

MATEMÁTICAS 2º BACH. CC. SS.
Análisis (Recuperación)

1) Halle $f'(2)$, $g'(4)$ y $h'(0)$ para las funciones definidas de la siguiente forma:

$$f(x) = x^2 + \frac{16}{x^2}; \quad g(x) = (x^2 + 9)^3; \quad h(x) = L(x^2 + 1). \quad (3 \text{ puntos})$$

2) Estudiar y dibujar, basándose en el estudio previo, la gráfica de la función:

$$g(x) = \frac{3-x}{x-2} \quad (5 \text{ puntos})$$

3) Sea f la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + bx + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad (2 \text{ puntos})$$

Determine los valores que deben tener a y b para que f sea derivable.

www.yoquieroaprobar.es

Soluciones

1) Halle $f'(2)$, $g'(4)$ y $h'(0)$ para las funciones definidas de la siguiente forma:

$$f(x) = x^2 + \frac{16}{x^2}; \quad g(x) = (x^2 + 9)^3; \quad h(x) = L(x^2 + 1).$$

Simplemente, aplicando las reglas de derivación, se obtiene:

$$f'(x) = 2x - \frac{32x}{x^4} = 2x - \frac{32}{x^3} \quad \Rightarrow \quad f'(2) = 4 - \frac{32}{8} = 4 - 4 = 0$$

$$g'(x) = 3(x^2 + 9)^2 \cdot 2x = 6x(x^2 + 9)^2 \quad \Rightarrow \quad g'(4) = 24(16 + 9)^2 = 15.000$$

$$h'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad h'(0) = \frac{0}{1} = 0$$

2) Estudiar y dibujar, basándose en el estudio previo, la gráfica de la función:

$$g(x) = \frac{3-x}{x-2}$$

a) Dominio: $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$, ya que 2 anula el denominador, y no se puede dividir entre cero.

b) Par/Impar: $g(-x) = \frac{3+x}{-x-2} = \frac{3+x}{-(x+2)} = -\frac{3+x}{x+2}$ que no coincide ni con $g(x)$ ni con $-g(x)$. Por tanto, ni es par, ni impar.

c) Intersecciones con los ejes: Si $x = 0 \Rightarrow y = -3/2$. Corta a OY en $(0, -3/2)$.

Si $y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{3-x}{x-2} \Rightarrow 0 = 3-x$ (siempre que la solución no anule el denominador $x-2$) $\Rightarrow x = 3 \Rightarrow$ Corta a OX en $(3, 0)$.

d) Monotonía y extremos relativos: $g'(x) = \frac{-(x-2) - (3-x)}{(x-2)^2} = \frac{-x+2-3+x}{(x-2)^2} =$

$$-\frac{1}{(x-2)^2}$$

- Discontinuidades de g ó de g' : $x = 2$, que anula el denominador tanto de una como de otra.

- Puntos que anulan g' : No hay (el numerador nunca se anula).

Dividimos \mathbb{R} en intervalos por el único punto obtenido, y resulta:

| | $(0, 2)$ | 2 | $(2, +\infty)$ |
|------|------------|------------|----------------|
| g' | - | \nexists | - |
| g | \searrow | \nexists | \searrow |

No tiene extremos relativos.

e) Curvatura y puntos de inflexión: $g''(x) = \frac{2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{2}{(x-2)^3}$

- Discontinuidades de g ó de g'' : $x = 2$

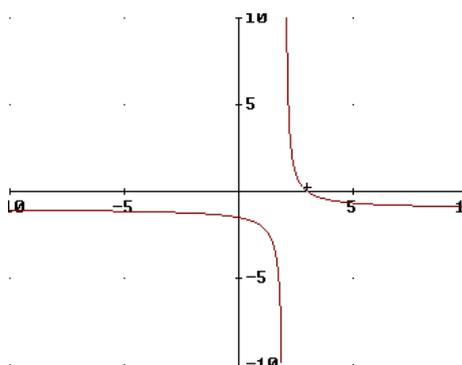
- Puntos que anulan g'' : No hay (el numerador nunca se anula).

Dividimos \mathbb{R} en intervalos por el único punto obtenido, y resulta:

| | $(0, 2)$ | 2 | $(2, +\infty)$ |
|-------|----------|------------|----------------|
| g'' | - | \nexists | + |
| g | \cap | \nexists | \cup |

No tiene puntos de inflexión, puesto que $x = 2$ no pertenece al dominio.

f) Gráfica:



3) Sea f la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + bx + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Determine los valores que deben tener a y b para que f sea derivable.

En primer lugar, para ser derivable debe ser continua. Como en las dos zonas en las que se define f lo hace con expresiones polinómicas, que siempre son continuas, sólo hay que exigirle la continuidad en el punto de separación de ambas zonas de definición, o sea, en $x = 1$. Como $f(1)$ existe, y vale $4+b$, y los límites laterales son:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + 1) = a+1 \qquad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + bx + 3) = 4+b$$

hay que exigir: $a+1 = 4+b \Rightarrow a = 3+b$

$$\text{Por otra parte, } f'(x) = \begin{cases} 2ax & \text{si } x < 1 \\ 2x+b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Exigimos que $f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow 2a = 2+b$. Sustituyendo aquí $a = 3+b$:

$$2(3+b) = 2+b \Rightarrow 6+2b = 2+b \Rightarrow b = -4.$$

Sustituyendo: $a = 3+b = 3-4 = -1$

Luego $a = -1$, $b = -4$.

- 1) Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + ax & \text{si } x > 0 \end{cases}$
- a) Para $a = -2$ represente gráficamente la función f , e indique sus extremos relativos. (2 puntos)
- b) Determine el valor de a para que la función f sea derivable. (1,5 puntos)
- 2) a) Determine a y b en la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + 5$ sabiendo que ésta tiene un máximo en el punto $(2, 9)$ (2 puntos)
- b) Calcule las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ (1,5 puntos)
- 3) El beneficio, en millones de euros, de una empresa en función del tiempo t , en años, viene dado por:
- $$f(t) = -t^2 + 12t - 31, \quad 4 \leq t \leq 7.$$
- b) Represente la gráfica de la función f . (1,5 puntos)
- c) ¿Para qué valor de t alcanza la empresa su beneficio máximo y a cuánto asciende? ¿Para qué valor de t alcanza su beneficio mínimo y cuál es éste? (1,5 puntos)