

4.- Funciones derivables

4.6. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ 5x^2 - 10x + 7 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Demostrar que f es derivable en $x = 1$ y calcular $f'(1)$.
- Determinar la función derivada $f'(x)$.
- Hallar las rectas tangente y normal a la curva en $x = 1$.

(Solución: $f'(1) = 0$, $f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 10x - 10 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, tangente: $y = 1$; normal: $x = 2$)

4.7. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 3 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

- ¿Es derivable en $x = 0$?
- ¿Es continua en $x = 0$?
- Representa gráficamente.

4.8. Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = |2x - 6|$

b) $f(x) = \begin{cases} 4x - 2 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{5 - 8x}{2} & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 6x + 7 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ \frac{x - 6}{2} & \text{si } x > 4 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x + 7} & \text{si } x \geq 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

4.9. Dada la función $f(x) = a^x \cdot x^2$, la función derivada no es $f'(x) = a^{x-1} \cdot x^2 + 2x \cdot a^x$. ¿Dónde está mal? Encuentra la función derivada.

4.10. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 4x - 1 & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ x^2 - x - \frac{7}{4} & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Demostrar que f es derivable en $x = \frac{1}{2}$ y calcular $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.
- Encontrar la función derivada $f'(x)$.

4.11. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9-x^2}{x-1} & \text{si } x \geq 3 \\ \sqrt{3-x} & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

4.12. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función f en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

4.13. Dada la función $f(x) = |2x - 2| - 2$

- Definirla como una función a trozos.
- Estudiar, a partir de la definición, la continuidad y derivabilidad de f en el punto $x = 1$.

4.14. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- Determinar razonadamente el valor de a para que la función sea derivable en $x = 0$. Para dicho valor, calcular la función derivada.
- Aplicando la definición de derivada en un punto calcula $f'(3)$

4.15. Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + m^2}{x + n}$$

Determinar m y n para que la función verifique que $f'(3) = 0$ y $f''(0) = 32$.

(Solución: $n = 1$, $m = \sqrt{15}$)

4.16. Determinar para qué valores de x se anula la segunda derivada de la función:

$$f(x) = 2\operatorname{arctg}\left(e^x + \sqrt{e^{2x} + 1}\right)$$

(Solución: $x = 0$)

4.17. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1-x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{2}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- Estudia su continuidad y derivabilidad.
- Determina la función derivada de f .

(Solución: Derivable en $\mathbb{R} - \{0,1\}$, continua en $\mathbb{R} - \{1\}$)

4.18. Determinar a y b para que la función f sea derivable y continua en todo \mathbb{R} :

$$f(x) = \begin{cases} ax-3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2+10x-b & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

(Solución: $a = 2$, $b = 19$)

4.19. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 6x+b & \text{si } x \geq 4 \\ 2x^2+ax+3 & \text{si } x < 4 \end{cases}$$

- Determinar las constantes a y b para que la función f sea continua y derivable en $x = 4$.
- En las condiciones del apartado anterior, calcular $f'(-2)$ y $f'(8)$
- Representa gráficamente la función f'' y demuestra que no existe $f''(4)$

(Solución: $a = -10$, $b = -29$)

4.20. Hallar dos números reales a y b para que la función f sea derivable en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2+ax+2b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(Solución: $a = 1$, $b = 0$)

4.21. Halla los valores de a y b para que las siguientes funciones sean continuas y derivables:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 3x^2-ax+b & \text{si } x < 1 \\ ax^3-bx+2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 3x^2+1 & \text{si } x < 0 \\ x^3+ax^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ bx+\ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

4.22. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{ax+b} & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{6-x}{2\sqrt{2}} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- Calcular a y b para que sea continua para todo número real.
- ¿Es derivable la función resultante?

(Solución: $a = -1$, $b = 4$, f derivable $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$)