Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Enuncia el Teorema de Rolle. **(1 punto)**

b) Razona que existe al menos un punto en el intervalo $(1, 2)$ donde la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12$ tiene pendiente nula. **(1,5 puntos)**

2A. Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que el área de la región comprendida entre las gráficas de las parábolas $f(x) = -x^2 + a^2$ y $g(x) = -4x^2 + 4a^2$ sea 32 unidades de superficie.
(2,5 puntos)

3A. a) Despeja X en la ecuación matricial $A \cdot X = I_3 - 2B \cdot X$, donde I_3 es la matriz identidad de orden 3 y A, B y X son matrices cuadradas de orden 3. **(1,25 puntos)**

b) Calcula X, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ **(1,25 puntos)**

4A. Dados los planos $\pi \equiv ax + 2y + z = 4$, $a \in \mathbb{R}$, y $\pi' \equiv 2x - 4y - 2z = b$, $b \in \mathbb{R}$:

a) Razona para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ son π y π' coincidentes. **(1 punto)**

b) Razona para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ son π y π' paralelos no coincidentes. **(0,75 puntos)**

a) Razona para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ son π y π' perpendiculares. **(0,75 puntos)**

(sigue a la vuelta)

A1.- Solución:

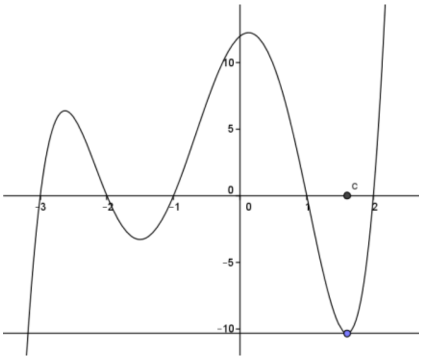
a) **Teorema de Rolle**

Sea **f(x)** una función continua en **[a , b],** derivable en **(a , b)** y que verifica que **f(a) = f(b)**; entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que **f'(c) = 0**

b) La función **f(x)** es polinómica, luego continua en **[1 , 2] y** derivable en **(1 , 2)** con valores iguales en los extremos del intervalo

***f*(*1*)=1 + 3 – 5 – 15 + 4 + 12 = 0; *f*(2) =32 + 48 – 40 – 60 + 8 + 12 = 0**

Entonces existe, al menos, un punto ***c*** $\in (1,2)$ tal que **f'(c) = 0** que es el valor de la pendiente, o lo que es lo mismo, la tangente es horizontal



A2.-Solución:

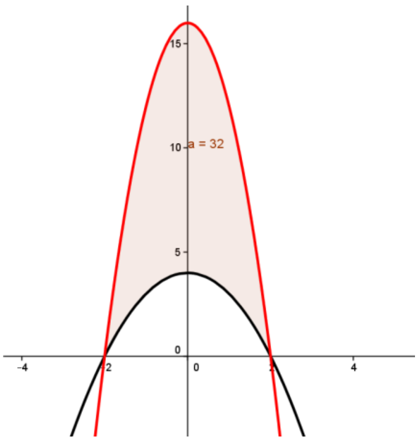
Se trata de dos parábolas con el mismo eje, el eje Y, ambas tienen el vértice en lo más alto, g es más cerrada y tiene el vértice por encima de f, en (0 , 4a^2) en lugar de en (0, a^2). Los puntos de corte los obtenemos resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y = -x^2 + a^2 \\ y = -4x^2 + 4a^2 \end{cases} \Rightarrow -x^2 + a^2 = -4x^2 + 4a^2 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow \begin{cases} x = a \Rightarrow y = 0 \\ x = -a \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

En resumen, las parábolas se cortan en (-*a* , 0) y (*a* , 0). El área encerrada es

$$\int_{-a}^{a} (g(x) - f(x))dx = \int_{-a}^{a} (-3x^2 + 3a^2)dx = [-x^3 + 3a^2x]_{-a}^{a} = 2a^3 + 2a^3 = 4a^3$$

$$\text{y como queremos que sea } 32, 4a^3 = 32 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$$



A3.- Solución:

$$A \cdot X = I - 2B \cdot X \Rightarrow A \cdot X + 2B \cdot X = I \Rightarrow (A+2B)X = I \Rightarrow X = (A+2B)^{-1}$$

Si el producto de dos matrices es la matriz identidad es que son inversas una de la otra

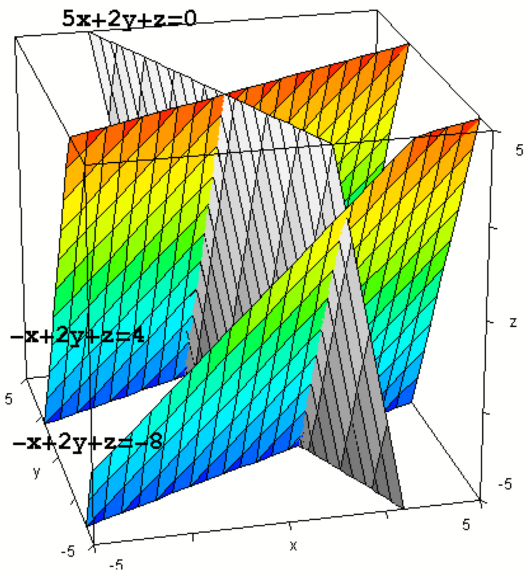
$$A+2B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A+2B| = 1 \Rightarrow X = (A+2B)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{traspuesta de adjuntos}$$

A4.- Solución:

a) Serán coincidentes cuando todos los coeficientes sean proporcionales $\frac{a}{2} = \frac{2}{-4} = \frac{1}{-2} = \frac{4}{b} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -8 \end{cases}$

b) Serán estrictamente paralelos cuando sean proporcionales los coeficientes de la incógnitas pero no los términos independientes $\frac{a}{2} = \frac{2}{-4} = \frac{1}{-2} \neq \frac{4}{b} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b \neq -8 \end{cases}$

c) Serán perpendiculares cuando los vectores perpendiculares a los planos sean perpendiculares entre sí o sea, cuando el producto escalar de los vectores perpendiculares a los planos (los formados por los coeficientes de las incógnitas) sea 0 $(a,2,1) \cdot (2,-4,-2) = 0 \Rightarrow 2a - 8 - 2 = 0 \Rightarrow a = 5$



PROPUESTA B

1B. a) Calcula para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ se verifica la igualdad

$$\lim_{x\to 0}(\cos(ax))^{\frac{1}{x^2}} = e^{-2} \qquad \textbf{(1,25 puntos)}$$

b) Calcula el límite

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right) \qquad \textbf{(1,25 puntos)}$$

2B. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{2\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx, \qquad \int (x^2+2x)\ln x\;dx \qquad \textbf{(1,25 puntos por integral)}$$

3B. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ -4x & - & 2y & + & mz & = & 0 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \qquad m \in \mathbb{R}$$

a) ¿Existe algún valor del parámetro m para el que el sistema sea incompatible? **(0,5 puntos)**

b) Estudia para qué valor del parámetro m el sistema tiene alguna solución distinta de la trivial $x = y = z = 0$. **(1 punto)**

c) Resuelve el sistema para todos los valores de $m \in \mathbb{R}$. **(1 punto)**

4B. Dados el punto $P(1, 0, 1)$ y la recta

$$r \equiv \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 2+\lambda \end{array}\right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta s que corta perpendicularmente a r y pasa por el punto P. **(1,25 puntos)**

b) Calcula el punto simétrico Q de P respecto a r. **(1,25 puntos)**

B1.- Solución:

a)Aplicando que el logaritmo del límite es igual al límite del logaritmo y dos veces L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}(\cos(ax))^{1/x^2} = e^{-2} \Rightarrow L\lim_{x\to 0}(\cos(ax))^{1/x^2} = Le^{-2} \Rightarrow \lim_{x\to 0} L(\cos(ax))^{1/x^2} = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{L(\cos(ax))}{x^2} = -2 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{-asen(ax)}{2x\cos(ax)} = -2 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{-a\tan(ax)}{2x} = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{-a^2(1+\tan^2(ax))}{2} = -2 \Rightarrow \frac{a^2}{2} = 2 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$$

b)

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}) = \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}(x+1-x+1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} =$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{2\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{2}{\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = 1$$

B2.-Solución:

a)Se trata de una integral de la forma $\int\frac{cf'(x)}{1+(f(x))^2}dx = c\arctan(f(x))+K$

$\int\frac{2\cos(x)}{1+sen^2(x)}dx = 2\arctan(sen(x))+K$ también podemos hacer sen(x) = t

b) La hacemos "por partes"

$$\begin{cases} u = Lx \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = (x^2+2x)dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3}+x^2 \end{cases} \Rightarrow \int(x^2+2x)Lxdx = \left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)Lx - \int(\frac{x^3}{3}+x^2)\frac{1}{x}dx =$$

$$(\frac{x^3}{3}+x^2)Lx - \int(\frac{x^3}{3}+x^2)\frac{1}{x}dx = (\frac{x^3}{3}+x^2)Lx - \int(\frac{x^2}{3}+x)dx = (\frac{x^3}{3}+x^2)Lx - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} + K$$

B3.- Solución:

Como el sistema es homogéneo, siempre tiene la solución (0,0,0), es decir para cualquier m tiene solución. Los rangos de la matriz de coeficientes y ampliada son iguales para cualquier valor de m porque la diferencia es una columna de ceros. Cuando el determinante de la matriz de coeficientes de las incógnitas sea cero el sistema será compatible indeterminado porque el rango de la matriz de coeficientes será menor que el número de incógnitas

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & m \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2m + 2 = 0 \Rightarrow m = -1 \Rightarrow \begin{cases} \text{Rango de la matriz de coeficientes es 2} \\ \text{cuando m = -1 pues } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \\ \text{y el sistema es compatible indeterminado} \end{cases}$$

Cuando m = -1

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -4x - 2y + mz = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \lambda \\ 3x + y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -3\lambda \\ y = \lambda + \dfrac{3}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\dfrac{-3}{2}\lambda \,,\, \dfrac{5}{2}\lambda \,,\, \lambda) \\ \text{es la solución general en este caso} \end{cases}$$

B4.- Solución:

Buscamos un punto R (r_1,r_2,r_3) de la recta r tal que el vector PR sea perpendicular al vector director de r que es (1,1,1), por tanto su producto escalar debe ser 0

$$(\lambda - 1 \,,\, 1 + \lambda - 0 \,,\, 2 + \lambda - 1)\cdot(1,1,1) = 0 \Rightarrow \lambda - 1 + 1 + \lambda + 2 + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow 3\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = \frac{-1}{3}$$

$$\text{luego R } (\frac{-1}{3}, 1 - \frac{1}{3}, 2 - \frac{1}{3}) = (\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}), \text{ el vector PR} = (-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \Rightarrow (-2,1,1) \text{ es proporcional}$$

$$\text{La recta } s \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\mu \\ y = \quad \mu \\ z = 1 + \mu \end{cases}$$

El punto R hallado anteriormente debe ser el punto medio de PQ, luego

$$\begin{cases} \dfrac{1 + q_1}{2} = \dfrac{-1}{3} \\ \dfrac{q_2}{2} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1 + q_3}{2} = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = \dfrac{-5}{3} \\ q_2 = \dfrac{4}{3} \\ q_3 = \dfrac{7}{3} \end{cases}$$