1) Clasificar y dar todas las soluciones del siguiente sistema, resolviéndolo por el método de Gauss. Si tuviera más de una solución, dar una concreta:

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y-2z&=1\\ -2x+4y-3z&=3\\ 2x-2y-7z&=5 \end{aligned}\right\}$$

(5 puntos)

2) En un supermercado, un cliente compra 5 unidades de un producto *A*, 4 unidades de un producto *B* y 3 unidades de un producto *C*, pagando un total de 4.500 ptas. Otro cliente compra 2 unidades de *A* y 2 unidades de *C*, pagando en total 2.000 ptas. Una tercera persona compra en la tienda del barrio, que marca los precios un 10% más caro que el supermercado, 3 unidades del producto *A* y una del *B*, pagando en total 1.210 ptas. Se pide:

a) Formular el sistema de ecuaciones asociado al enunciado. *(1 punto)*

b) Calcular el precio por unidad de cada uno de los productos *A*, *B* y *C* en el supermercado. *(3 puntos)*

c) Calcular el precio de cada uno de estos productos en la tienda del barrio. *(1 punto)*

Soluciones

1) Clasificar y dar todas las soluciones del siguiente sistema, resolviéndolo por el método de Gauss. Si tuviera más de una solución, dar una concreta:

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y-2z&=1\\ -2x+4y-3z&=\\ 2x-2y-7z&=5 \end{aligned}\right\}$$

(5 puntos)

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y-2z&=1\\ -2x+4y-3z&=\\ 2x-2y-7z&=5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \\ (2^a)+(1^a): \\ (3^a)\text{-}(1^a): \end{matrix} \left.\begin{aligned} 2x-3y-2z&=1\\ y-5z&=4\\ y-5z&=4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Eliminamos la tercera ecuación, por ser redundante. Al quedar, entonces, dos ecuaciones con dos incógnitas, pasamos una de ellas al segundo miembro; a partir de ahora, actuará como parámetro (el valor de esta incógnita será arbitrariamente fijado por nosotros). Dicha incógnita será *z*:

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y&=1+2z\\ y&=4+5z \end{aligned}\right\}$$

El sistema ya está triangularizado. Como el valor de *z* queda libre, para recalcarlo, llamamos $z = t$. Entonces:

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y&=1+2t\\ y&=4+5t \end{aligned}\right\}$$

Ya tenemos el valor de dos incógnitas: $z = t$ e $y = 4+5t$ (de la segunda ecuación). Sustituyendo en la primera:

$$2x-3(4+5t) = 1+2t \;\Rightarrow\; 2x-12-15t = 1+2t \;\Rightarrow\; 2x = 13+17t \;\Rightarrow$$

$$x=\frac{13}{2}+\frac{17}{2}t$$

Luego las soluciones (infinitas, una para cada valor de *t*, elegido éste por nosotros de forma arbitraria) son:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{13}{2}+\frac{17}{2}t\\ y&=\;4+\;5t\\ z&=\;\;\;\;\;\;\;\;t \end{aligned}\right\}$$

Es decir, es un sistema compatible indeterminado. Para, por ejemplo $t = 1$, obtenemos la solución: (x=15, y=9, z=1)

2) En un supermercado, un cliente compra 5 unidades de un producto *A*, 4 unidades de un producto *B* y 3 unidades de un producto *C*, pagando un total de 4.500 ptas. Otro cliente compra 2 unidades de *A* y 2 unidades de *C*, pagando en total 2.000 ptas. Una tercera persona compra en la tienda del barrio, que marca los precios un 10% más caro que el supermercado, 3 unidades del producto *A* y una del *B*, pagando en total 1.210 ptas. Se pide:

a) Formular el sistema de ecuaciones asociado al enunciado. *(1 punto)*

Si x es el precio en el supermercado de *A*, y el de *B* y z el de *C*, lo que cuestan 5 unidades de *A* más 4 de *B* y más 3 de *C* son: $5x+4y+3z$, lo que da un total de 4.500.
Análogo para el segundo cliente: $2x+2z = 2.000$
En la tienda, el artículo *A* cuesta x más el 10% de x:

$$x+\frac{10}{100}x = x+0{,}1x = (1+0{,}1)x = 1{,}1x$$

donde en el penúltimo paso se ha extraído x factor común de los dos sumandos. Análogo para y. Por tanto, lo que paga el tercer cliente es:

$$3\cdot 1{,}1x+1{,}1y = 1210$$

Es decir, que el sistema es:

$$\left.\begin{array}{r} 5x+4y+3z=4500 \\ 2x \qquad +2z=2000 \\ 3\cdot 1{,}1x+1{,}1y \qquad =1210 \end{array}\right\}$$

b) Calcular el precio por unidad de cada uno de los productos *A*, *B* y *C* en el supermercado. *(3 puntos)*

$$\begin{array}{l} \\ (2^{a})/2: \\ (3^{a})/1{,}1: \end{array}\left.\begin{array}{r} 5x+4y+3z=4500 \\ x \qquad +z=1000 \\ 3x+y \qquad =1100 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (1^{a})-3(2^{a}): \\ \\ \\ \end{array}\left.\begin{array}{r} 2x+4y \qquad =1500 \\ x \qquad +z=1000 \\ 3x+y \qquad =1100 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1^{a})-4(3^{a}): \\ \\ \\ \end{array}\left.\begin{array}{r} -10x \qquad =-2900 \\ x \qquad +z=1000 \\ 3x+y \qquad =1100 \end{array}\right\}$$

Y ya está triangularizado el sistema, porque en la primera ecuación sólo tenemos la incógnita x, en la 3ª, dicha incógnita más la y, y en la 2ª, dichas incógnitas (aunque el coeficiente de y es 0) más la z. Despejando en la 1ª:
$x = 290 \Rightarrow$ Sustituyendo en la 3ª: $870+y = 1100 \Rightarrow y = 230 \Rightarrow$ Sustituyendo en la 2ª: $290+z = 1000 \Rightarrow z = 710$
Solución única: $x=290$; $y=230$; $z=710$

c) Calcular el precio de cada uno de estos productos en la tienda del barrio. *(1 punto)*

Multiplicando por 1,1 obtenemos los precios un 10% más caros:

$x' = 319$; $y' = 253$; $z' = 781$