MATEMÁTICAS 2º BACH. CC. SS.
Análisis

1) Hallar el dominio de $y=\sqrt{-3x^2+4x-1}$ *(2 puntos)*
2) Decir si la siguiente función es *par*, *impar* o ninguna de las dos cosas:

$$y=\frac{2x^4-3x^2}{x^2-1}$$ *(2 puntos)*

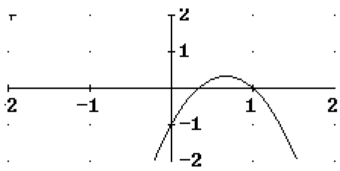
3) Hallar las intersecciones con los ejes y el dominio de $f(x)=\dfrac{4x-1}{2x-2}$. *(2 puntos)*
4) Calcular: *(4 puntos)*
   a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x}{4x^3-2}$
   b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3}{x-1}-\dfrac{x^2+3}{x+1}\right)$
   c) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^3-5x^2-4x+4}{x^2-4x+4}$
   d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3}-5x}{4x-2}$

Soluciones

1) Hallar el dominio de $y=\sqrt{-3x^2+4x-1}$

Los polinomios dan resultado para cualquier valor de x. Pero las raíces cuadradas exigen que el radicando sea mayor o igual que 0. Luego $x\in D(f) \Leftrightarrow -3x^2+4x-1\geq 0$. Para resolver esta inecuación, dibujamos la parábola $y=-3x^2+4x-1$. Como el coeficiente de x^2 es negativo (–3), se abre hacia abajo, con un máximo. Corta al eje OX en: $-3x^2+4x-1=0 \Leftrightarrow$

$x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-12}}{-6}=\dfrac{-4\pm 2}{-6}=\begin{cases}=1\\ =\dfrac{1}{3}\end{cases}$. Su gráfica será:



Luego los valores de x que hacen que la y sea positiva, que son la solución de la inecuación (porque hemos llamado y a $-3x^2+4x-1$, y la inecuación es $-3x^2+4x-1\geq 0$) y, por tanto, el dominio, son: $D(f)=[\frac{1}{3},1]$

2) Decir si la siguiente función es par, impar o ninguna de las dos cosas:

$$y=\frac{2x^4-3x^2}{x^2-1}$$

$f(x)=\dfrac{2x^4-3x^2}{x^2-1} \Rightarrow f(-x)=\dfrac{2(-x)^4-3(-x)^2}{(-x)^2-1}=\dfrac{2x^4-3x^2}{x^2-1}=f(x) \Rightarrow$ Es par

3) Hallar las intersecciones con los ejes y el dominio de $f(x)=\dfrac{4x-1}{2x-2}$.

La única operación que presenta restricciones en el cálculo de la imagen, de entre las que aparecen en *f*, es la división, porque no se puede dividir entre 0. Por tanto, no pertenecen al dominio los valores de *x* que anulen el denominador, esto es: $2x–2=0 \Leftrightarrow x=1$. Es decir: $D(f)=\mathbb{R}–\{1\}$

Intersección con OX: $y=0 \Rightarrow 0=\dfrac{4x-1}{2x-2} \Rightarrow 0=4x–1 \Rightarrow 1=4x \Rightarrow x=\dfrac{1}{4}$ (observar que es solución, porque no anula el denominador; además, los puntos que anulan el denominador estaban excluidos del dominio) $\Rightarrow (\dfrac{1}{4}, 0)$ son las coordenadas de la intersección.

Intersección con OY: $x=0 \Rightarrow y=\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow (0, \dfrac{1}{2})$

4) Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x}{4x^3-2}=+\infty$, porque la exponencial de base mayor que 1 crece mucho más rápidamente que cualquier polinómica, por lo que el numerador produce un infinito de orden superior al del denominador.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3}{x-1}-\dfrac{x^2+3}{x+1}\right)=$ (en principio, produce la indeterminación $\infty–\infty$) $=$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2-3)(x+1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{(x^2+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^3+x^2-3x-3)-(x^3-x^2+3x-3)}{(x-1)(x+1)}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+x^2-3x-3-x^3+x^2-3x+3}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-6x}{x^2-1}\right)=\frac{2}{1}=2$$

c) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^3-5x^2-4x+4}{x^2-4x+4}$ Produce la indeterminación 0/0. Descomponemos por Ruffini, probando en $x=2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -5 & -4 & 4 \\ 2 & & 6 & 2 & -4 \\ \hline & 3 & 1 & -2 & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & -4 & 4 \\ 2 & & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^3-5x^2-4x+4}{x^2-4x+4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(3x^2+x-2)}{(x-2)(x-2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2+x-2}{x-2}=$ $\dfrac{12+2-2}{2-2}=\infty$ sin signo; calculando los límites laterales se vería cuando es $+\infty$ y cuando $-\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3-5x}}{4x-2}=$ (en el ∞, equivale a quedarse sólo con los sumandos de máxima potencia) $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3}}{4x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{x^3}}{4x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{4x}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$