Análisis

1) La función $f(x)=\frac{1}{90}(-x^2+100x-1600)$ representa el beneficio, expresado en millones de pesetas, que obtiene una empresa por la fabricación de x unidades de un determinado producto.

   a) Realice un boceto de la gráfica. ¿Cuántas unidades hay que fabricar para que no se produzcan pérdidas? *(1,5 puntos)*

   b) ¿Cuál es el mayor beneficio posible? ¿Cuántas unidades deben fabricarse para obtenerlo? *(2,5 puntos)*

2) Dada la función $f(x)=\frac{3x+7}{x+2}$,

   a) Calcule los puntos de la gráfica de dicha función donde la tangente tiene pendiente -1. *(1,5 puntos)*

   b) Explique, razonadamente, si puede existir algún punto de tangente horizontal en esta función. *(1,5 puntos)*

   c) Represente gráficamente la función, indicando, al menos, sus asíntotas, crecimiento y decrecimiento. Indique, también, los intervalos de concavidad y convexidad, (puede concluirlo a la vista de la gráfica obtenida, si lo desea). *(3 pts)*

Soluciones

1) La función f(x) = $\frac{1}{90}(-x^2+100x-1600)$ representa el beneficio, expresado en millones de pesetas, que obtiene una empresa por la fabricación de x unidades de un determinado producto.

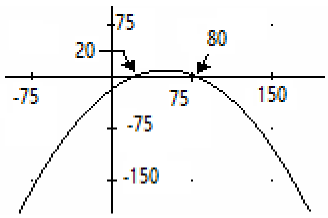
a) Realice un boceto de la gráfica. ¿Cuántas unidades hay que fabricar para que no se produzcan pérdidas?

Es una parábola de eje vertical abierta hacia abajo, es decir, con un máximo relativo, ya que el coeficiente de x^2 es –1/90 (negativo). Hallamos los puntos de corte con OX:

$0=\frac{1}{90}(-x^2+100x-1600)$

$\Leftrightarrow x^2-100x+1600=0 \Leftrightarrow x=\frac{100\pm\sqrt{10.000-6.400}}{2}=\frac{100\pm 60}{2}=\begin{cases}80\Rightarrow(80,0)\\20\Rightarrow(20,0)\end{cases}$

La ecuación del eje de la parábola es $x=-\frac{b}{2a}=\frac{-\frac{100}{90}}{-\frac{2}{90}}=\frac{100}{2}=50$, por lo que el máximo está en $f(50)=\frac{1}{90}(-50^2+100\cdot 50-1600)=10\Rightarrow(50,10)$



Con todo esto, la gráfica es la adjunta. A la vista de ella se concluye que no hay pérdidas si $x\in[20,80]$, porque son los valores de x que hacen que la y (el beneficio) sea positiva.

b) ¿Cuál es el mayor beneficio posible? ¿Cuántas unidades deben fabricarse para obtenerlo?

La gráfica de la función es una parábola, que es una función conocida y, por tanto, no hay por qué calcular los extremos relativos por el método general. El máximo lo alcanza en el vértice, que lo calculamos antes: (50,10). Es decir, el mayor beneficio posible es de 10 millones, obtenido al fabricar 50 unidades.

Si, con todo, quisiésemos usar el método general, sería así: Dom(f)=[0,+∞) (consideramos la imposibilidad de fabricar un número negativo de unidades). Comparamos las imágenes (o, en su defecto, los límites) en:

a) Extremos del intervalo de definición: f(0)=–160/9; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

b) Discontinuidades de f o de f': No hay

c) Puntos que anulan f': $y'=\frac{1}{90}(-2x+100)$; igualamos a 0: $\frac{1}{90}(-2x+100)=0\Rightarrow$ $-2x+100=0\Rightarrow 100=2x\Rightarrow 50=x$. Imagen: $f(50)=10$.

Por tanto, de entre los puntos anteriores, la mínima imagen, o límite, es –∞, por lo que no hay mínimo absoluto. La máxima es 10, que se alcanza en x=50. Por tanto, el resultado es el mismo obtenido antes: el beneficio máximo es 10, obtenido para x=50 unidades.

3) Dada la función f(x) = $\frac{3x+7}{x+2}$,

a) Calcule los puntos de la gráfica de dicha función donde la tangente tiene pendiente –1.

Según la interpretación geométrica de la derivada, la pendiente de la recta tangente a una función en el punto (x, $f(x)$) vale $f\,'(x)$. Por el enunciado del problema, dicha pendiente debe valer –1. Veamos el valor de x para que eso ocurra:

$$f\,'(x) = \frac{3(x+2)-(3x+7)}{(x+2)^2} = \frac{3x+6-3x-7}{(x+2)^2} = -\frac{1}{(x+2)^2} = -1 \Rightarrow \frac{1}{(x+2)^2} = 1 \Rightarrow$$

$$1 = (x+2)^2 \Rightarrow 1 = x^2+4x+4 \Rightarrow 0 = x^2+4x+3 \Rightarrow x = \frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4\pm 2}{2} =$$

$$\begin{cases}-1\\-3\end{cases} \Rightarrow$$ Los puntos donde ocurre son, entonces: (–1, 4) y (–3, 2).

No nos piden las ecuaciones de las rectas tangentes, pero usando la ecuación punto pendiente: $y–y_0$=m($x–x_0$), serían, respectivamente:

$$y-4 = -1(x+1) \Rightarrow y = -x-1+4 \Rightarrow \boxed{y = -x+3}$$
$$y-2 = -1(x+3) \Rightarrow y = -x-3+2 \Rightarrow \boxed{y = -x-1}$$

b) Explique, razonadamente, si puede existir algún punto de tangente horizontal en esta función.

Debería ser 0 la pendiente, para que la recta tangente fuese horizontal. Entonces:

$f\,'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow -1 = 0$, que no es posible.

c) Represente gráficamente la función, indicando, al menos, sus asíntotas, crecimiento y decrecimiento. Indique, también, los intervalos de concavidad y convexidad, (puede concluirlo a la vista de la gráfica obtenida, si lo desea).

1. Dom(f) = R–{–2}, puesto que es el único punto que presenta restricciones al calcular la imagen, ya que anula el denominador.

2. Asíntotas. Horizontal: $\lim_{x\to\infty} \frac{3x+7}{x+2} = \frac{3}{1} = 3 \Rightarrow y=3$ es A. horizontal.

Vertical: –2 es la única discontinuidad. Entonces: $\lim_{x\to -2} \frac{3x+7}{x+2} = \infty \Rightarrow$ x=–2 es A. vertical

Oblicua: No tiene, porque tiene horizontal.

3. Monotonía. Se calculó antes $f\,'$ y se vio, además, que no podía anularse nunca. No tiene, entonces, puntos críticos. La única discontinuidad de f y de $f\,'$ está en –2. Por tanto:

	(-∞,–2)	–2	(–2, +∞)
f'	–	∄	–
f	↘	∄	↘

Por tanto, no tiene extremos relativos.

4. Curvatura. Como $f\,''(x) = \frac{2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{2}{(x+2)^3}$, que no se anula nunca, y cuya única discontinuidad es la misma que la de f y la de $f\,'$, es decir, –2, entonces:

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,+\infty)$
f''	$-$	$\nexists$	$+$
f	$\cap$	$\nexists$	$\cup$

5. Gráfica.