MATEMÁTICAS CC.SS. II 30 de noviembre de 2.001

Sistemas, matrices, determinantes, p. lineal

1) Un camión puede transportar, como máximo, 12 Tm por viaje. En cierto viaje desea transportar, al menos, 5 Tm de la mercancía A y un peso de la mercancía B que no sea inferior a la mitad del peso que transporte de A. Sabiendo que cobra 0,4 € por kilo de la mercancía A y 0,3 € por kilo de mercancía B transportadas, ¿cómo se debe cargar el camión para obtener la ganancia máxima?

2) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   a) Indique los productos matriciales que pueden efectuarse entre ellas, sin repetir factores.
   b) Calcule $B + C\cdot A$
   c) Calcule el determinante de $A\cdot C$. ¿Tiene inversa $A\cdot C$? En caso afirmativo, calcularla; en caso negativo, calcular la inversa de B, suponiendo que exista.

Soluciones

1) Un camión puede transportar, como máximo, 12 Tm por viaje. En cierto viaje desea transportar, al menos, 5 Tm de la mercancía A y un peso de la mercancía B que no sea inferior a la mitad del peso que transporte de A. Sabiendo que cobra 0,4 € por kilo de la mercancía A y 0,3 € por kilo de mercancía B transportadas, ¿cómo se debe cargar el camión para obtener la ganancia máxima?

El cuadro siguiente resume las condiciones del enunciado. En primer lugar, elegimos como variables x e y, representando las cantidades que se van a transportar de cada mercancía, en toneladas. Las restricciones son: que el total transportado es, como máximo, 12 Tm: $x+y \leq 12$; que de A hay que transportar, al menos, 5 Tm: $x \geq 5$; que de B hay que transportar, al menos, la mitad de lo que se transporte de A: $y \geq x/2$. Por último, los ingresos, que hay que maximizar, son 0,4 por kilo de A más 0,3 por kilo de B. O, lo que es los mismo, 400€ por Tm de A y 300€ por Tm de B, es decir, un total de $400x+300y$. Para evitar decimales, en lugar de trabajar en euros, lo haremos en centenas de euro. Por tanto:

	Cantidad transportada (Tm)	Límites	Facturación (100€)
A	x	$x \geq 5$	$4x$
B	y	$y \geq x/2$	$3y$
TOTAL	$x+y \leq 12$		$4x+3y$

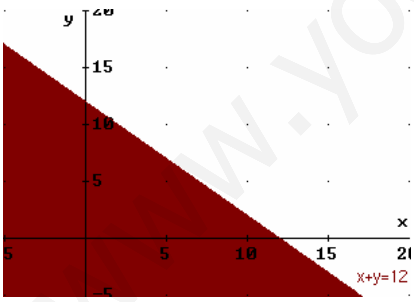
Por último, la cantidad transportada no puede ser negativa para ninguno de los dos tipos de mercancía: $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Luego el problema de programación lineal es:

Función Objetivo: $f(x,y) = 4x+3y$ MAXIMIZAR

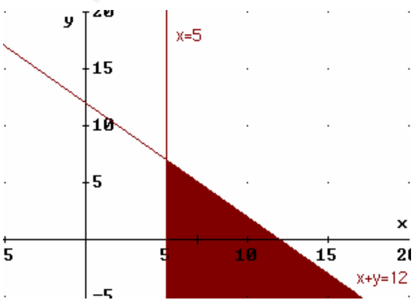
Restricciones:
$$x+y \leq 12$$
$$x \geq 5$$
$$y \geq x/2$$
$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

Dibujamos la región factible, determinada por las restricciones.

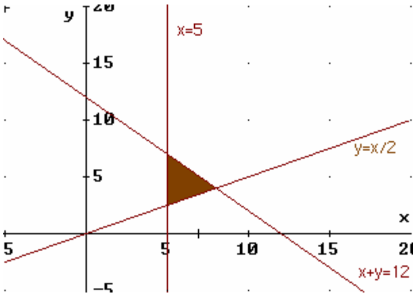


$x+y = 12$ es una recta. Para dibujarla, basta elegir dos puntos de la misma.

Esta recta divide el plano en dos semiplanos. Uno de ellos es el que verifica $x+y \leq 12$. Para averiguarlo, tomamos un punto cualquiera, del que sepamos seguro si está por encima o por debajo de la recta, y sustituimos en $x+y \leq 12$. Por ejemplo (0, 0), que está debajo de la recta, verifica: $0+0 \leq 12$. Por tanto, la zona $x+y \leq 12$ es la que queda bajo la recta, y que se ha destacado en el gráfico.



x=5 es una recta vertical. Como el punto (0,0), al sustituir en la desigualdad $x \geq 5$ no la verifica (quedaría $0 \geq 5$, que no es cierto), el semiplano que nos vale es el de la derecha. Combinándolo con lo anterior, la zona coloreada es la que verifica las dos restricciones a la vez.



Representamos la recta $y = x/2$. Esta vez no podemos trabajar con (0, 0), porque es un punto de la recta. Escogemos, por ejemplo (10, 0), que queda por debajo y sustituimos en $y \geq x/2$: $0 \geq 10/2 \Leftrightarrow 0 \geq 5$, que no es cierto. Luego el semiplano que vale es el otro, el que queda por encima. La zona coloreada verifica las tres restricciones simultáneamente.

Las restricciones restantes, $x \geq 0$, $y \geq 0$ nos remiten a trabajar sólo en el primer cuadrante. Como la región que tenemos hasta ahora está plenamente incluida en el primer cuadrante, ya está totalmente delimitada en el gráfico anterior.

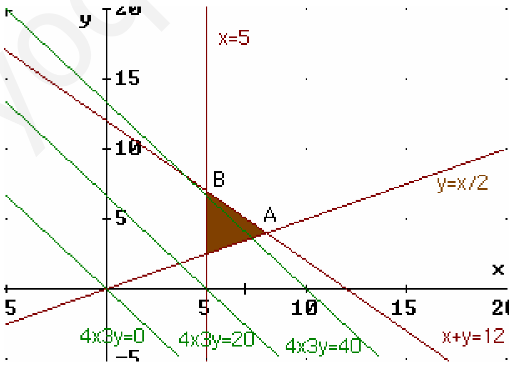
De entre todos los puntos de la *región factible*, hemos de escoger aquél que maximiza la *función objetivo* $f(x,y) = 4x+3y$. Para cada valor de x y de y la función objetivo toma un valor. Por ejemplo (sin considerar si los puntos están o no en la región factible):

Para (0, 0): $4 \cdot 0+3 \cdot 0 = 0$
Para (2, 5): $4 \cdot 2+3 \cdot 5 = 23$
Etc.

Queremos, entonces, el punto (x, y) de la región factible que haga c, en $4x+3y = c$, lo mayor posible (eso es lo que hace que los ingresos sean lo mayor posible). Dicho punto pertenece a la recta de ecuación $4x+3y = c$. Todas estas rectas son paralelas entre sí (ver el gráfico siguiente). Y cuánto más alta es la recta, mayor es c, es decir, mayores son los ingresos. Luego nos interesa la recta más alta posible.

En cuanto a esto, es **importante** tener en cuenta que **si en la función objetivo *y* aparece con signo negativo**, la función objetivo ofrece resultados ***mayores* cuanto más baja está la recta**.

En nuestro problema, según el gráfico, la recta más alta posible que toca algún punto de la región factible será la que pase por A o, quizás, si el gráfico no estuviera muy afinado, podría ser la que pase por B:



Para quitarnos la duda, comprobamos ambos puntos. Para empezar, calculamos las coordenadas de ambos.

A es la intersección de $x+y = 12$ con $y = x/2$ (que equivale, despejando, a $x–2y = 0$). Por tanto, es la solución del sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \Rightarrow x = 2y \\ x + y = 12 \end{cases}$$

Sustituyendo lo que hemos despejado en la primera ecuación ($x = 2y$) en la segunda:

$$2y+y = 12 \quad \Rightarrow \quad 3y = 12 \quad \Rightarrow \quad y = 4$$

Sustituyendo en $x = 2y \quad \Rightarrow \quad x = 8 \quad \Rightarrow \quad A(8, 4)$

B es la intersección de $x+y = 12$ con $x = 5$:

$$\begin{cases} x = 5 \\ x + y = 12 \end{cases}$$

Sustituyendo $x = 5$ en la segunda ecuación: $5+y = 12 \;\Rightarrow\; y = 7 \;\Rightarrow\; B(5, 7)$

Por tanto, los valores de la función objetivo en cada uno de estos dos puntos, son:

$f(A) = 4·8+3·4 = 32+12 = 44$

$f(B) = 4·5+3·7 = 20+21 = 41$

Luego lo máximo que se puede conseguir con puntos de la región factible (la que verifica las restricciones) es 44, en A.

Es decir, que la solución óptima está en 8 Tm de la mercancía A y 4 Tm de B, con lo que se consiguen unos ingresos de 44 centenares de €, o sea, 4.400€.

2) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Indique los productos matriciales que pueden efectuarse entre ellas, sin repetir factores.

Como las dimensiones son:

dim(A) = 3x2
dim(B) = 2x2
dim(C) = 2x3

Se pueden hacer (indicamos la dimensión entre paréntesis):

$A·B$ (3x2), $A·C$ (3x3), $B·C$(2x3)
$C·A$ (2x2)

Y no se pueden hacer $B·A$ ni $C·B$, porque no coincide el número de columnas de la primera matriz con el número de filas de la segunda.

b) Calcule $B + C·A$

$$B+C·A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Calcule el determinante de $A·C$. ¿Tiene inversa $A·C$? En caso afirmativo, calcularla; en caso negativo, calcular la inversa de B, suponiendo que exista.

$$A·C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Su determinante vale 0, porque tiene una columna de ceros (la tercera). Por tanto, no tiene inversa. Calculamos, entonces, la inversa de B.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2–6 = –4 \;\Rightarrow\; \exists B^{-1}$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \text{Adj}(B^t) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & 3/4 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$