^2)}{\sqrt{25-120t+180t^2}}=600\,\frac{3t^2-1}{\sqrt{25-120t+180t^2}}$$

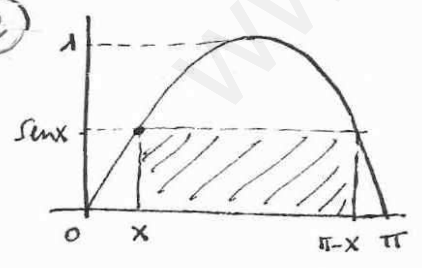
$$d'=0 \Rightarrow 3t^2=1 \quad ; \quad t=\pm\sqrt{1/3} \begin{cases} \sqrt{1/3} \\ \cancel{-\sqrt{1/3}} \end{cases}$$

t	0	$\sqrt{1/3}$	$+\infty$
d	$\searrow$		$\nearrow$
d'	$\ominus$	0	$\oplus$

Mínima distancia para $\boxed{t=\sqrt{1/3}\ \text{h}}$ $\longrightarrow$ $d_{min}=10\sqrt{25-\frac{120}{\sqrt3}+\frac{180}{3}}=$

$$=\boxed{10\sqrt{85-\frac{120}{\sqrt3}}\ \text{Km}}$$

(12)



$$\text{Area}=(\pi-2x)\,\text{sen}x \qquad x\in(0,\pi/2)$$

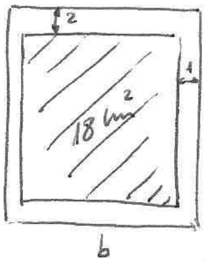
$$\frac{dA}{dx}=-2\,\text{sen}x+(\pi-2x)\cos x$$

$$\frac{dA}{dx}=0 \rightarrow -2\,\text{sen}x+(\pi-2x)\cos x=0 \rightarrow$$

$\rightarrow 2\,\text{sen}x=(\pi-2x)\cos x \rightarrow 2\,\text{tg}x=\pi-2x \Longrightarrow$ Resuelta con Calculadora gráfica $\boxed{x=0'710246}$

Area Máxima $=(\pi-2\cdot0'71)\,\text{sen}\,0'71=\boxed{1'021}$

(13)



$$(b-2)\cdot(a-4)=18 \Rightarrow b=2+\frac{18}{a-4}$$

$$S=a\cdot b=a\cdot\left(2+\frac{18}{a-4}\right)=a\,\frac{2a-8+18}{a-4}=\frac{2a^2+10a}{a-4}$$

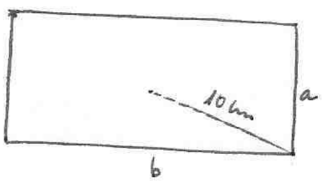
$$\frac{dS}{da}=\frac{(4a+10)(a-4)-(2a^2+10a)\cdot 1}{(a-4)^2}=\frac{4a^2-16a+\cancel{10a}-40-2a^2-\cancel{10a}}{(a-4)^2}=\frac{2a^2-16a-40}{(a-4)^2}$$

$$\frac{dS}{da}=0 \Rightarrow 2a^2-16a-40=0\ ;\ a^2-8a-20=0\ ;\ a=\frac{8\pm\sqrt{64+80}}{2}=\frac{8\pm 12}{2}\ \begin{cases}10\\ \cancel{-2}\end{cases}$$

a	0	10	$+\infty$
S	↘		↗
$\frac{dS}{da}$	$-$	0	$+$

Mínimo gasto en papel para $\boxed{a=10\text{ cm}} \longrightarrow b=2+\frac{18}{10-4}=\boxed{5\text{ cm}}$

(14)



$$\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=10^2$$

$$\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}=100 \Rightarrow b=\sqrt{400-a^2}$$

$$\text{Área}=a\cdot b=a\sqrt{400-a^2}$$

$$\frac{dA}{da}=\sqrt{400-a^2}+a\cdot\frac{-\cancel{2}a}{\cancel{2}\sqrt{400-a^2}}=\frac{400-a^2-a^2}{\sqrt{400-a^2}}=\frac{400-2a^2}{\sqrt{400-a^2}}$$

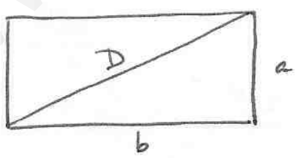
$$\frac{dA}{da}=0 \Rightarrow 400=2a^2\ ;\ a=\sqrt{200}$$

a	0	$\sqrt{200}$	20
A	↗		↘
$\frac{dA}{da}$	$+$	0	$-$

Máximo área para $\boxed{a=\sqrt{200}\text{ cm}} \Rightarrow b=\sqrt{400-200}=\boxed{\sqrt{200}\text{ cm}}$

El rectángulo de máximo área es un cuadrado.

(15)



$$2a+2b=12 \Rightarrow b=6-a$$

$$D=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+(6-a)^2}=\sqrt{36-12a+2a^2}$$

$$\frac{dD}{da}=\frac{-12+4a}{2\sqrt{36-12a+2a^2}}=\frac{2a-6}{\sqrt{36-12a+2a^2}}$$

$$\frac{dD}{da}=0 \Rightarrow a=3\text{ cm}$$

a	0	3	6
D	↘		↗
$\frac{dD}{da}$	$-$	0	$+$

Mínima diagonal para $\boxed{a=3\text{ cm}} \longrightarrow \boxed{b=3\text{ cm}}$

El rectángulo de mínima diagonal es un cuadrado.