

## MATEMÁTICAS 2º BACH. CC. SS.

### Análisis

1) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función  $f$  definida de la forma  $f(x) = 1 + L(2x - 1)$  en el punto de abscisa  $x = 1$ . (2 puntos)

2) Sea la función  $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$  (5 puntos)

a) Determine su dominio, puntos de corte con los ejes, las asíntotas y la monotonía.

b) Represente gráficamente esta función

3) Sea la función  $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Estudie la continuidad y derivabilidad de  $f$  (3 puntos)

**1) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función  $f$  definida de la forma  $f(x) = 1 + L(2x - 1)$  en el punto de abscisa  $x = 1$ .**

Del punto de tangencia, donde la recta y la curva se tocan, conocemos  $x=1$ . La segunda coordenada de dicho punto, al ser un punto de  $f$ , será, por tanto:  $f(1) = 1 + L(2-1) = 1 + L = 1 + 0 = 1 \Rightarrow$  El punto es  $(1, 1)$

Para la pendiente de la tangente, necesitamos la función derivada:  $f'(x) = 0 + \frac{2}{2x-1} =$

$\frac{2}{2x-1} \Rightarrow f'(1) = \frac{2}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$  será la pendiente, puesto que  $x = 1$  es la primera coordenada del punto de tangencia.

Aplicando la ecuación punto-pendiente de la recta, la tangente será:  $y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 2 + 1 \Rightarrow \boxed{y = 2x - 1}$

**2) Sea la función  $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$**

**a) Determine su dominio, puntos de corte con los ejes, las asíntotas y la monotonía.**

1. Dominio.  $\boxed{D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}}$  porque  $-2$  anula el denominador

2. Intersecciones con los ejes. OX:  $y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{x+1}{x+2} \Rightarrow 0 = x+1 \Rightarrow -1 = x$ ,

que es una solución válida, porque no anula el denominador de la ecuación inicial  $\Rightarrow \boxed{(-1, 0)}$

OY:  $x = 0 \Rightarrow y = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\left(0, \frac{1}{2}\right)}$

3. Asíntotas. Horizontal:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x+2} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1 \text{ es A. Hor.}}$

Verticales: Sólo podría tenerlas en  $x = -2$ , que es el único punto de discontinuidad.

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{x+2} = \left(\frac{-1}{0}\right) = \infty \Rightarrow \boxed{x = -2 \text{ es A. Vert.}}$

Oblicua: No puede tenerla, puesto que posee asíntota horizontal (saldría ésta, de nuevo, si intentásemos calcularla).

4. Monotonía.  $f'(x) = \frac{1(x+2) - 1(x+1)}{(x+2)^2} = \frac{x+2-x-1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}$

Dividimos el  $D(f)$  en intervalos mediante:

a) Discontinuidades de  $f$ :  $x = -2$

b) Discontinuidades de  $f'$ :  $x = -2$  (si anulamos el denominador de  $f'$  queda  $(x+2)^2 = 0 \Rightarrow x+2 = \pm\sqrt{0} \Rightarrow x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$ )

c)  $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow 1 = 0$ , que no es posible

para ningún valor de  $x$ .

La división en intervalos la hacemos con ayuda del gráfico:

Resulta el siguiente cuadro:

	$(0, 2)$	$2$	$(2, +\infty)$
$f'$	$+$	$\nexists$	$+$
$f$	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$



A la vista de este resultado, concluimos que no existen extremos relativos.

5. Curvatura. No nos la piden, pero la vamos a calcular (en general, en un examen real no debe contestarse a lo que no se pregunte, si bien en este caso lo que hacemos es completar la información disponible para dibujar la gráfica). Comenzamos por calcular la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{0 - 2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{-2}{(x+2)^3}$$

- a) Discontinuidades de  $f$ :  $x = -2$
- b) Discontinuidades de  $f''$ :  $x = -2$
- c)  $f''(x) = 0 \Rightarrow -2 = 0$  que no es posible.

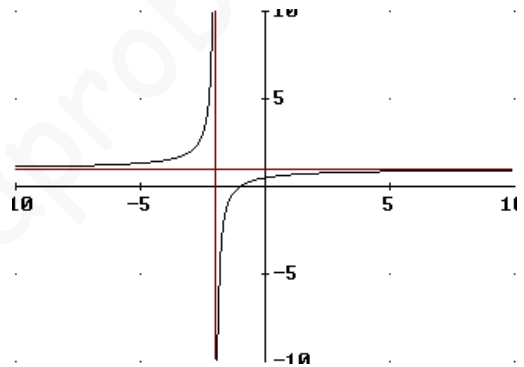
La división en intervalos es la misma que antes, por lo que resulta:

	$(-\infty, -2)$	$-2$	$(-2, +\infty)$
$f''$	+	$\exists$	-
$f$	$\cup$	$\exists$	$\cap$

No tiene puntos de inflexión: sería, en todo caso,  $x = -2$ , pero resulta que no es un punto del dominio.

**d) Represente gráficamente esta función**

Combinando los resultados anteriores, se obtiene la gráfica adjunta.



3) Sea la función  $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

**Estudie la continuidad y derivabilidad de  $f$**

Continuidad.

- Intervalo  $(-\infty, 1)$ :  $f$  coincide con  $y = 2^x$ . Las exponenciales son continuas en todo  $\mathbb{R} \Rightarrow f$  es continua en todo el intervalo.
- Intervalo  $(1, +\infty)$ :  $f$  coincide con  $y = 2/x$ , cuya única discontinuidad está en  $x = 0$ , que no pertenece al intervalo  $\Rightarrow f$  es continua, también, en todo el intervalo.
- $x = 1$ : Los puntos que separan distintas zonas de definición de las funciones definidas a trozos siempre se estudian por separado:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2^x = 2^1 = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x} = \frac{2}{1} = 2 \quad f(1) = \frac{2}{1} = 2$$

Por tanto,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 2 \Rightarrow f$  es continua en  $x = 1$

Por tanto,  $f$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ , por lo que puede ser derivable

Derivabilidad

$$f'(x) = \begin{cases} 2^x \ln 2 & \text{si } x < 1 \\ -\frac{2}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{porque podemos derivar directamente en intervalos abiertos.}$$

Para el punto que separa las zonas de definición, vemos los límites laterales de esta función:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 2 \ln 2 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -\frac{2}{1^2} = -2$$

Como no coinciden, no puede ser derivable la función  $f$  en  $x = 1$ .