UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{ax}, & \text{si } x < 0 \\[2ex] \left(\dfrac{2x+7}{2x+1}\right)^x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

sea continua en $x = 0$. **(1,25 puntos)**

b) Calcula el límite

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \qquad \textbf{(1,25 puntos)}$$

2A. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{1 + x + \sqrt{x}}{x^2}\, dx, \qquad \int \frac{e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2}\, dx \qquad \textbf{(1,25 puntos por integral)}$$

Observación: El cambio de variable $t = e^x$ puede ayudarte a calcular la segunda integral.

3A. a) Despeja X en la ecuación matricial $X \cdot A - B = 2X$, donde A, B y X son matrices cuadradas de orden 3. **(1,25 puntos)**

b) Calcula X, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1,25 puntos)}$$

4A. a) Estudia la posición relativa de las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - z = 2 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = a \end{cases}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. **(2 puntos)**

b) Encuentra el punto de corte de las rectas en el caso en que sean secantes. **(0,5 puntos)**

(sigue a la vuelta)

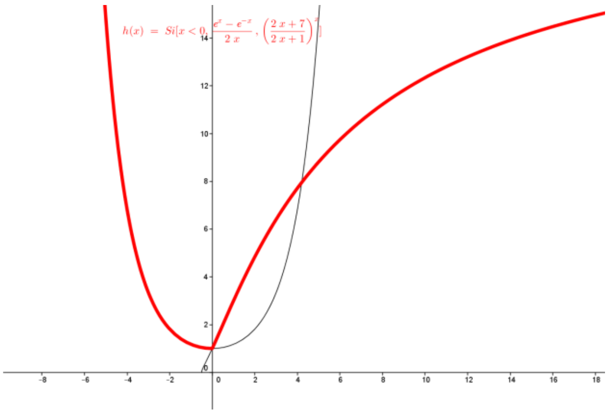
A1.- Solución:

Para ser continua debe estar definida, tener límite por la derecha y por la izquierda y que ambos coincidan con el valor de la función, que en este caso es 1

$$a)\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^x-e^{-x}}{ax} = \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^x+e^{-x}}{a} = \dfrac{2}{a}\ \text{(Aplicando L' Hopital)} \\ \lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2x+7}{2x+1}\right)^x = \left(\dfrac{7}{1}\right)^0 = 1\end{cases} \Rightarrow \frac{2}{a}=1 \Rightarrow a=2$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+7}{2x+1}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{6}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{6}}\right)^{\frac{6x}{2x+1}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{6}}\right)^{\frac{2x+1}{6}}\right)^{\frac{6x}{2x+1}} = e^3$$

También $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+7}{2x+1}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{2x+7}{2x+1}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{6}{2x+1}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x}{2x+1}} = e^3$$



A2.- Solución:

$$\int\frac{1+x+\sqrt{x}}{x^2}dx = \int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx = \int(x^{-2}+\frac{1}{x}+x^{-\frac{3}{2}})dx = -x^{-1}+Lx-2x^{-1/2}+k$$

$$\int\frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}dx = \int\frac{dt}{t^2-3t+2} = \int\frac{dt}{(t-1)(t-2)} = \int\left(\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t-2}\right)dt = \int\left(\frac{-1}{t-1}+\frac{1}{t-2}\right)dt =$$

$$= -L(t-1)+L(t-2) = L\frac{e^x-2}{e^x-1}+k$$

$$\begin{cases}\text{Calculos para descomponer en fracciones}\ t^2-3t+2=0 \Rightarrow t=1,\ t=2 \\ \dfrac{1}{(t-1)(t-2)} = \dfrac{A}{t-1}+\dfrac{B}{t-2} \Rightarrow 1 = A(t-2)+B(t-1) \Rightarrow \begin{cases} t=2 \Rightarrow 1=B \\ t=1 \Rightarrow 1=-A \Rightarrow A=-1\end{cases}\end{cases}$$

$$\text{Cálculos para el cambio de variable } e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt,\ \ e^{2x}=t^2$$

A3.- Solución:

$$X\cdot A-2X=B\Rightarrow X\cdot A-2X\cdot I=B\Rightarrow X(A-2I)=B\Rightarrow X=B(A-2I)^{-1}$$

$$(A-2I)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{|A-2I|}(\text{traspuesta de adjuntos})=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&2&0\\3&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$B\cdot(A-2I)^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&-2\\0&-1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&2&0\\3&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&4&-2\\11&-7&3\end{pmatrix}=X$$

A4.- Solución:

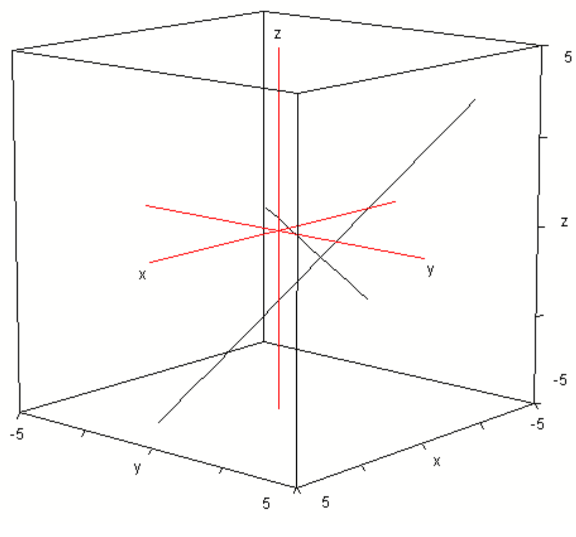
La recta *r* viene dada por un sistema compatible indeterminado cuyas infinitas soluciones son los puntos de *r* (intersección de dos planos. Lo mismo podemos decir de la recta *s*). Si consideramos el sistema formado por las ecuaciones de *r* y el primer plano de *s*, y resulta que tiene solución única, esto implicará que las rectas *r* y *s* deben cortarse en ese punto, y por tanto el segundo plano tiene que pasar también por él.

$$\begin{cases}x-2z=1\\y-z=2\\x+y+z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1+2z\\y=2+z\\1+2z+2+z+z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4z=-2\Rightarrow z=\dfrac{-1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

Este punto nos sirve para determinar *a*, sólo tenemos que sustituirlo en el segundo plano de *s*

$$0-2\left(\frac{3}{2}\right)+2\left(\frac{-1}{2}\right)=a\Rightarrow a=-4$$

Cuando $a\neq-4$ la recta *r* y la recta *s* no se cortan, se cruzan porque sus vectores directores no son proporcionales. Los sacamos del producto vectorial de los vectores asociados a los planos que determinan *r* (1,0,-2)x(0,1,-1)=(2,1,1) y los que determinan *s* (1,1,1)x(1,-2,2)=(4,-1,-3).



Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

PROPUESTA B

1B. a) Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto. **(1 punto)**

b) Halla el punto de la gráfica de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ donde la recta tangente tiene pendiente mínima. **(1,5 puntos)**

2B. a) Esboza la región encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = 1/x$ y $g(x) = -2x + 3$. **(0,5 puntos)**

b) Calcula el área de la región anterior. **(2 puntos)**

3B. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

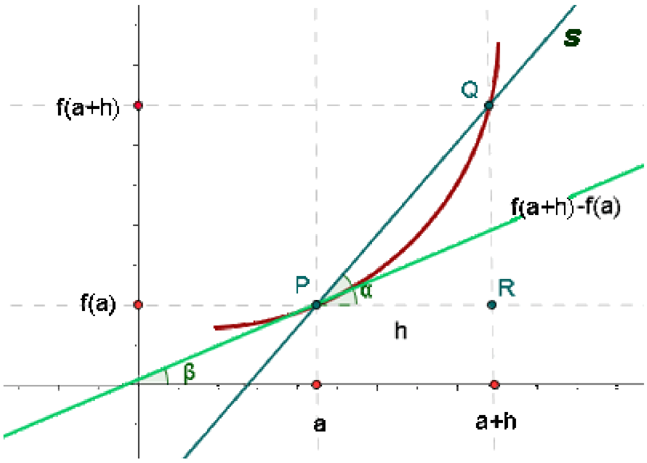
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 5z & = & -1 \\ 2x & - & y & - & 3z & = & 1-m \\ x & - & 2y & + & 2z & = & m \end{array}\right.$$ **(1,5 puntos)**

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado. **(1 punto)**

4B. a) Dados los puntos $P(4, 2, 3)$ y $Q(2, 0, -5)$, da la ecuación implícita del plano π de modo que el punto simétrico de P respecto a π es Q. **(1,25 puntos)**

b) Calcula el valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el plano determinado por los puntos P, Q y $R(\lambda, 1, 0)$ pase por el origen de coordenadas. **(1,25 puntos)**

B1.- Solución:

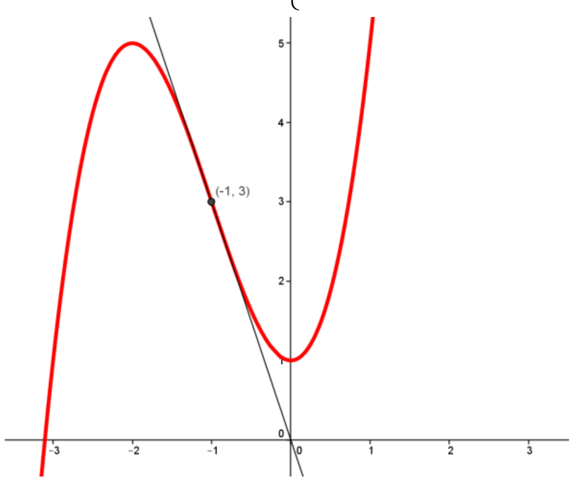


Cuando h tiende a 0, el punto Q tiende a confundirse con el P. Entonces la recta secante tiende a ser la recta tangente a la función f(x) en P, y por tanto el ángulo α tiende a ser β.

La derivada en el punto *a* es la tangente del ángulo β pues por definición: $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ Es decir la derivada es la tangente del ángulo que forma la recta tangente a la curva en el punto (a,f(a)) con la horizontal

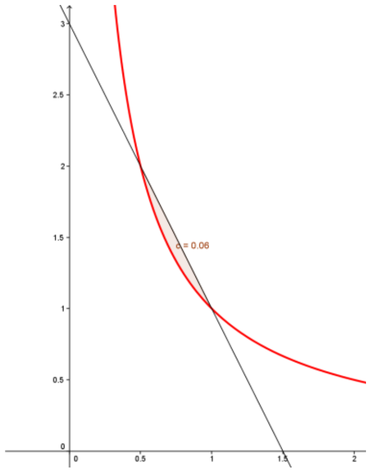
La derivada primera nos da los valores de la tangente en cada punto. Las derivadas segunda y tercera nos sirven para calcular los máximos y mínimos de la derivada primera, por tanto los máximos y mínimos de la tangente

$$f(x)=x^3+3x^2+1 \Rightarrow f'(x)=3x^2+6x \Rightarrow \begin{cases} f''(x)=6x+6 \Rightarrow \begin{cases} f'''(x)=6 \\ f''(x)=0 \\ 6x+6=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases} \\ f'''(-1)=6>0 \Rightarrow \text{Mínimo en } (\text{-}1, f'(-1))= \\ =(-1,-3) \end{cases}$$



B2.- Solución:

La función f es la función de proporcionalidad inversa y la g es una recta con pendiente -2 y ordenada en el origen 3, la gráfica de ambas es:



Los puntos de corte de ambas son:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ y = -2x+3 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \dfrac{1}{x} = -2x+3 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = 2 \Rightarrow y = 1/2 \end{cases} \right.$$

Luego el área encerrada es: $\int_{1/2}^{1} (-2x+3-\frac{1}{x})dx = [-x^2+3x-Lx]_{1/2}^{1} = \frac{3}{4} - L2$

B3.- Solución:

El rango de la matriz de coeficientes de las incógnitas es 2 porque:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

El rango de la matriz ampliada

$$\begin{cases} \text{Es 2 cuando} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1-m \\ 1 & -2 & m \end{vmatrix} = 6 - 6m = 0 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow \text{comp indeterm.} \\ \text{y 3 cuando } m \neq 1 \Rightarrow \text{Sistema incompatible} \end{cases}$$

Cuando m=1 el sistema se puede resolver así:

$$\begin{cases} x + y - 5z = -1 \\ 2x - y - 3z = 0 \\ x - 2y + 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 + 5z \\ 2x - y = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = -1 + 8z \Rightarrow x = \dfrac{-1}{3} + \dfrac{8}{3}\lambda \\ y = 2x - 3z \Rightarrow y = \dfrac{-2}{3} + \dfrac{7}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

B4.- Solución:

a) Un punto del plano es el punto medio del segmento PQ cuyas coordenadas son la semisuma de los extremos, es decir el punto M(3,1,-1) y un vector perpendicular al plano es $\overrightarrow{QP} = (2,2,8)$ o también $(1,1,4)$, luego $(x-3)+(y-1)+4(z+1)=0 \Rightarrow x+y+4z=0$

Es la ecuación del plano pedida

b) Los puntos P,Q,R y el origen deben satisfacer una ecuación de la forma Ax+By+Cz=0 por pertenecer al plano, luego $\begin{cases} A4+B2+C3=0 \\ A2 \quad\quad +C(-5)=0 \\ A\lambda+B \quad\quad =0 \end{cases}$ Este sistema debe tener solución distinta de la trivial (0,0,0) Porque A,B,C no pueden ser simultáneamente cero ya que necesitamos que la ecuación exista, por tanto el determinante de los coeficientes de las incógnitas debe ser igual a cero $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \\ \lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 26-10\lambda=0 \Rightarrow \lambda=\frac{13}{5}$

$$\begin{cases} A4+B2+C3=0 \\ A2 \quad\quad +C(-5)=0 \\ A\frac{13}{5}+B \quad\quad =0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A \quad\quad -5C=0 \\ 13A+5B \quad\quad =0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A=5\mu \\ 13A+5B=0 \\ C=\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{5}{2}\mu \\ B=-\frac{13}{2}\mu \\ C=\mu \end{cases}$$

Entonces tenemos que A=5, B=-13, C=2 es una solución y 5x-13y+2z=0 es una ecuación del plano buscado. (Cualquier otra con los coeficientes proporcionales también es válida)