

14. Paso de radianes a grados y de grados a radianes.-

Planteamos las siguientes cuestiones:

Dado un ángulo en **radianes**, ¿cómo expresarlo en **grados**?

Dado un ángulo en **grados**, ¿cómo expresarlo en **radianes**?

Para ello tendremos en cuenta la siguiente relación entre radianes y grados sexagesimales.

$$\begin{array}{c} 2\pi \text{ radianes son } 360^\circ \\ \text{o mejor} \\ \pi \text{ radianes son } 180^\circ \end{array}$$

Utilizando alguna de las dos relaciones anteriores y con una *regla de tres* simple obtenemos el paso de grados a radianes y viceversa.

Ejemplo 14.-

La medida de un ángulo en radianes es $\frac{\pi}{4}$. Expresa dicho ángulo en grados.

Veamos:

Llamamos α al ángulo: $\alpha = \frac{\pi}{4}$ *radianes*.

Como $\pi = 180^\circ$, entonces: $\alpha = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$

Ejemplo 15.-

Queremos expresar el ángulo $\beta = 2,4$ *radianes* en grados sexagesimales.

Veamos:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \text{ radianes} \xrightarrow{\text{son}} 180^\circ \\ 2,4 \text{ " } \rightarrow x \end{array} \right\} x = \frac{2,4 \cdot 180}{\pi} = \frac{432}{3'141592654} = 137,5098708^\circ$$

Por tanto:

$$\alpha = 137,5098708^\circ \quad \equiv \quad 137^\circ 30' 35,5''$$

pasando a minutos y segundos

Ejemplo 16.-

Hallemos la medida de un **radian** en grados, minuto y segundos.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \text{ radianes} \xrightarrow{\text{son}} 180^\circ \\ 1 \text{ " } \rightarrow x \end{array} \right\} x = \frac{180}{\pi} = \frac{180}{3'141592654} = 57,29577951^\circ$$

Por tanto:

$$\alpha = 57,29577951^\circ = 57^\circ 17' 44,81'' \approx 57^\circ 17' 45''$$

Ejemplo 17.-

Queremos expresar en radianes los ángulos $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$ y $\gamma = 135^\circ$
Veamos:

$$\textcircled{1} \quad \left. \begin{array}{l} 180^\circ \xrightarrow{\text{son}} \pi \text{ radianes} \\ 30^\circ \rightarrow x \end{array} \right\} x = \frac{30\pi}{180} = \frac{3\pi}{18} = \frac{\pi}{6} \text{ radianes} \quad \boxed{\alpha = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}}$$

$$\textcircled{2} \quad \left. \begin{array}{l} 180^\circ \xrightarrow{\text{son}} \pi \text{ radianes} \\ 60^\circ \rightarrow x \end{array} \right\} x = \frac{60\pi}{180} = \frac{6\pi}{18} = \frac{\pi}{3} \text{ radianes} \quad \boxed{\beta = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}}$$

$$\textcircled{3} \quad \left. \begin{array}{l} 180^\circ \xrightarrow{\text{son}} \pi \text{ radianes} \\ 135^\circ \rightarrow x \end{array} \right\} x = \frac{27\pi}{36} = \frac{3\pi}{4} \text{ radianes} \quad \boxed{\alpha = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}}$$

Ejemplo 18.-

Queremos expresar en radianes el ángulo $\alpha = 22^\circ 40' 54''$
Veamos:

✓ Primero expresamos el ángulo α en grados :

$$\left. \begin{array}{l} 60'' \xrightarrow{\text{son}} 1' \\ 54'' \rightarrow x \end{array} \right\} x = \frac{54}{60} = 0,9' \Rightarrow \alpha = 22^\circ 40,9'$$

$$\left. \begin{array}{l} 60' \xrightarrow{\text{son}} 1^\circ \\ 40,9' \rightarrow x \end{array} \right\} x = \frac{40,9}{60} = 0,681\bar{6} \Rightarrow \alpha = 22,681\bar{6}^\circ \approx 22,68167^\circ$$

✓ Ahora expresamos el ángulo en radianes:

$$\left. \begin{array}{l} 180^\circ \xrightarrow{\text{son}} \pi \text{ radianes} \\ 22,68167^\circ \rightarrow x \end{array} \right\} x = \frac{22,68167\pi}{180} = 0,126009277\pi \text{ radianes}$$

Por tanto:

$$\boxed{\alpha = 22^\circ 40' 54'' = 0,126009277\pi \text{ rad.}}$$

15. Operaciones con ángulos.-

Los ángulos son magnitudes que pueden medirse. Ya hemos visto que estas medidas son un valor numérico y estos valores son factibles de sumarse, restarse etc. Veamos algunas de estas operaciones.

Suma de ángulos.-

La *figura 20* ilustra como se suman dos ángulos de un modo gráfico, aunque puede realizarse de una forma más efectiva utilizando el compás. En el anexo de actividades se propone alguna suma gráfica de ángulos.

Figura 20

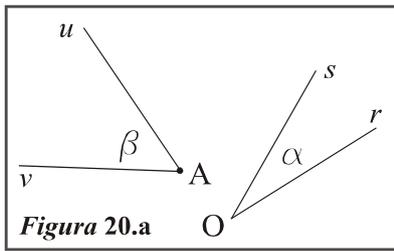


Figura 20.a

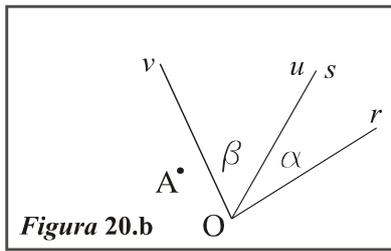


Figura 20.b

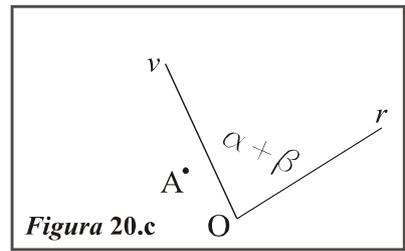


Figura 20.c

Figura 20.a
Tenemos dos ángulos α y β de vértices O y A respectivamente.

Figura 20.b
Hemos “trasladado” el ángulo β al vértice O, haciendo coincidir el lado u con el lado s.

Figura 20.c
El nuevo ángulo de vértice O y lados r y v tiene una medida igual a $\alpha + \beta$

Ejemplo 19.-

Dados los ángulos $\alpha = 43^\circ 49' 35''$ y $\beta = 74^\circ 24' 51''$, hallar la medida de $\alpha + \beta$

Veamos:

Llamemos $\gamma = \alpha + \beta$

$\alpha = 43^\circ 49' 35''$

$\beta = 74^\circ 24' 51''$

$\gamma = 117^\circ 73' 86'' = 117^\circ 74' 26'' = 118^\circ 14' 26''$

$\gamma = \alpha + \beta = 118^\circ 14' 26''$

Resta de ángulos.-

La figura 21 ilustra como se restan dos ángulos de un modo gráfico, aunque puede realizarse de una forma más efectiva utilizando el compás. En el anexo de actividades se propone alguna resta gráfica de ángulos.

Figura 21

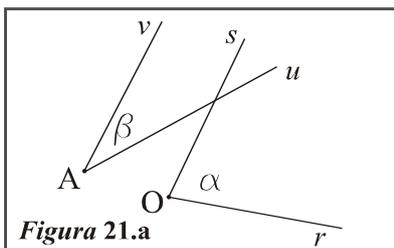


Figura 21.a

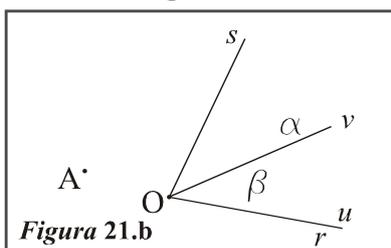


Figura 21.b

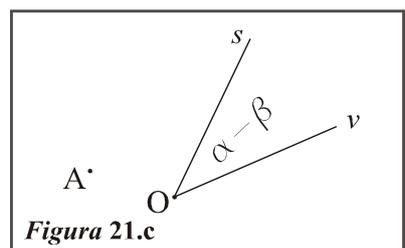


Figura 21.c

Figura 21.a
Tenemos dos ángulos α y β de vértices O y A respectivamente.

Figura 21.b
Hemos “trasladado” el ángulo β al vértice O, haciendo coincidir el lado u con el lado r.

Figura 21.c
El nuevo ángulo de vértice O y lados v y s tiene una medida igual a $\alpha - \beta$

Ejemplo 20.-

Dados los ángulos $\alpha = 103^\circ 19' 38''$ y $\beta = 78^\circ 39' 54''$, hallar la medida de $\alpha - \beta$

Veamos:

Llamemos $\gamma = \alpha - \beta$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 103^\circ 19' 38'' \\ \beta = 78^\circ 39' 55'' \end{array} \right\} \begin{array}{l} \alpha \text{ es el minuendo} \\ \beta \text{ es el sustraendo} \end{array}$$

Expresamos α de otro modo para hacer que los valores del minuendo sean superiores a los del sustraendo.

$$\alpha = 103^\circ 19' 38'' = 103^\circ 18' 98'' = 102^\circ 78' 98''$$

$$\beta = 78^\circ 39' 55'' = 78^\circ 39' 55'' = 78^\circ 39' 55''$$

$$\text{Restamos} \qquad \qquad \qquad \alpha - \beta = 24^\circ 39' 43''$$

$$\gamma = \alpha - \beta = 24^\circ 39' 43''$$

Producto de un número por un ángulo.-

Si α es la medida de un ángulo y k es un número real, la expresión $k \cdot \alpha$, o mejor $k\alpha$, indica la medida de un ángulo cuyo valor es el resultado de multiplicar los valores numéricos k y α .

Ejemplo 21.-

Consideremos un ángulo $\alpha = 62^\circ 43' 34''$. La expresión 2α equivale al ángulo $\alpha + \alpha$, es decir:

$$\begin{aligned} 2\alpha = \alpha + \alpha &= 2 \cdot 62^\circ \quad 2 \cdot 43' \quad 2 \cdot 34'' = 124^\circ 86' 68'' = 124^\circ 87' 8'' = \\ &= 125^\circ 27' 8'' \end{aligned}$$

Ejemplo 22.-

Dado el ángulo $\beta = 72^\circ 53' 25''$, queremos hallar el ángulo $1,2\beta$
Veamos:

$$1,2 \cdot \beta = 1,2 \cdot 72^\circ \quad 1,2 \cdot 53' \quad 1,2 \cdot 25'' = 86,4^\circ 63,6' 30'' = (*)$$

$$\left. \begin{array}{l} 1^\circ \rightarrow 60'' \\ 0,4^\circ \rightarrow x \end{array} \right\} x = 24'' \Rightarrow 1,2 \cdot \beta = 86^\circ 63,6' 54''$$

$$\left. \begin{array}{l} 1' \rightarrow 60'' \\ 0,6' \rightarrow x \end{array} \right\} x = 36'' \Rightarrow 1,2 \cdot \beta = 86^\circ 67' 90''$$

$$(*) \quad 1,2 \beta = 87^\circ 27' 45,6''$$

16. Razones trigonométricas o circulares de un ángulo.-

Sea α un ángulo cualquiera.

Vamos a definir lo que llamaremos “razones trigonométricas del ángulo α ”

Dichas *razones trigonométricas* (o circulares) son seis y se denominan:

seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante

La siguiente tabla nos muestra como se lee y como se escribe abreviadamente cada una de ellas:

Se lee	Se escribe
seno de α	$sen \alpha$
coseno de α	$cos \alpha$
tangente de α	$tg \alpha$
cotangente de α	$ctg \alpha$
secante de α	$sec \alpha$
cosecante de α	$cosec \alpha$

NOTA: Es posible que en otros textos o en ocasiones la terminología cambie y en lugar de *tg* encuentres *tang*, o *cotang* en vez de *ctg*, etc.

Una razón trigonométrica de un ángulo es un número que puede ser positivo, negativo o cero y su valor dependerá de la medida del ángulo.

Antes de entrar en las definiciones de las razones trigonométricas de un ángulo, diremos que un ángulo puede ser del **cuadrante I**, del **cuadrante II**, del **cuadrante III** o del **cuadrante IV**. Expliquemos esto:

A la derecha, *figura 22*, tenemos representado un sistema de ejes rectangulares con origen en el punto O.

Observa que dicho sistema divide al plano en cuatro zonas o regiones iguales e infinitas llamadas cuadrantes.

Los cuadrantes los enumeramos utilizando la numeración romana, de la siguiente forma:

- Cuadrante I
- Cuadrante II
- Cuadrante III
- Cuadrante IV

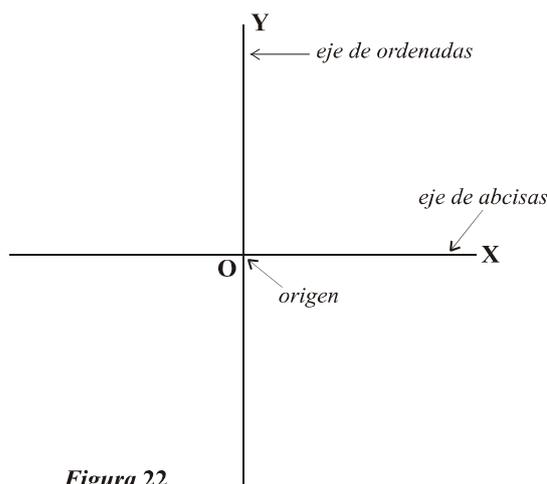


Figura 22

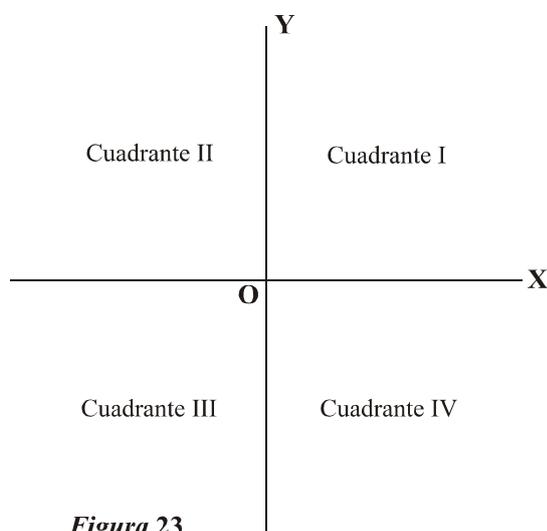


Figura 23

En la figura 23 tenemos determinados los cuatro cuadrantes del siguiente modo:

$$A(x,y) \text{ punto del plano } \begin{cases} x = \text{abcisa} \\ y = \text{ordenada} \end{cases}$$

Si A está en el cuadrante I, entonces $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Si A está en el cuadrante II, entonces $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Si A está en el cuadrante III, entonces $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$

Si A está en el cuadrante IV, entonces $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$

✓ **Ángulos del cuadrante I:**

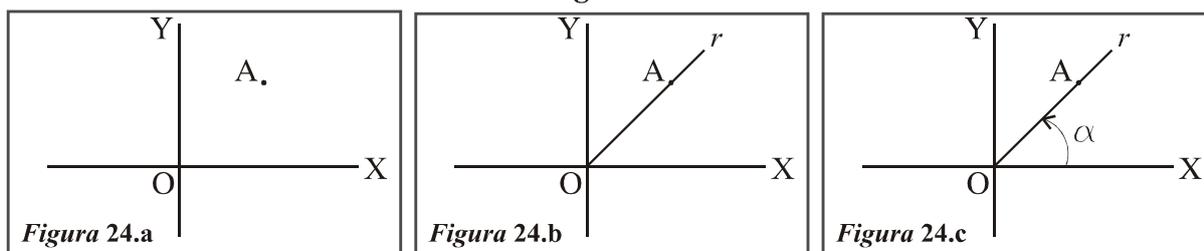
Tomemos un punto cualquiera $A(x,y)$ del cuadrante I. En este caso será $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Tracemos una semirrecta r de origen O y que pase por el punto $A(x,y)$.

Consideremos el ángulo α que forma el eje de abscisas con la semirrecta r tomado en sentido positivo.

¡Pues bien! El ángulo α es un ángulo del **cuadrante I**. La *figura 24* ilustra el proceso.

Figura 24



✓ **Ángulos del cuadrante II:**

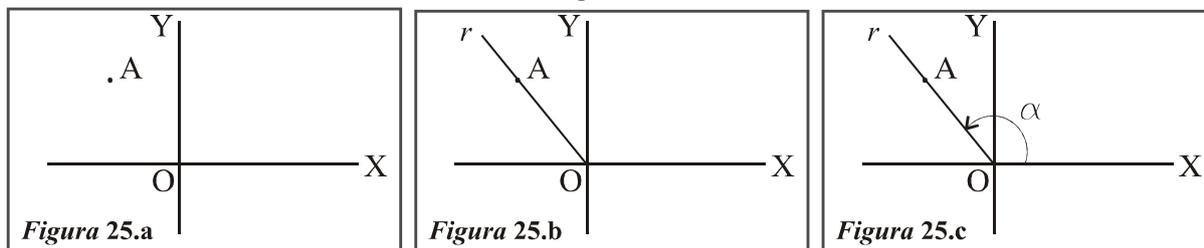
Tomemos un punto cualquiera $A(x,y)$ del cuadrante II. En este caso será $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Tracemos una semirrecta r de origen O y que pase por el punto $A(x,y)$.

Consideremos el ángulo α que forma el eje de abscisas con la semirrecta r tomado en sentido positivo.

¡Pues bien! El ángulo α es un ángulo del **cuadrante II**. La *figura 25* ilustra el proceso.

Figura 25



✓ **Ángulos del cuadrante III:**

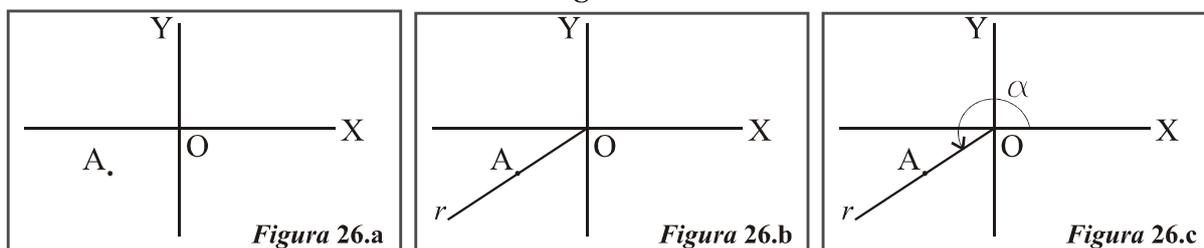
Tomemos un punto cualquiera $A(x,y)$ del cuadrante III. En este caso será $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$

Tracemos una semirrecta r de origen O y que pase por el punto $A(x,y)$.

Consideremos el ángulo α que forma el eje de abscisas con la semirrecta r tomado en sentido positivo.

¡Pues bien! El ángulo α es un ángulo del **cuadrante III**. La *figura 26* ilustra el proceso.

Figura 26



✓ Ángulos del cuadrante IV:

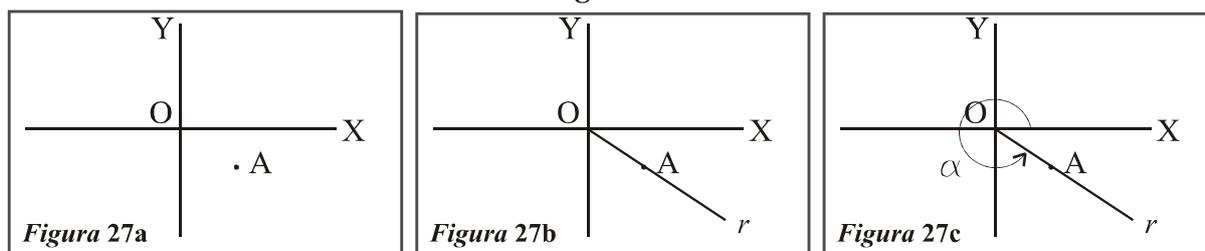
Tomemos un punto cualquiera $A(x,y)$ del cuadrante IV. En este caso será $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$

Tracemos una semirrecta r de origen O y que pase por el punto $A(x,y)$.

Consideremos el ángulo α que forma el eje de abscisas con la semirrecta r tomado en sentido positivo.

¡Pues bien! El ángulo α es un ángulo del **cuadrante IV**. La *figura 27* ilustra el proceso

Figura 27

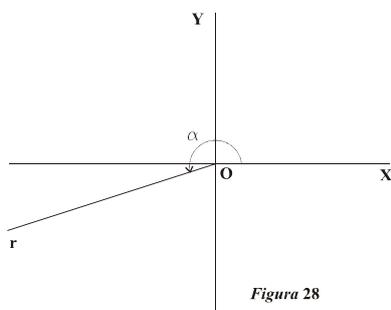


Nótese lo siguiente:

- * Si α es del cuadrante I, entonces $0^\circ < \alpha < 90^\circ$
- * Si α es del cuadrante II, entonces $90^\circ < \alpha < 180^\circ$
- * Si α es del cuadrante III, entonces $180^\circ < \alpha < 270^\circ$
- * Si α es del cuadrante IV, entonces $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

Ejemplo 23.-

Vamos a representar el ángulo $\alpha = 198^\circ$



En la *figura 28* tenemos representado en un sistema de ejes cartesianos el ángulo $\alpha = 198^\circ$, situado en el cuadrante III.

Observa que el vértice es el **punto** O y los lados son el **semieje positivo** de abscisas (eje X) y la **semirrecta** r .

Nótese que $180^\circ < 198^\circ < 270^\circ$

Ahora vamos a definir las razones trigonométricas de un ángulo.

- ✎ Consideremos un sistema de ejes cartesiano rectangular.
- ✎ Sea α un ángulo cualquiera. Vamos a suponer que el ángulo α es del cuadrante I, pero todo que lo expresemos en este caso es válido si α es de otro cuadrante.
- ✎ El ángulo α tendrá de vértice al punto O y de lados el semieje positivo de abscisas (OX) y la semirrecta s de origen O .
- ✎ Sea $A(x,y)$ un punto cualquiera de la semirrecta s (lado del ángulo). Si el ángulo es del cuadrante I, el punto $A(x,y)$ estará en el cuadrante I, es decir, $x > 0$ e $y > 0$
- ✎ Llamamos r a la distancia que hay del punto O al punto A , es decir:
distancia $OA = \overline{OA} = r$ NOTA: r se denomina **radio** y además $r > 0$

La figura 29 ilustra los puntos anteriores:

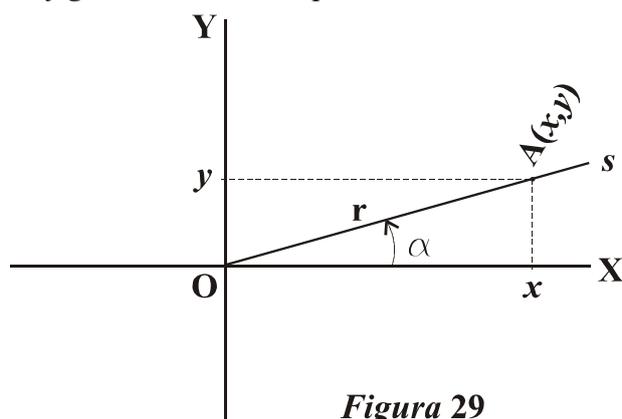


Figura 29

$A(x,y)$ punto $\begin{cases} x \text{ es la abcisa de } A \\ y \text{ es la ordenada de } A \end{cases}$
 radio = $r = d(O,A) = \text{distancia de } O \text{ a } A$
 $r > 0$ por ser una distancia.

α ángulo de vértice O y lados OX y s

Recordemos que $A(x,y)$ es un punto cualquiera situado en la semirrecta s .

Nótese que en este caso $x > 0$ e $y > 0$ por ser α un ángulo del cuadrante I.

Definimos:

$$\text{seno de } \alpha = \text{sen } \alpha = \frac{\text{ordenada de } A}{\text{radio}} = \frac{y}{r} = \frac{+}{+} = +$$

$$\text{coseno de } \alpha = \text{cos } \alpha = \frac{\text{abcisa de } A}{\text{radio}} = \frac{x}{r} = \frac{+}{+} = +$$

$$\text{tangente de } \alpha = \text{tg } \alpha = \frac{\text{ordenada de } A}{\text{abcisa de } A} = \frac{y}{x} = \frac{+}{+} = +$$

$$\text{cotangente de } \alpha = \text{cotg } \alpha = \frac{\text{abcisa de } A}{\text{ordenada de } A} = \frac{x}{y} = \frac{+}{+} = +$$

$$\text{secante de } \alpha = \text{sec } \alpha = \frac{\text{radio}}{\text{abcisa de } A} = \frac{r}{x} = \frac{+}{+} = +$$

$$\text{cosecante de } \alpha = \text{cosec } \alpha = \frac{\text{radio}}{\text{ordenada de } A} = \frac{r}{y} = \frac{+}{+} = +$$

Signos:

Puede verse que al ser $x > 0, y > 0, r > 0$, las seis **razones trigonométricas** de α son positivas. Ello se debe a que $A(x,y)$ es un punto del cuadrante I.

Supongamos el caso de que el ángulo α es del cuadrante II y, por tanto, el punto $A(x,y)$ está situado en el cuadrante II, por lo que $x < 0$ e $y > 0$.

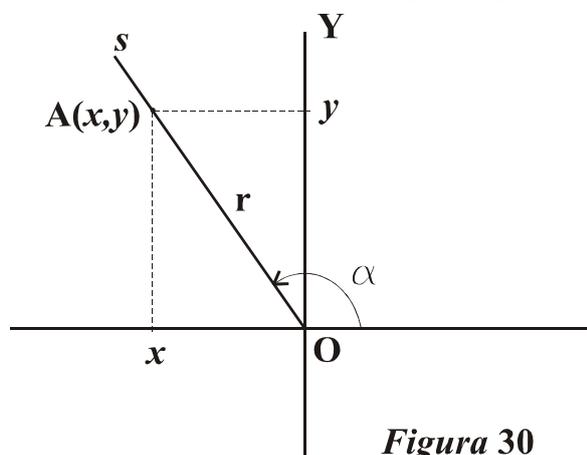


Figura 30

En la figura 30 tenemos:

$A(x,y)$ punto $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad 90^\circ < \alpha < 180^\circ$

radio $r = d(O,A) = \text{positivo (distancia)}$

$A(x,y)$ un punto cualquiera del lado s

Insistimos en que $A(x,y)$ es un punto cualquiera situado en la semirrecta s .

Nótese que en este caso $x < 0$ e $y > 0$ por ser α un ángulo del cuadrante II.

¡Pues bien! En este caso:

$$\text{seno de } \alpha = \text{sen } \alpha = \frac{\text{ordenada de } A}{\text{radio}} = \frac{y}{r} = \frac{+}{+} = +$$

$$\text{coseno de } \alpha = \text{cos } \alpha = \frac{\text{abcisa de } A}{\text{radio}} = \frac{x}{r} = \frac{-}{+} = -$$

$$\text{tangente de } \alpha = \text{tg } \alpha = \frac{\text{ordenada de } A}{\text{abcisa de } A} = \frac{y}{x} = \frac{+}{-} = -$$

$$\text{cotangente de } \alpha = \text{cotg } \alpha = \frac{\text{abcisa de } A}{\text{ordenada de } A} = \frac{x}{y} = \frac{-}{+} = -$$

$$\text{secante de } \alpha = \text{sec } \alpha = \frac{\text{radio}}{\text{abcisa de } A} = \frac{r}{x} = \frac{+}{-} = -$$

$$\text{cosecante de } \alpha = \text{cosec } \alpha = \frac{\text{radio}}{\text{ordenada de } A} = \frac{r}{y} = \frac{+}{+} = +$$

Signos:

Nótese como en este caso (α ángulo del cuadrante II) tenemos:

$$\text{sen } \alpha > 0 ; \text{cos } \alpha < 0 ; \text{tg } \alpha < 0$$

$$\text{cotg } \alpha < 0 ; \text{sec } \alpha < 0 ; \text{cosec } \alpha > 0$$

Supongamos el caso de que el ángulo α es del cuadrante III y, por tanto, el punto $A(x,y)$ está situado en el cuadrante III, por lo que $x < 0$ e $y < 0$.

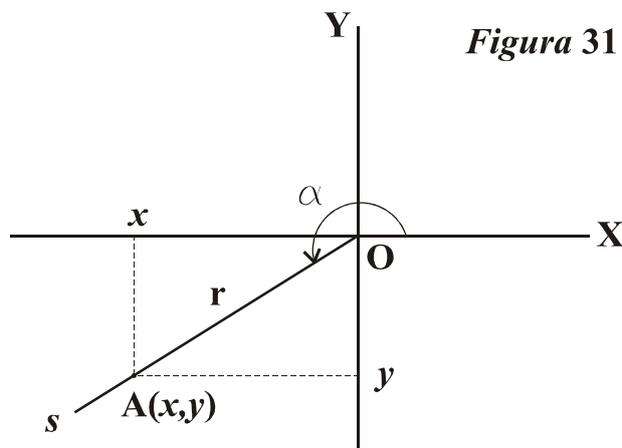


Figura 31 En la figura 31 tenemos:

$$A(x,y) \text{ punto } \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad 180^\circ < \alpha < 270^\circ$$

radio $r = d(O, A) = \text{positivo (distancia)}$

$A(x,y)$ un punto cualquiera del lado s

Insistimos en que $A(x,y)$ es un punto cualquiera situado en la semirrecta s .

Nótese que en este caso $x < 0$ e $y < 0$ por ser α un ángulo del cuadrante III.

¡Pues bien! En este caso:

$$\text{seno de } \alpha = \text{sen } \alpha = \frac{\text{ordenada de } A}{\text{radio}} = \frac{y}{r} = \frac{-}{+} = -$$

$$\text{coseno de } \alpha = \text{cos } \alpha = \frac{\text{abcisa de } A}{\text{radio}} = \frac{x}{r} = \frac{-}{+} = -$$

$$\text{tangente de } \alpha = \text{tg } \alpha = \frac{\text{ordenada de } A}{\text{abcisa de } A} = \frac{y}{x} = \frac{-}{-} = +$$

$$\text{cotangente de } \alpha = \text{cotg } \alpha = \frac{\text{abcisa de } A}{\text{ordenada de } A} = \frac{x}{y} = \frac{-}{-} = +$$

$$\text{secante de } \alpha = \text{sec } \alpha = \frac{\text{radio}}{\text{abcisa de } A} = \frac{r}{x} = \frac{+}{-} = -$$

$$\text{cosecante de } \alpha = \text{cosec } \alpha = \frac{\text{radio}}{\text{ordenada de } A} = \frac{r}{y} = \frac{+}{-} = -$$

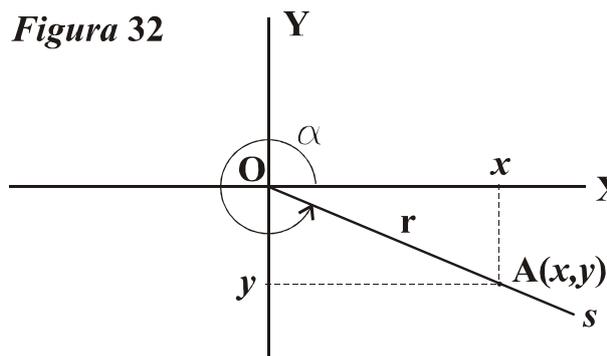
Signos:

Nótese como en este caso (α ángulo del cuadrante III) tenemos:

$$\operatorname{sen} \alpha < 0 ; \operatorname{cos} \alpha < 0 ; \operatorname{tg} \alpha > 0$$

$$\operatorname{cotg} \alpha > 0 ; \operatorname{sec} \alpha < 0 ; \operatorname{cosec} \alpha < 0$$

Supongamos el caso de que el ángulo α es del cuadrante IV y, por tanto, el punto $A(x,y)$ está situado en el cuadrante IV, por lo que $x > 0$ e $y < 0$.

Figura 32

En la figura 32 tenemos:

$$A(x,y) \text{ punto } \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad 270^\circ < \alpha < 360^\circ$$

radio $r = d(O, A) = \text{positivo (distancia)}$

$A(x,y)$ un punto cualquiera del lado s

Insistimos en que $A(x,y)$ es un punto cualquiera situado en la semirrecta s .

Nótese que en este caso $x > 0$ e $y < 0$ por ser α un ángulo del cuadrante IV.

¡Pues bien! En este caso:

$$\text{seno de } \alpha = \operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{ordenada de } A}{\text{radio}} = \frac{y}{r} = \frac{-}{+} = -$$

$$\text{coseno de } \alpha = \operatorname{cos} \alpha = \frac{\text{abcisa de } A}{\text{radio}} = \frac{x}{r} = \frac{+}{+} = +$$

$$\text{tangente de } \alpha = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{ordenada de } A}{\text{abcisa de } A} = \frac{y}{x} = \frac{-}{+} = -$$

$$\text{cotangente de } \alpha = \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\text{abcisa de } A}{\text{ordenada de } A} = \frac{x}{y} = \frac{+}{-} = -$$

$$\text{secante de } \alpha = \operatorname{sec} \alpha = \frac{\text{radio}}{\text{abcisa de } A} = \frac{r}{x} = \frac{+}{+} = +$$

$$\text{cosecante de } \alpha = \operatorname{cosec} \alpha = \frac{\text{radio}}{\text{ordenada de } A} = \frac{r}{y} = \frac{+}{-} = -$$

Ejemplo 24.-

Considera el ángulo $218^\circ 53' 29''$. Indica el signo de cada una de sus razones trigonométricas.

Veamos:

El ángulo dado pertenece al cuadrante III, por lo que:

$$\operatorname{sen} 218^\circ 53' 29'' < 0 ; \operatorname{cos} 218^\circ 53' 29'' < 0$$

$$\operatorname{tg} 218^\circ 53' 29'' > 0 ; \operatorname{cotg} 218^\circ 53' 29'' > 0$$

$$\operatorname{sec} 218^\circ 53' 29'' < 0 ; \operatorname{cosec} 218^\circ 53' 29'' < 0$$

Ejemplo 25.-

Dado el punto del plano $A(-3, 5)$, queremos hallar las razones trigonométricas del ángulo de vértice el origen O y lados el semieje positivo de abscisas y la semirrecta de origen O que pasa por el punto A .

Veamos:

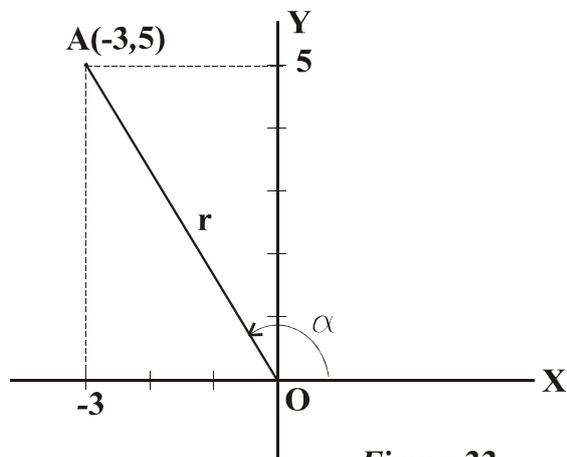


Figura 33

La figura 33 representa el problema gráficamente. Por definición:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{ordenada de } A}{\text{radio}} = \frac{5}{r}$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\text{abscisa de } A}{\text{radio}} = \frac{-3}{r}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{ordenada de } A}{\text{abscisa de } A} = \frac{5}{-3} = -1' \widehat{6}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\text{abscisa de } A}{\text{ordenada de } A} = \frac{-3}{5} = -0' \widehat{6}$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{\text{radio}}{\text{abscisa de } A} = \frac{r}{-3}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\text{radio}}{\text{ordenada de } A} = \frac{r}{5}$$

Necesitamos hallar el valor de r . Nótese que se trata de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 5. Por tanto, aplicando el teorema de Pitágoras:

$$r^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \Rightarrow r = +\sqrt{34}$$

Entonces:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{5\sqrt{34}}{34} \approx 0'857492925$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{-3}{\sqrt{34}} = \frac{-3\sqrt{34}}{34} \approx -0'514495755$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{\sqrt{34}}{-3} \approx -1'94365063$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\sqrt{34}}{5} \approx 1'166190378$$

Observación importante:

Todo parece indicar que las razones trigonométricas de un ángulo α dependen única y exclusivamente de sus coordenadas x e y , así como del radio r (distancia del punto al origen). Sin embargo, ocurre que si elegimos dos puntos distintos $A(x, y)$ y $B(x', y')$ situados en el mismo lado del ángulo, resulta que el ángulo α es el mismo para ambos puntos, es decir:

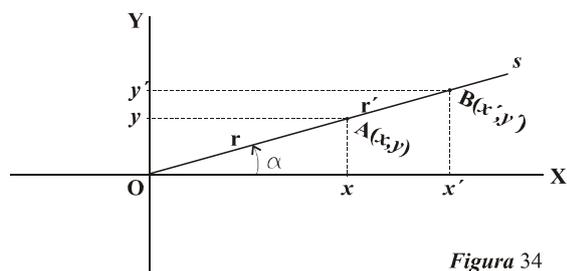


Figura 34

En la figura 34 observamos que:

El ángulo α es el mismo para los puntos A y B .

$$\overline{OA} = r ; \overline{OB} = r'$$

Tenemos que $x \neq x'$; $y \neq y'$; $r \neq r'$

Las razones trigonométricas de α parecen distintas según tomemos el punto A o el punto B , es decir:

$$\begin{aligned}
 \text{Razones de } \alpha \text{ si consideramos } A(x,y) & \left\{ \begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \frac{y}{r} ; \operatorname{cos} \alpha = \frac{x}{r} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y}{x} ; \operatorname{cotg} \alpha = \frac{x}{y} \\ \operatorname{sec} \alpha &= \frac{r}{x} ; \operatorname{cosec} \alpha = \frac{r}{y} \end{aligned} \right. \\
 \text{Razones de } \alpha \text{ si consideramos } B(x',y') & \left\{ \begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \frac{y'}{r'} ; \operatorname{cos} \alpha = \frac{x'}{r'} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y'}{x'} ; \operatorname{cotg} \alpha = \frac{x'}{y'} \\ \operatorname{sec} \alpha &= \frac{r'}{x'} ; \operatorname{cosec} \alpha = \frac{r'}{y'} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

A la vista de lo anterior podemos pensar que hay dos valores para el seno de α ya que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{r}$ y $\operatorname{sen} \alpha = \frac{y'}{r'}$, ocurriendo algo parecido para las demás razones del ángulo α .

Sin embargo esto no es cierto ya que ocurre lo siguiente:

$$\frac{y}{r} = \frac{y'}{r'} ; \frac{x}{r} = \frac{x'}{r'} ; \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} ; \frac{x}{y} = \frac{x'}{y'} ; \frac{r}{x} = \frac{r'}{x'} ; \frac{r}{y} = \frac{r'}{y'}$$

Esto es debido a la relación existente entre triángulos rectángulos semejantes, es decir:

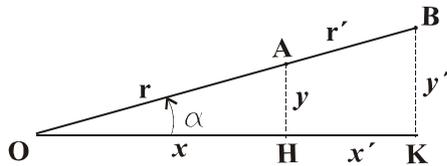


Figura 35

$\triangle OHA$ y $\triangle OKB$ triángulos rectángulos semejantes

Entonces:

$$\frac{y}{r} = \frac{y'}{r'} ; \frac{x}{r} = \frac{x'}{r'} ; \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} ; \frac{x}{y} = \frac{x'}{y'} ; \frac{r}{x} = \frac{r'}{x'} ; \frac{r}{y} = \frac{r'}{y'}$$

Por tanto, las razones trigonométricas de un ángulo dependen única y exclusivamente del ángulo, independientemente del punto (es decir, del radio) que consideremos en el lado.

17. La circunferencia goniométrica o círculo trigonométrico.-

Acabamos de ver que las razones trigonométricas de un ángulo no depende del radio r elegido, sino que depende única y exclusivamente del ángulo en sí.

Por esa razón vamos a considerar en un sistema de ejes una circunferencia de centro el origen de coordenadas (punto O) y radio la unidad de longitud. El punto que consideraremos para hallar las razones trigonométricas lo tomaremos sobre esa circunferencia y en el lado del ángulo, es decir:

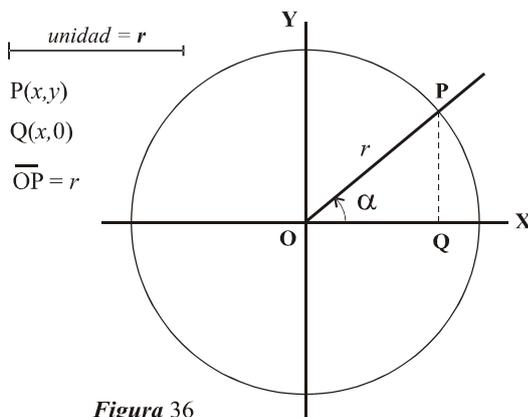


Figura 36

$$\overline{PQ} = y = \text{ordenada de P}$$

$$\overline{OQ} = x = \text{abscisa de P}$$

P = punto situado en el lado del ángulo α y en la circunferencia

α = ángulo situado en el cuadrante I

Hemos tomado un ángulo α del primer cuadrante, pero todo lo expuesto a continuación es válido para un ángulo de cualquier otro cuadrante.

Vamos a ver que las *razones trigonométricas* del ángulo α coinciden con las longitudes de unos segmentos :

- Hallemos el *seno* de α :

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{ordenada de P}}{\text{radio}} = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y = \overline{PQ}$$

Nótese que en este caso es $y > 0$

El *seno* de α coincide con la longitud del segmento PQ (ordenada de P). Como dicha ordenada es positiva, tenemos que $\text{sen } \alpha > 0$

Puede apreciarse que la longitud de PQ es menor que la del radio r , por lo que podemos decir que el *seno* de un ángulo α del cuadrante I es $0 < \text{sen } \alpha < 1$.

- Hallemos el *coseno* de α :

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{abscisa de P}}{\text{radio}} = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x = \overline{OQ}$$

Nótese que en este caso es $x > 0$

El *coseno* de α coincide con la longitud del segmento OQ (abscisa de P). Como dicha abscisa es positiva, tenemos que $\text{cos } \alpha > 0$

Puede apreciarse que la longitud de OQ es menor que la del radio r , por lo que podemos decir que el *coseno* de un ángulo α del cuadrante I es $0 < \text{cos } \alpha < 1$.

- Hallemos la *tangente* de α :

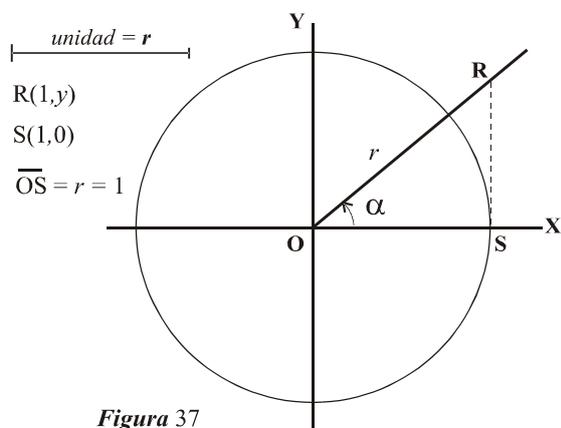


Figura 37

$$\overline{RS} = y = \text{ordenada de R}$$

$$\overline{OS} = 1 = \text{abscisa de R}$$

R = punto situado en el lado del ángulo α y en la perpendicular al eje X desde el punto S

α = ángulo situado en el cuadrante I

En este caso, en vez de el punto P, elegimos otro punto (punto R) situado en el lado del ángulo. Recuerda que el punto elegido (si está en el lado) no influye en el resultado.

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{ordenada de R}}{\text{abscisa de R}} = \frac{y}{1} = y = \overline{RS}$$

Nótese que en este caso es $y > 0$

La *tangente* de α coincide con la longitud del segmento RS (ordenada de R). Como dicha ordenada es positiva, tenemos que $\text{tg } \alpha > 0$

Puede apreciarse que la longitud de RS depende del valor de α . Dicha longitud puede variar entre 0 (si α es un ángulo de 0°) y $+\infty$ (si α vale 90°). Si α es un ángulo del cuadrante I muy próximo a 0° , su tangente será un valor muy próximo a 0 y si α es un ángulo de I próximo a 90° , su tangente será un número muy grande positivo.

Podemos decir que la *tangente* de un ángulo α del cuadrante I es $0 < \text{tg } \alpha < +\infty$

● Hallemos la *cotangente* de α :

En este caso elegimos el punto T (ver *figura 38*) también situado en el lado del ángulo α

$$\cotg \alpha = \frac{\text{abscisa de M}}{\text{ordenada de M}} = \frac{x}{1} = x = \overline{MT}$$

Nótese que en este caso es $x > 0$

La *cotangente* de α coincide con la longitud del segmento MT (abscisa de T). Como dicha abscisa es positiva, tenemos que $\cotg \alpha > 0$

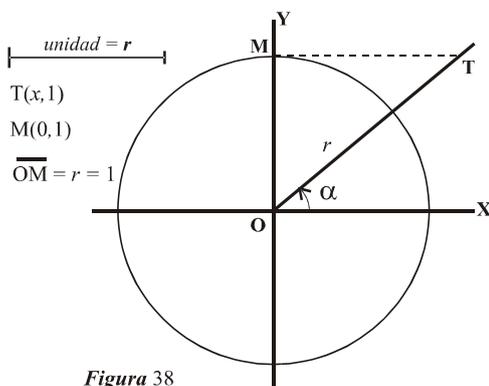


Figura 38

$$\overline{MT} = x = \text{ordenada de M}$$

$$\overline{OM} = 1 = \text{abscisa de T}$$

T = punto situado en el lado del ángulo α y en la perpendicular al eje Y desde el punto M

α = ángulo situado en el cuadrante I

Puede apreciarse que, en este caso, el valor de $\cotg \alpha$ puede variar entre cero y $+\infty$.

Nótese que para un ángulo α muy próximo a 0° la *cotangente* es un número muy grande positivo y si α está muy próximo a 90° la *cotangente* será un número muy próximo a cero.

● Hallemos la *secante* de α :

En este caso consideraremos el punto R (ver *figura 37*) situado en el lado del ángulo α

$$\sec \alpha = \frac{\text{radio de R}}{\text{abscisa de R}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{OR}}{1} = \overline{OR}$$

Nótese que en este caso es $\overline{OR} > 0$

La *secante* de α coincide con la longitud del segmento OR (radio de R). Como dicha longitud es positiva, tenemos que $\sec \alpha > 0$

Apréciase que la *secante* es el cociente entre la longitud de OR (positivo) y 1 (positivo), por lo que dicha *secante* será positiva (cuando α es del cuadrante I). Además puede apreciarse que $\overline{OR} > r = 1$, es decir, la *secante* de un ángulo del cuadrante I es un número positivo mayor que 1.

También es fácil apreciar que la *secante* puede variar entre 1 y $+\infty$, es decir:

$$1 < \sec \alpha < +\infty \quad \text{cuando} \quad 0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

● Hallemos la *cosecante* de α :

En este caso consideraremos el punto T (ver *figura 38*) situado en el lado del ángulo α

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\text{radio de T}}{\text{ordenada de T}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OT}}{1} = \overline{OT}$$

Nótese que en este caso es $\overline{OT} > 0$

La *cosecante* de α coincide con la longitud del segmento OT (radio de T). Como dicha longitud es positiva, tenemos que $\operatorname{cosec} \alpha > 0$

Apréciase que la *cosecante* es el cociente entre la longitud de OT (positivo) y 1 (positivo), por lo que dicha *cosecante* será positiva (cuando α es del cuadrante I). Además puede apreciarse que $\overline{OT} > r = 1$, es decir, la *cosecante* de un ángulo del cuadrante I es un

número positivo mayor que 1.

También es fácil apreciar que la *cosecante* puede variar entre 1 y $+\infty$, es decir:

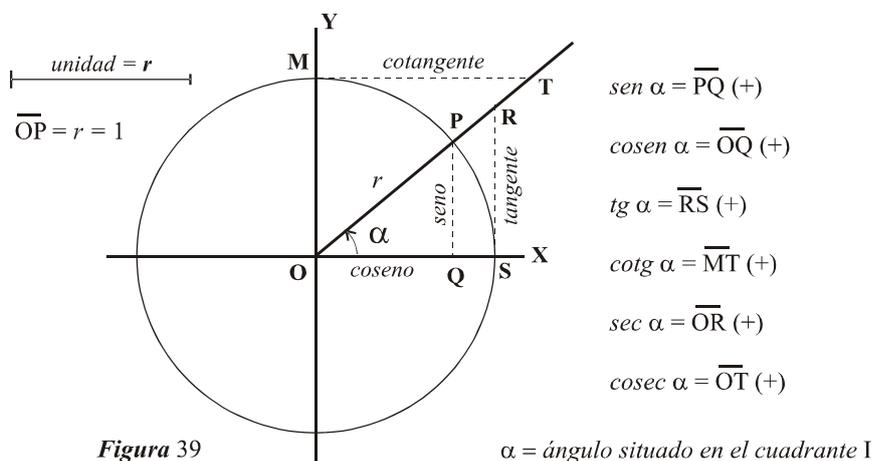
$$1 < \operatorname{cosec} \alpha < +\infty \quad \text{cuando} \quad 0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

Circunferencia goniométrica y círculo trigonométrico:

A la circunferencia y círculo de radio la unidad, dibujados para calcular geoméricamente los valores de las razones trigonométricas de un ángulo α , se les denominan respectivamente “*circunferencia goniométrica*” y “*círculo trigonométrico*”

Resumiendo:

Para hallar mediante procedimiento geométrico las razones trigonométricas de un ángulo α del primer cuadrante ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), dibujamos la circunferencia goniométrica, el ángulo α y trazamos los siguientes segmentos, asignando a cada uno de ellos la razón trigonométrica de α que le corresponde. Veamos:



$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \overline{PQ} (+) \\ \operatorname{cosen} \alpha &= \overline{OQ} (+) \\ \operatorname{tg} \alpha &= \overline{RS} (+) \\ \operatorname{cotg} \alpha &= \overline{MT} (+) \\ \operatorname{sec} \alpha &= \overline{OR} (+) \\ \operatorname{cosec} \alpha &= \overline{OT} (+) \end{aligned}$$

El valor de cada razón trigonométrica se corresponde con el tamaño del segmento que le corresponde, tomando como referencia el valor del radio $r = 1$. Según esto puede apreciarse que el *seno* y *coseno* tomarán valores entre 0 y 1, mientras

Ejemplo 26.-

Vamos a calcular a partir del círculo trigonométrico las razones del ángulo $\alpha = 32^\circ$. Para ello realizamos los siguientes pasos:

- ✓ Trazamos un sistema de ejes cartesianos rectangulares de origen un punto O (origen).
- ✓ Tomamos como unidad un segmento de longitud la que queramos y consideramos que esa longitud es igual a 1 (por ejemplo: unidad = 5 cm).
- ✓ Graduamos los ejes con dicha unidad y también es conveniente graduar una unidad con décimas : 0 , 0'1 , 0'2 , 0'3 , 0'4 , 0'5 , 0'6 , 0'7 , 0'8 , 0'9 , 1. Si fuese posible graduaríamos también con centésimas: 0'01 , 0'02 , 0'03 ,....., 0'98 , 0'99 , 1
- ✓ Dibujamos una circunferencia de radio $r = \text{unidad}$. Es la circunferencia goniométrica.
- ✓ Tomando como vértice el punto O, dibujamos el ángulo $\alpha = 32^\circ$ de modo que uno de los lados coincida con el semieje positivo de abscisas (eje X).
- ✓ Trazamos los segmentos correspondientes a cada razón trigonométrica de $\alpha = 32^\circ$
- ✓ Comparamos el tamaño de cada uno de esos segmentos con la unidad graduada y dicha comparación nos dará el valor (que será una longitud) de la razón trigonométrica.

La *figura 40* desarrolla todo el proceso expuesto.

NOTA: Conviene aclarar que las razones trigonométricas de un ángulo no tienen unidad (no son *cms* ni cualquier otra unidad), son simplemente números.

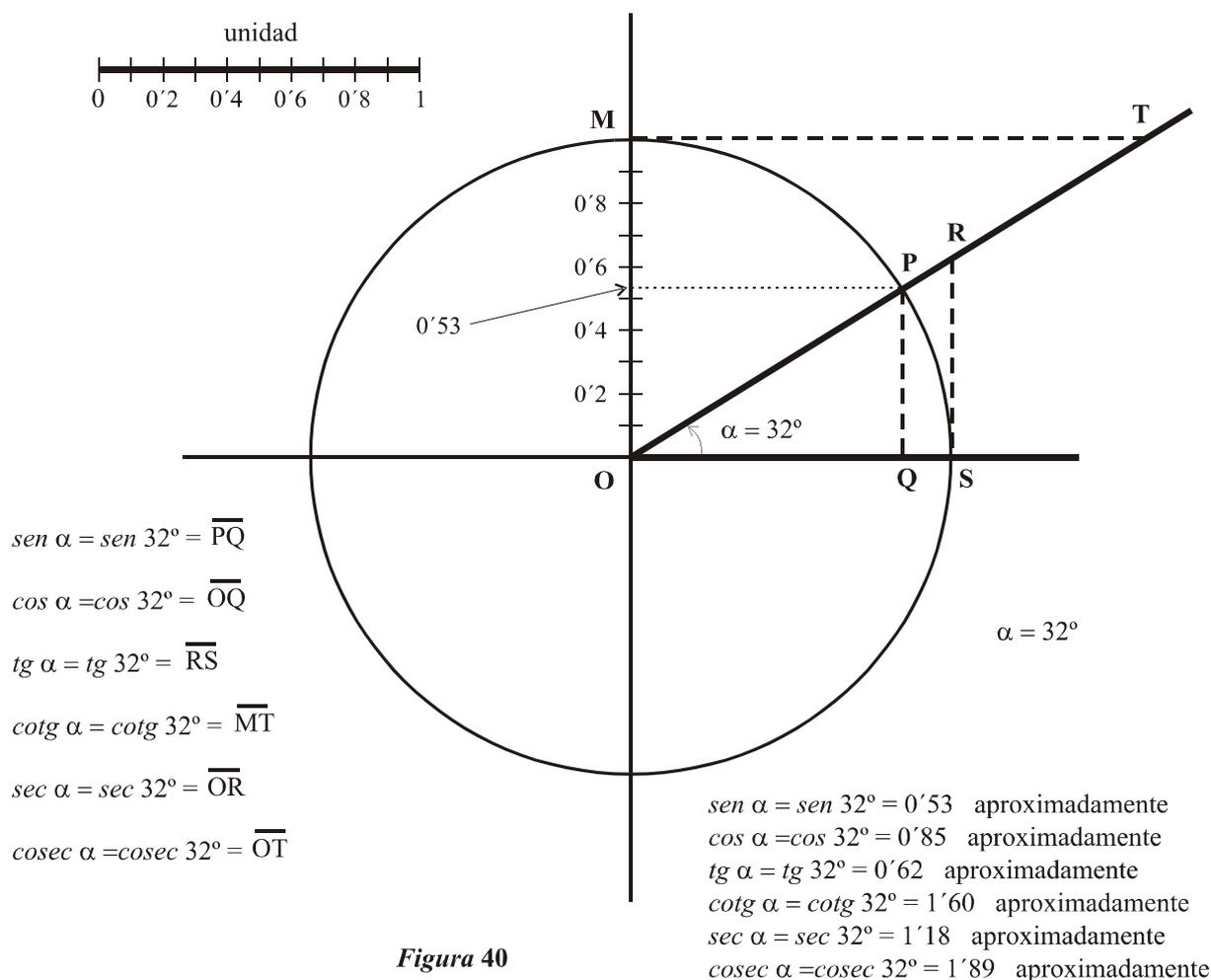


Figura 40

Los valores de las razones trigonométricas del ángulo α se corresponden con las longitudes de los segmentos correspondientes con su signo según el cuadrante donde se encuentre dicho ángulo, es decir, para $\alpha = 32^\circ$ tenemos:

$sen \alpha = longitud \text{ del segmento } PQ (+)$	$cos \alpha = longitud \text{ del segmento } OQ (+)$
$tg \alpha = longitud \text{ del segmento } RS (+)$	$cotg \alpha = longitud \text{ del segmento } MT (+)$
$sec \alpha = longitud \text{ del segmento } OR (+)$	$cosec \alpha = longitud \text{ del segmento } OS (+)$

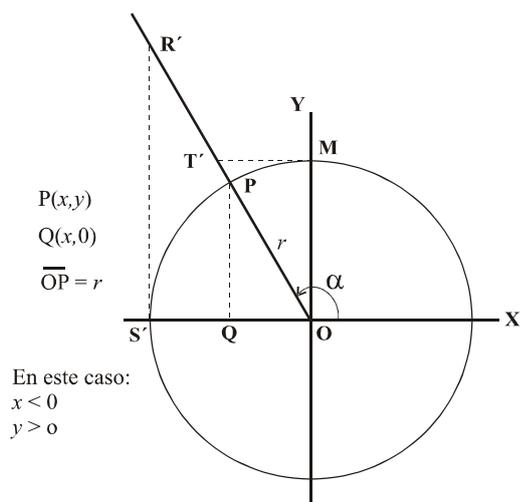
Si tomásemos las medidas con exactitud obtendríamos los siguientes valores:

$sen 32^\circ = longitud \text{ del segmento } PQ = 0.52991926.....$
 $cos 32^\circ = longitud \text{ del segmento } OQ = 0.84804809.....$
 $tg 32^\circ = longitud \text{ del segmento } RS = 0.62486935.....$
 $cotg 32^\circ = longitud \text{ del segmento } MT = 1.60033452.....$
 $sec 32^\circ = longitud \text{ del segmento } OR = 1.17917840.....$
 $cosec 32^\circ = longitud \text{ del segmento } OS = 1.88707991.....$

donde los puntos suspensivos significan que hay más decimales.

Ahora vamos a considerar que α es un ángulo situado en el segundo cuadrante, es decir:
 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

En este caso los puntos P, Q, R y T varían de posición, por lo que van a influir en los signos de las razones trigonométricas. Veamos:



En este caso:
 $x < 0$
 $y > 0$

unidad = r

$\overline{PQ} = y = \text{ordenada de P}$

$\overline{OQ} = x = \text{abcisa de P}$

P = punto situado en el lado del ángulo α y en la circunferencia

$\alpha = \text{ángulo situado en el cuadrante II}$

En este caso los puntos P, T' y R' han quedado en el segundo cuadrante. El punto M ha quedado en el semieje positivo de la Y, mientras que Q y S' están en el semieje negativo de la X.

Figura 41

Vamos a ver que las *razones trigonométricas* del ángulo α también coinciden con las longitudes de unos segmentos, aunque en este caso el signo puede ser negativo. Veamos:

☉ Hallemos el *seno* de α :

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{ordenada de P}}{\text{radio}} = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y = \overline{PQ} (+)$$

Nótese que en este caso es $y > 0$

El *seno* de α coincide con la longitud del segmento PQ (ordenada de P). Como dicha ordenada es positiva, tenemos que $\text{sen } \alpha > 0$

Puede apreciarse que la longitud de PQ es menor que la del radio r , por lo que podemos decir que el *seno* de un ángulo α del cuadrante II es $0 < \text{sen } \alpha < 1$.

☉ Hallemos el *coseno* de α :

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{abcisa de P}}{\text{radio}} = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x = \overline{OQ} (-)$$

Nótese que en este caso es $x < 0$

El *coseno* de α coincide con la longitud del segmento OQ (abcisa de P). Como dicha abcisa es negativa, tenemos que $\text{cos } \alpha < 0$

Puede apreciarse que la longitud de OQ es menor que la del radio r , por lo que podemos decir que el *coseno* de un ángulo α del cuadrante II es $-1 < \text{cos } \alpha < 0$.

☉ Hallemos la *tangente* de α :

En este caso, en vez de el punto P, elegimos otro punto (punto R') situado en el lado del ángulo. Recuerda que el punto elegido (si está en el lado) no influye en el resultado.

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{ordenada de R'}}{\text{abcisa de R'}} = \frac{R'S'}{OS'} = \frac{R'S'}{-1} = \overline{R'S'} (-)$$

Nótese que en este caso

la ordenada de R' es $R'S' > 0$

La *tangente* de α coincide con la longitud del segmento R'S' (ordenada de R'). Como está dividida por -1, tenemos que $\text{tg } \alpha < 0$

Puede apreciarse que la longitud del segmento R'S' (con su signo) puede ser un número infinitamente grande positivo o infinitamente próximo a cero pero positivo, por lo que podemos decir que la *tangente* de un ángulo α del cuadrante II es $-\infty < \text{tg } \alpha < 0$.

Nótese que la tangente sale del punto S, exactamente del mismo punto que cuando el ángulo α estaba en el cuadrante I (ver figura 39). Observa el valor de la secante de α es el tamaño del segmento OR con signo negativo.

Ejemplo 27.-

Vamos a calcular a partir del círculo trigonométrico las razones del ángulo $\alpha = 124^\circ$. Para ello realizamos los siguientes pasos:

- ✓ Trazamos un sistema de ejes cartesianos rectangulares de origen un punto O (origen).
- ✓ Tomamos como unidad un segmento de longitud la que queramos y consideramos que esa longitud es igual a 1 (por ejemplo: unidad = 5 cm).
- ✓ Graduamos los ejes con dicha unidad y también es conveniente graduar una unidad con décimas : 0 , 0'1 , 0'2 , 0'3 , 0'4 , 0'5 , 0'6 , 0'7 , 0'8 , 0'9 , 1. Si fuese posible graduaríamos también con centésimas: 0'01 , 0'02 , 0'03 ,....., 0'98 , 0'99 , 1
- ✓ Dibujamos una circunferencia de radio $r = \text{unidad}$. Es la circunferencia goniométrica.
- ✓ Tomando como vértice el punto O, dibujamos el ángulo $\alpha = 124^\circ$ de modo que uno de los lados coincida con el semieje positivo de abscisas (eje X).
- ✓ Trazamos los segmentos correspondientes a cada razón trigonométrica de $\alpha = 124^\circ$
- ✓ Comparamos el tamaño de cada uno de esos segmentos con la unidad graduada y dicha comparación nos dará el valor (que será una longitud) de la razón trigonométrica.

La figura 43 desarrolla todo el proceso expuesto.

NOTA: Conviene recordar que las razones trigonométricas de un ángulo no tienen unidad (no son cms ni cualquier otra unidad), son simplemente números.

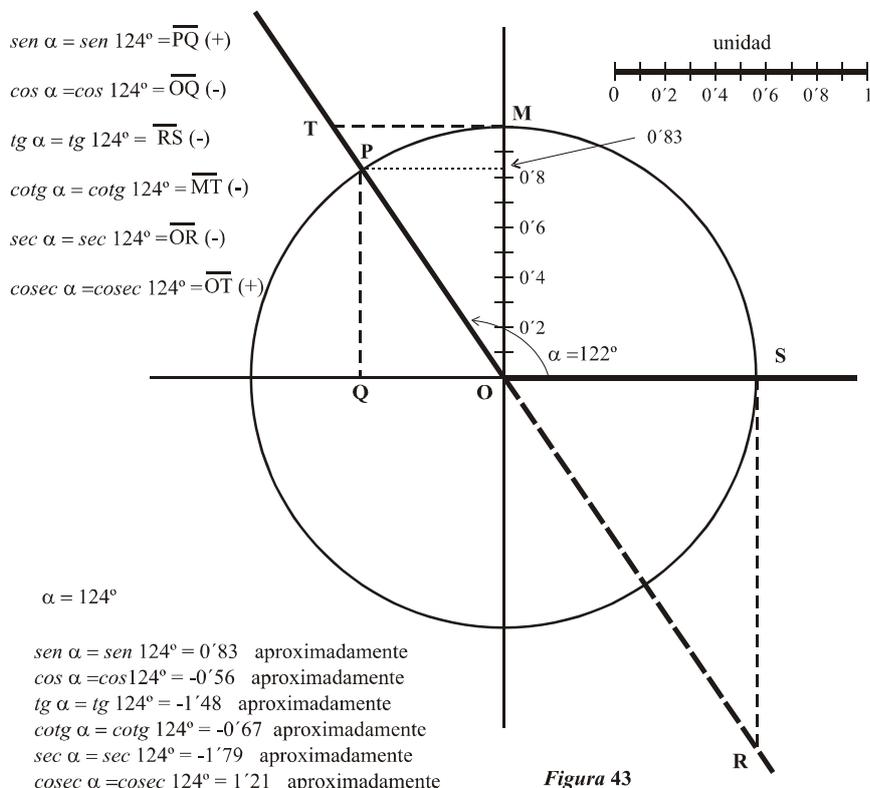


Figura 43

En este caso en que α es un ángulo de cuadrante II, los signos de las razones trigonométricas no coinciden con los del cuadrante I, es decir:

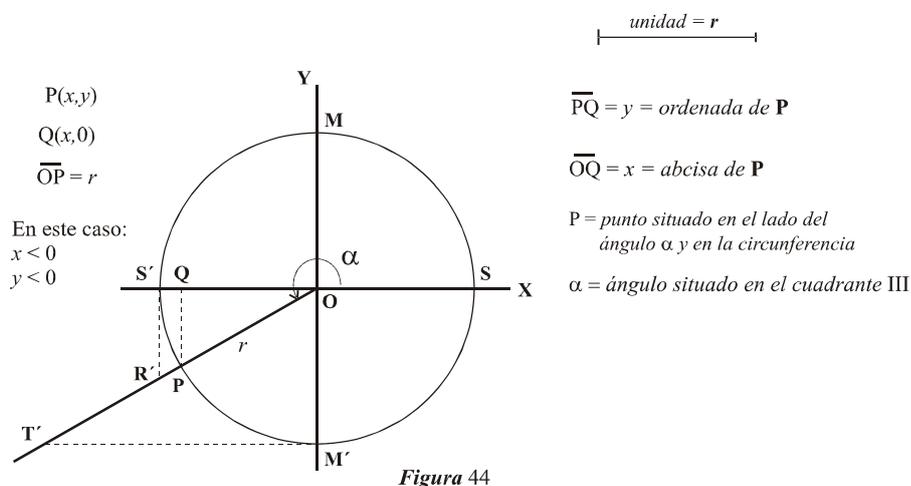
- $\text{sen } 124^\circ = \text{longitud de PQ}$
- $\text{cos } 124^\circ = - \text{longitud de OQ}$
- $\text{tg } 124^\circ = - \text{longitud de RS}$
- $\text{cotg } 124^\circ = - \text{longitud de MT}$
- $\text{sec } 124^\circ = - \text{longitud de OR}$
- $\text{cosec } 124^\circ = \text{longitud de OT}$

Si tomásemos las medidas con exactitud tendríamos los siguientes valores:

- $\text{sen } 124^\circ = 0'82903757....$
- $\text{cos } 124^\circ = -0'55919290....$
- $\text{tg } 124^\circ = -1'48256096....$
- $\text{cotg } 124^\circ = -0'67450851....$
- $\text{sec } 124^\circ = -1'7882916....$
- $\text{cosec } 124^\circ = 1'20621794....$

Ahora vamos a considerar que α es un ángulo situado en el tercer cuadrante, es decir:
 $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

En este caso los puntos P, Q, R y T varían de posición, por lo que van a influir en los signos de las razones trigonométricas. Veamos:



Podemos ver que los puntos P, T' y R' han quedado en el tercer cuadrante. El punto M' ha quedado en el semieje negativo de la Y, mientras que Q y S' están en el semieje negativo de la X.

Vamos a ver que las razones trigonométricas del ángulo α también coinciden con las longitudes de unos segmentos. Como antes, los signos pueden ser positivos o negativos. Veamos:

- Hallemos el seno de α :

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{ordenada de P}}{\text{radio}} = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y = \overline{PQ} \quad (-)$$

Nótese que en este caso es $y < 0$

El seno de α coincide con la longitud del segmento PQ (abcisa de P). Como dicha ordenada es negativa, tenemos que $\text{sen } \alpha < 0$

Puede apreciarse que la longitud de PQ es menor que la del radio r , por lo que podemos decir que el seno de un ángulo α del cuadrante III es $-1 < \text{sen } \alpha < 0$.

- Hallemos el coseno de α :

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{abcisa de P}}{\text{radio}} = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x = \overline{OQ} \quad (-)$$

Nótese que en este caso es $x < 0$

El coseno de α coincide con la longitud del segmento OQ (abcisa de P). Como dicha abcisa es negativa, tenemos que $\text{cos } \alpha < 0$

Puede apreciarse que la longitud de OQ es menor que la del radio r , por lo que podemos decir que el coseno de un ángulo α del cuadrante III es $-1 < \text{cos } \alpha < 0$.

- Hallemos la tangente de α :

En este caso, en vez de el punto P, elegimos otro punto (punto R') situado en el lado del ángulo. Recuerda que el punto elegido (si está en el lado) no influye en el resultado.

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{ordenada de R'}}{\text{abcisa de R'}} = \frac{R'S'}{OS'} = \frac{R'S'}{-1} = \overline{R'S'} \quad (+)$$

Nótese que en este caso la ordenada de R' es $R'S' < 0$

La tangente de α coincide con la longitud del segmento R'S' (ordenada de R'). Como está dividida por -1, tenemos que $\text{tg } \alpha > 0$

Puede apreciarse que la longitud del segmento R'S' (con su signo) puede ser un número infinitamente grande negativo o infinitamente próximo a cero pero negativo, por lo que podemos decir que la tangente de un ángulo α del cuadrante III es $0 < \text{tg } \alpha < \infty$.

☉ Hallemos la *cotangente* de α :

En este caso, elegimos el punto T' situado en el lado del ángulo. Recuerda que el punto elegido (si está en el lado) no influye en el resultado.

$$\cotg \alpha = \frac{\text{abscisa de } T'}{\text{ordenada de } T'} = \frac{M'T'}{OM'} = \frac{M'T'}{-1} = \overline{M'T'} (+)$$

Nótese que en este caso

la abscisa de T' es $M'T' < 0$

La *cotangente* de α coincide con la longitud del segmento $M'T'$ (abscisa de M'). Como esa abscisa es negativa, tenemos que $\cotg \alpha$

Puede apreciarse que la longitud del segmento $M'T'$ (con su signo) puede ser un número infinitamente grande negativo o infinitamente próximo a cero pero negativo, por lo que podemos decir que la *cotangente* de un ángulo α del cuadrante III es $0 < \cotg \alpha < \infty$.

☉ Hallemos la *secante* de α :

En este caso, elegimos el punto R' situado en el lado del ángulo. Recuerda que el punto elegido (si está en el lado) no influye en el resultado.

$$\sec \alpha = \frac{\text{radio de } R'}{\text{abscisa de } R'} = \frac{OR'}{OS'} = \frac{OR'}{-1} = \overline{OR'} (-)$$

Nótese que en este caso

la abscisa de R' es $OS' = -1 < 0$

La *secante* de α coincide con la longitud del segmento OR' (radio de R'). Como está dividida por -1 , tenemos que $\sec \alpha < 0$

Puede apreciarse que la longitud del segmento OR' es mayor que el radio $r = 1$, por lo que podemos asegurar que la *secante* de un ángulo α del cuadrante III es $-\infty < \sec \alpha < -1$.

☉ Hallemos la *cosecante* de α :

En este caso, elegimos el punto T' situado en el lado del ángulo. Recuerda que el punto elegido (si está en el lado) no influye en el resultado.

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\text{radio de } T'}{\text{ordenada de } T'} = \frac{OT'}{OM'} = \frac{OT'}{-1} = \overline{OT'} (-)$$

Nótese que en este caso

la ordenada de T' es $OM' = -1 < 0$

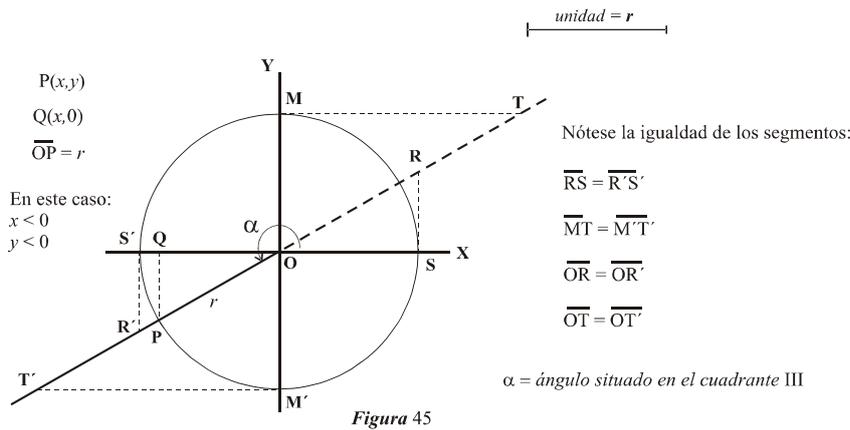
La *cosecante* de α coincide con la longitud del segmento OT' (radio de T'). Como está dividida por -1 , tenemos que $\operatorname{cosec} \alpha < 0$

Puede apreciarse que la longitud del segmento OT' es mayor que el radio $r = 1$, por lo que podemos asegurar que la *cosecante* de un ángulo α del cuadrante III es $-\infty < \operatorname{cosec} \alpha < -1$.



También podemos hacer coincidir la *tangente*, la *cotangente*, la *secante* y la *cosecante* con otros segmentos distintos de $\overline{R'S'}$, $\overline{M'T'}$, $\overline{OR'}$ y $\overline{OT'}$. Para ello prolongamos el lado del ángulo y trazamos la tangente desde el punto S y la cotangente desde el punto M. De este modo obtenemos los nuevos puntos R y T.

La *figura 45* ilustra este proceso. Veamos:



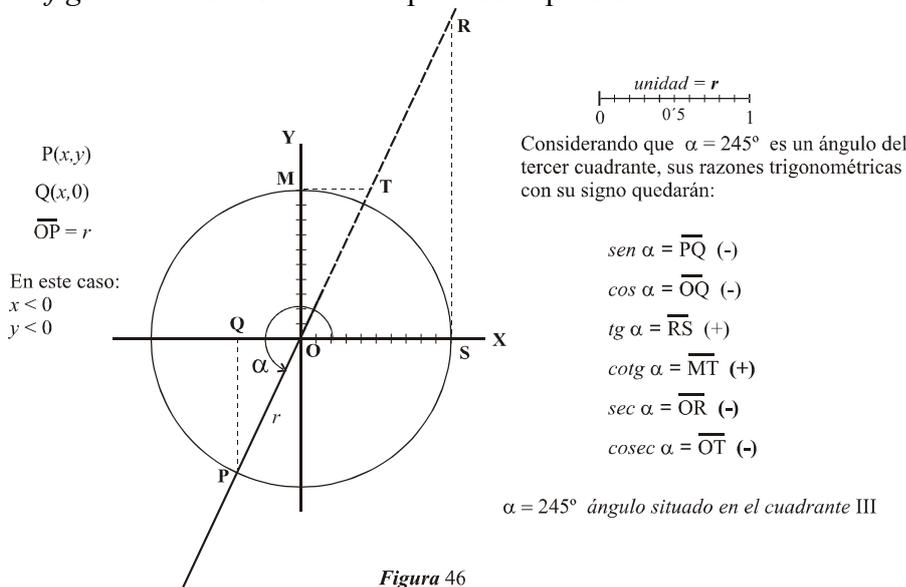
En este caso buscaremos siempre la tangente partiendo del punto S y la cotangente partiendo desde el punto M.

Ejemplo 28.-

Vamos a calcular a partir del círculo trigonométrico las razones del ángulo $\alpha = 245^\circ$. Para ello realizamos los siguientes pasos:

- ✓ Trazamos un sistema de ejes cartesianos rectangulares de origen un punto O (origen).
- ✓ Tomamos como unidad un segmento de longitud la que queramos y consideramos que esa longitud es igual a 1 (por ejemplo: unidad = 2 cm, etc.).
- ✓ Graduamos los ejes con dicha unidad y también es conveniente graduar una unidad con décimas : 0 , 0'1 , 0'2 , 0'3 , 0'4 , 0'5 , 0'6 , 0'7 , 0'8 , 0'9 , 1. Si fuese posible graduaríamos también con centésimas: 0'01 , 0'02 , 0'03 ,....., 0'98 , 0'99 , 1
- ✓ Dibujamos una circunferencia de radio $r = \text{unidad}$. Es la circunferencia goniométrica.
- ✓ Tomando como vértice el punto O, dibujamos el ángulo $\alpha = 245^\circ$ de modo que uno de los lados coincida con el semieje positivo de abscisas (eje X).
- ✓ Trazamos los segmentos correspondientes a cada razón trigonométrica de $\alpha = 245^\circ$
- ✓ Comparamos el tamaño de cada uno de esos segmentos con la unidad graduada y dicha comparación nos dará el valor (que será una longitud) de la razón trigonométrica.

La figura 46 desarrolla todo el proceso expuesto.



Si comparásemos las longitudes de los segmentos con la unidad y esta comparación fuese precisa, obtendríamos:

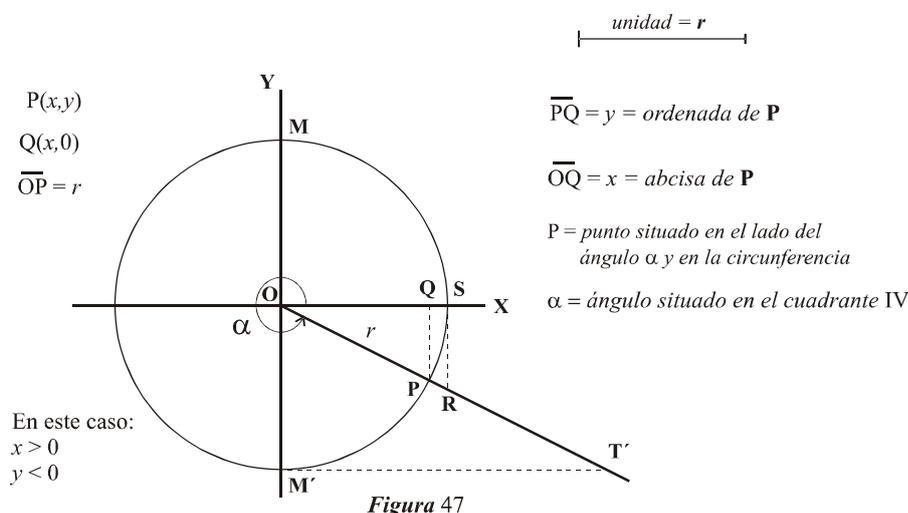
$\text{sen } 245^\circ = -0'90630778$
 $\text{cos } 245^\circ = -0'42261826$
 $\text{tg } 245^\circ = 2'14450692$
 $\text{ctg } 245^\circ = 0'46630765$
 $\text{sec } 245^\circ = -2'36620158$
 $\text{cosec } 245^\circ = -1'1033779$

Recordemos nuevamente que estos valores son simplemente números, sin unidades de longitud.

Ahora vamos a considerar que α es un ángulo situado en el cuarto cuadrante, es decir:
 $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

En este caso los puntos P, Q, R y T varían de posición, por lo que van a influir en los signos de las razones trigonométricas. Veamos:

Podemos ver que los puntos P, T' y R' han quedado en el tercer cuadrante.



Podemos ver que los puntos P, T' y R han quedado en el tercer cuadrante.

El punto M' ha quedado en el semieje negativo de la Y, mientras que Q y S están en el semieje positivo de la X.

Vamos a ver que las razones trigonométricas del ángulo α también coinciden con las longitudes de unos segmentos. Como antes, los signos pueden ser positivos o negativos. Veamos:

- Hallemos el *seno* de α :

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{ordenada de P}}{\text{radio}} = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y = \overline{PQ} \text{ (-)}$$

Nótese que en este caso es $y < 0$

El *seno* de α coincide con la longitud del segmento PQ (abcisa de P). Como dicha ordenada es negativa, tenemos que $\text{sen } \alpha < 0$

Puede apreciarse que la longitud de PQ es menor que la del radio r , por lo que podemos decir que el *seno* de un ángulo α del cuadrante IV es $-1 < \text{sen } \alpha < 0$.

- Hallemos el *coseno* de α :

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{abcisa de P}}{\text{radio}} = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x = \overline{OQ} \text{ (+)}$$

Nótese que en este caso es $x > 0$

El *coseno* de α coincide con la longitud del segmento OQ (abcisa de P). Como dicha abcisa es positiva, tenemos que $\text{cos } \alpha > 0$

Puede apreciarse que la longitud de OQ es menor que la del radio r , por lo que podemos decir que el *coseno* de un ángulo α del cuadrante IV es $0 < \text{cos } \alpha < 1$.

- Hallemos la *tangente* de α :

En este caso, en vez de el punto P, elegimos otro punto (punto R) situado en el lado del ángulo. Recuerda que el punto elegido (si está en el lado) no influye en el resultado.

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{ordenada de R}}{\text{abcisa de R}} = \frac{\text{RS}}{\text{OS}} = \frac{\text{RS}}{1} = \overline{\text{RS}} \text{ (-)}$$

Nótese que en este caso la ordenada de R es $\text{RS} < 0$

La *tangente* de α coincide con la longitud del segmento RS (ordenada de R). Como está dividida por 1, tenemos que $\text{tg } \alpha < 0$

Puede apreciarse que la longitud del segmento RS (con su signo) puede ser un número infinitamente grande negativo o infinitamente próximo a cero pero negativo, por lo que podemos decir que la *tangente* de un ángulo α del cuadrante IV es $-\infty < \operatorname{tg} \alpha < 0$.

☉ Hallemos la *cotangente* de α :

En este caso, elegimos el punto T' situado en el lado del ángulo. Recuerda que el punto elegido (si está en el lado) no influye en el resultado.

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\text{abscisa de } T'}{\text{ordenada de } T'} = \frac{M'T'}{OM'} = \frac{M'T'}{-1} = \overline{M'T'} (-)$$

Nótese que en este caso

la abscisa de T' es $M'T' > 0$

La *cotangente* de α coincide con la longitud del segmento M'T' (abscisa de M'). Como esa abscisa es positiva, tenemos que $\operatorname{cotg} \alpha > 0$

Puede apreciarse que la longitud del segmento M'T' (con su signo) puede ser un número infinitamente grande negativo o infinitamente próximo a cero pero negativo, por lo que podemos decir que la *cotangente* de un ángulo α del cuadrante IV es $-\infty < \operatorname{cotg} \alpha < 0$.

☉ Hallemos la *secante* de α :

En este caso, elegimos el punto R situado en el lado del ángulo. Recuerda que el punto elegido (si está en el lado) no influye en el resultado.

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{\text{radio de } R}{\text{abscisa de } R} = \frac{OR}{OS} = \frac{OR}{1} = \overline{OR} (+)$$

Nótese que en este caso

la abscisa de R es $OS = 1 > 0$

La *secante* de α coincide con la longitud del segmento OR (radio de R). Como está dividida por 1, tenemos que $\operatorname{sec} \alpha > 0$

Puede apreciarse que la longitud del segmento OR es mayor que el radio $r = 1$, por lo que podemos asegurar que la *secante* de un ángulo α del cuadrante IV es $1 < \operatorname{sec} \alpha < +\infty$.

☉ Hallemos la *cosecante* de α :

En este caso, elegimos el punto T' situado en el lado del ángulo. Recuerda que el punto elegido (si está en el lado) no influye en el resultado.

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\text{radio de } T'}{\text{ordenada de } T'} = \frac{OT'}{OM'} = \frac{OT'}{-1} = \overline{OT'} (-)$$

Nótese que en este caso

la ordenada de T' es $OM' = -1 < 0$

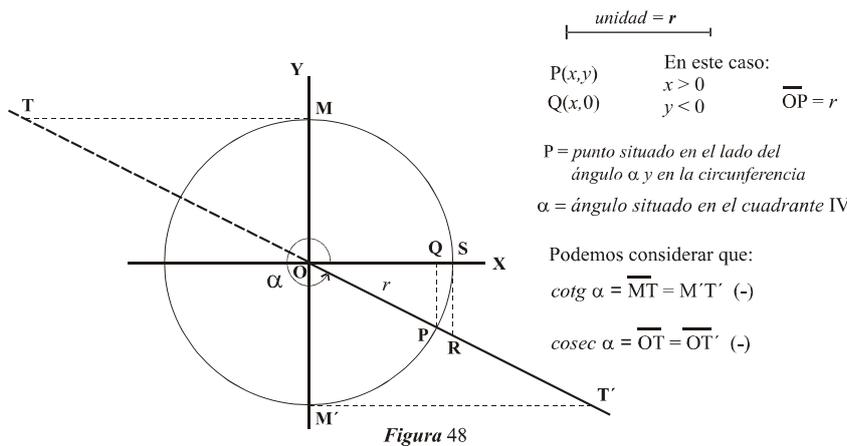
La *cosecante* de α coincide con la longitud del segmento OT' (radio de T'). Como está dividida por -1, tenemos que $\operatorname{cosec} \alpha < 0$

Puede apreciarse que la longitud del segmento OT' es mayor que el radio $r = 1$, por lo que podemos asegurar que la *cosecante* de un ángulo α del cuadrante IV es $-\infty < \operatorname{cosec} \alpha < -1$.



También podemos hacer coincidir la *cotangente* y la *cosecante* con otros segmentos distintos de $\overline{M'T'}$ y $\overline{OT'}$. Para ello prolongamos el lado del ángulo y trazamos la cotangente desde el punto M. De este modo obtenemos el nuevo punto T.

La figura 48 ilustra este proceso. Veamos:



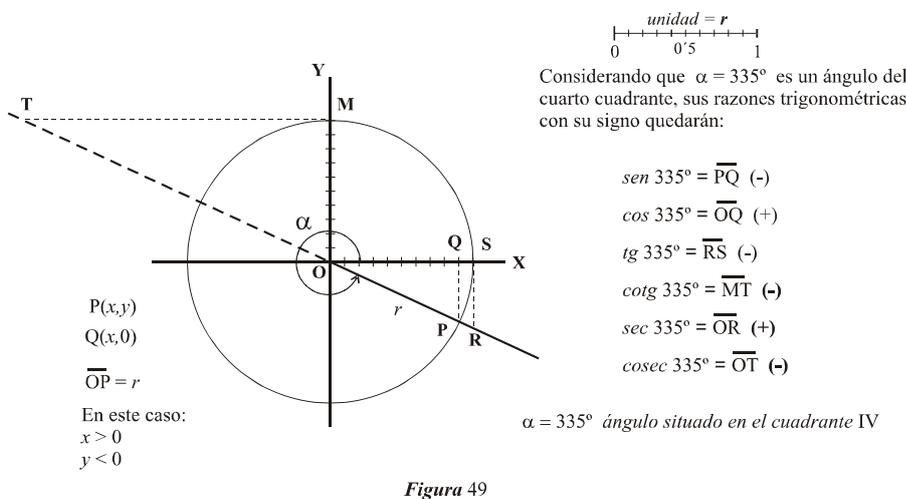
Para buscar la cotangente y la cosecante del ángulo partimos del punto M en lugar de M'

Ejemplo 29.-

Vamos a calcular a partir del círculo trigonométrico las razones del ángulo $\alpha = 335^\circ$. Para ello realizamos los siguientes pasos:

- ✓ Trazamos un sistema de ejes cartesianos rectangulares de origen un punto O (origen).
- ✓ Tomamos como unidad un segmento de longitud la que queramos y consideramos que esa longitud es igual a 1 (por ejemplo: unidad = 2 cm, etc.).
- ✓ Graduamos los ejes con dicha unidad y también es conveniente graduar una unidad con décimas : 0 , 0'1 , 0'2 , 0'3 , 0'4 , 0'5 , 0'6 , 0'7 , 0'8 , 0'9 , 1. Si fuese posible graduáramos también con centésimas: 0'01 , 0'02 , 0'03 , , 0'98 , 0'99 , 1
- ✓ Dibujamos una circunferencia de radio $r = \text{unidad}$. Es la circunferencia goniométrica.
- ✓ Tomando como vértice el punto O, dibujamos el ángulo $\alpha = 335^\circ$ de modo que uno de los lados coincida con el semieje positivo de abscisas (eje X).
- ✓ Trazamos los segmentos correspondientes a cada razón trigonométrica de $\alpha = 335^\circ$
- ✓ Comparamos el tamaño de cada uno de esos segmentos con la unidad graduada y dicha comparación nos dará el valor (que será una longitud) de la razón trigonométrica.

La figura 49 desarrolla todo el proceso expuesto.



Si calculásemos con exactitud las medidas de los segmentos con sus signos, tendríamos los siguientes valores:

$\text{sen } 335^\circ = -0'42261826$
 $\text{cos } 335^\circ = 0'90630779$
 $\text{tg } 335^\circ = -0'46630766$
 $\text{cotg } 335^\circ = -2'1445069$
 $\text{sec } 335^\circ = 1'10337792$
 $\text{cosec } 335^\circ = -2'3662016$

18.Observaciones sobre las razones trigonométricas de un ángulo.-

A la vista de lo expuesto y desarrollado en el apartado anterior, conviene hacer las siguientes observaciones:

① Las razones trigonométricas (*seno*, *coseno*, *tangente*, *cotangente*, *secante* y *cosecante*) de un ángulo α son números reales cuyo valor podemos hacerlos coincidir con la longitud de un segmento. Esto es posible utilizando como referencia una **circunferencia de radio unidad**. Dichos números pueden ser positivos o negativos, dependiendo del cuadrante donde se encuentre el ángulo. Algunas de las razones de α pueden valer cero (veremos este caso más adelante).

② En todos los casos anteriores hemos visto que $\overline{sen \alpha} = \overline{PQ}$ y que $\overline{PQ} \leq r = 1$, es decir, si consideramos el signo del seno de un ángulo, podemos asegurar que:

$$-1 \leq \overline{sen \alpha} \leq 1$$

El seno de cualquier ángulo es un número comprendido entre -1 y 1

③ En todos los casos anteriores hemos visto que $\overline{cos \alpha} = \overline{OQ}$ y que $\overline{OQ} \leq r = 1$, es decir, si consideramos el signo del *coseno* de un ángulo, podemos asegurar que:

$$-1 \leq \overline{cos \alpha} \leq 1$$

El coseno de cualquier ángulo es un número comprendido entre -1 y 1

④ La *tangente* de α en el círculo trigonométrico viene determinada por un segmento \overline{RS} en el que el punto S es la intersección de la circunferencia goniométrica con el semieje positivo de abscisas (eje X). La longitud de \overline{RS} puede variar entre 0 y $+\infty$, por lo que si consideramos el signo, podemos asegurar que:

$$-\infty \leq \overline{tg \alpha} \leq \infty$$

Observa que si tomamos un ángulo α muy próximo a 90° pero un poco menor (por ejemplo $\alpha = 89^\circ 59' 59''$) podrás notar que $\overline{tg \alpha} = \text{número muy grande positivo}$. Esto se debe a que el segmento \overline{RS} es muy grande.

En el caso de que tomemos un ángulo α muy próximo a 90° pero un poco mayor (por ejemplo $\alpha = 90^\circ 0' 1''$) podrás notar que $\overline{tg \alpha} = \text{número muy grande negativo}$. Esto se debe a que el segmento \overline{RS} es muy grande, pero en este caso el signo de la *tangente* es negativo.

Debes entender que si α es un ángulo muy próximo a 0° o a 360° , la *tangente* es un número muy próximo a 0 (positivo o negativo).

⑤ La *cotangente* de α en el círculo trigonométrico viene determinada por un segmento \overline{MT} en el que el punto M es la intersección de la circunferencia goniométrica con el semieje positivo de ordenadas (eje Y). La longitud de \overline{MT} puede variar entre 0 y $+\infty$, por lo que si consideramos el signo, podemos asegurar que:

$$-\infty \leq \cotg \alpha \leq \infty$$

Observa que si tomamos un ángulo α muy próximo a 0° pero un poco mayor (por ejemplo $\alpha = 0^\circ 0' 59''$) podrás notar que $\cotg \alpha = \text{número muy grande positivo}$. Esto se debe a que el segmento \overline{MT} es muy grande.

En el caso de que tomemos un ángulo α muy próximo a 180° pero un poco menor (por ejemplo $\alpha = 179^\circ 59' 59''$) podrás notar que $\cotg \alpha = \text{número muy grande negativo}$. Esto se debe a que el segmento \overline{MT} es muy grande, pero en este caso el signo de la **cotangente** es negativo.

Del mismo modo podrás observar que si α es un ángulo muy próximo a 90° (mayor o menor), la longitud del segmento \overline{MT} es muy pequeña, lo que hace que la **cotangente** sea un número próximo a 0 (positivo o negativo).

- ⑥ Hemos visto que la *secante* viene determinada por el segmento \overline{OR} , es decir, en todos los casos sale del origen de coordenadas (punto O). Nótese que como el punto R está fuera del círculo, la longitud de \overline{OR} es mayor que el radio r , es decir, $\overline{OR} \geq r = 1$. Esto significa que la *secante* de un ángulo siempre es mayor o igual que 1 o menor o igual que -1 .

$$\sec \alpha \leq -1 \quad \text{o} \quad \sec \alpha \geq 1$$

depende del cuadrante donde esté α

- ⑦ Hemos visto que la *cosecante* viene determinada por el segmento \overline{OT} , es decir, en todos los casos sale del origen de coordenadas (punto O). Nótese que como el punto T está fuera del círculo, la longitud de \overline{OT} es mayor que el radio r , es decir, $\overline{OT} \geq r = 1$. Esto significa que la *cosecante* de un ángulo siempre es mayor o igual que 1 o menor o igual que -1 .

$$\csc \alpha \leq -1 \quad \text{o} \quad \csc \alpha \geq 1$$

depende del cuadrante donde esté α

Resumiendo:

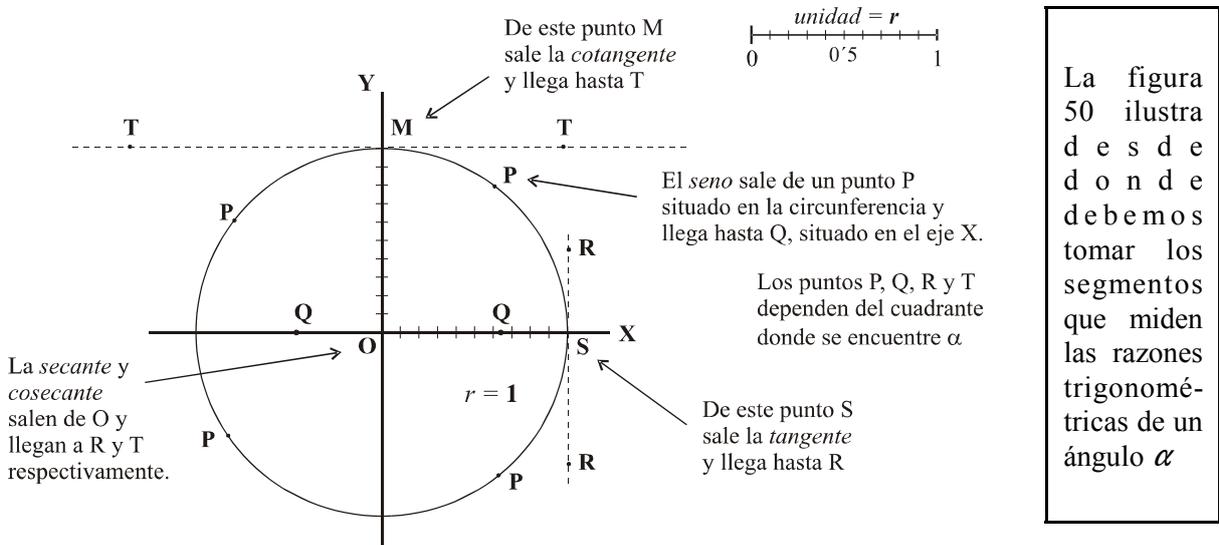
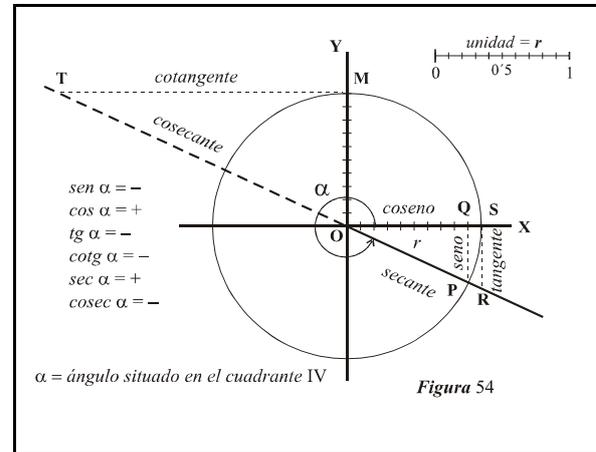
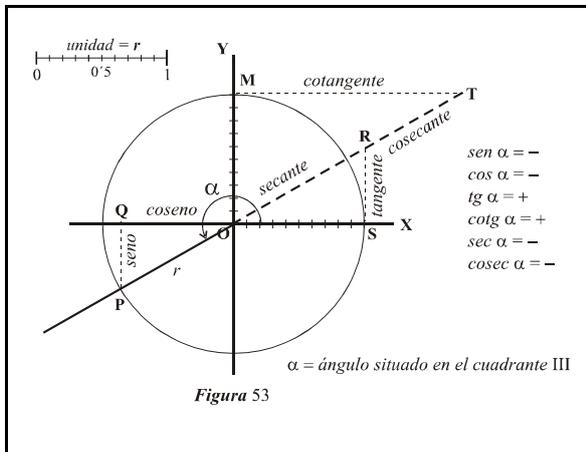
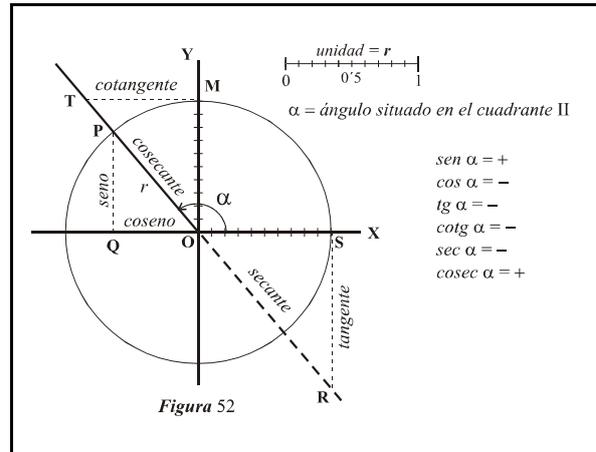
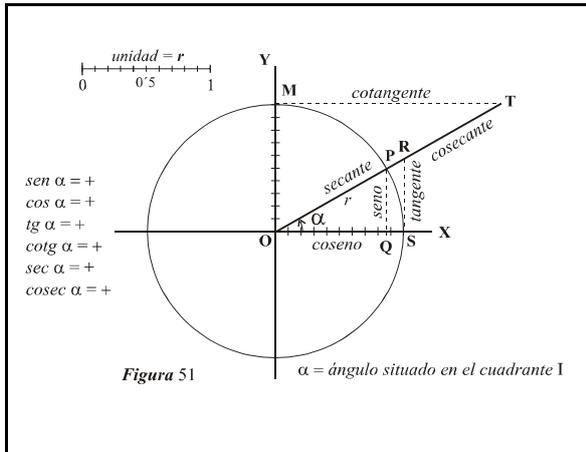


Figura 50

Concretemos la explicación dada en la figura 50:



19. Razones trigonométricas del ángulo 0°.-

Veamos el caso particular del ángulo $\alpha = 0^\circ = 0 \text{ radianes}$.

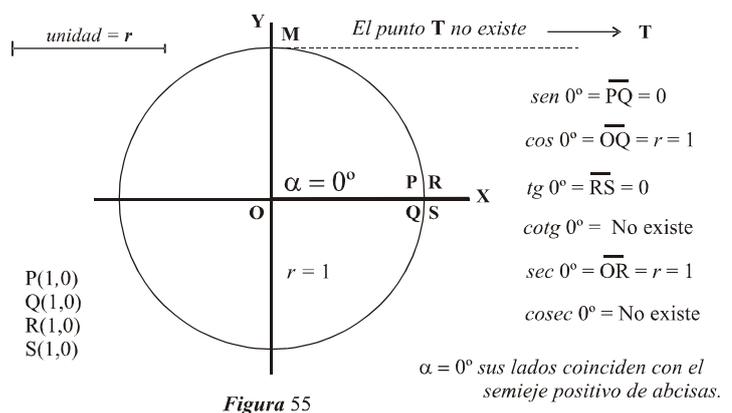
De un modo gráfico podemos obtener los valores de las razones trigonométricas del ángulo 0° (0 radianes). Veamos:

- Representemos en el círculo trigonométrico el ángulo $\alpha = 0^\circ = 0 \text{ radianes}$ y actuemos del mismo modo que para cualquier otro ángulo:

En la figura 55 puede apreciarse que los puntos **P**, **Q**, **R** y **S** coinciden y sus coordenadas son $x = 1$ e $y = 0$.

Nótese que el punto **T** no existe (se pierde en el infinito), lo cual hace que la *cotangente* \overline{MT} y la *cosecante* \overline{OT} no existan.

Por tanto, el ángulo 0° no tiene ni *cotangente* ni *cosecante*.



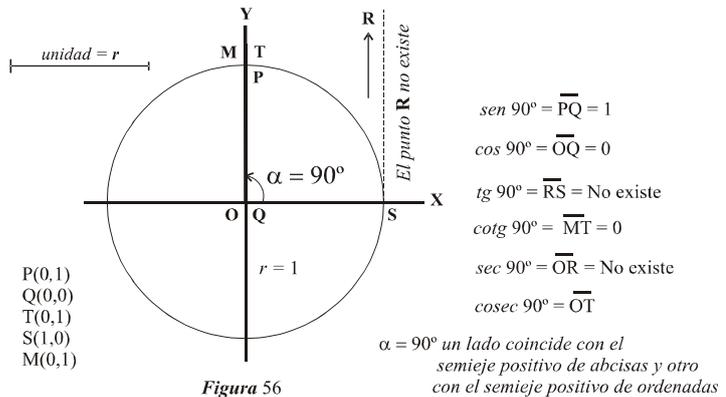
20. Razones trigonométricas del ángulo 90°.-

Veamos el caso particular del ángulo $\alpha = 90^\circ = \pi/2$ radianes.

De un modo gráfico podemos obtener los valores de las razones trigonométricas del ángulo 90° ($\pi/2$ radianes). Veamos:

- Representemos en el círculo trigonométrico el ángulo $\alpha = 90^\circ = \pi/2$ radianes y actuemos del mismo modo que para cualquier otro ángulo:

En la figura 56 puede apreciarse que los puntos **P**, **M** y **T** coinciden y sus coordenadas son $x = 0$ e $y = 1$.
 Nótese que el punto **R** no existe (se pierde en el infinito), lo cual hace que la *tangente* \overline{RS} y la *secante* \overline{OR} no existan.
 Por tanto, el ángulo 90° no tiene ni *tangente* ni *secante*.



$$\begin{aligned} \text{sen } 90^\circ &= \overline{PQ} = 1 \\ \text{cos } 90^\circ &= \overline{OQ} = 0 \\ \text{tg } 90^\circ &= \overline{RS} = \text{No existe} \\ \text{cotg } 90^\circ &= \overline{MT} = 0 \\ \text{sec } 90^\circ &= \overline{OR} = \text{No existe} \\ \text{cosec } 90^\circ &= \overline{OT} \end{aligned}$$

$\alpha = 90^\circ$ un lado coincide con el semieje positivo de abscisas y otro con el semieje positivo de ordenadas

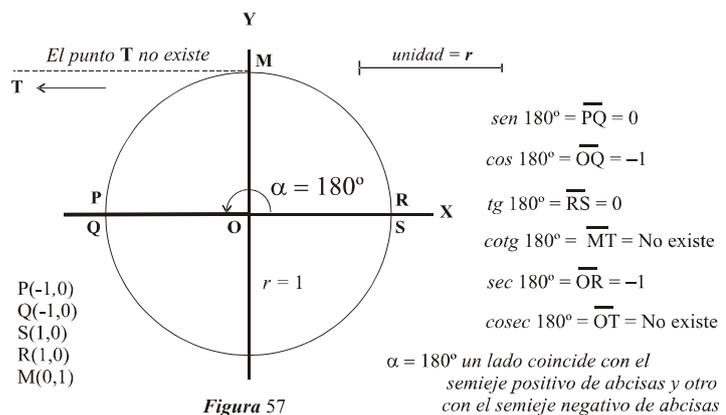
21. Razones trigonométricas del ángulo 180°.-

Veamos el caso particular del ángulo $\alpha = 180^\circ = \pi$ radianes.

De un modo gráfico podemos obtener los valores de las razones trigonométricas del ángulo 180° (π radianes). Veamos:

- Representemos en el círculo trigonométrico el ángulo $\alpha = 180^\circ = \pi$ radianes y actuemos del mismo modo que para cualquier otro ángulo:

En la figura 57 se aprecia que los puntos **P** y **Q** coinciden y sus coordenadas son $x = -1$ e $y = 0$. También coinciden **S** y **R**.
 Nótese que el punto **T** no existe (se pierde en el infinito), lo cual hace que la *cotangente* \overline{MT} y la *cosecante* \overline{OT} no existan.
 Por tanto, el ángulo 180° no tiene ni *cotangente* ni *cosecante*.



$$\begin{aligned} \text{sen } 180^\circ &= \overline{PQ} = 0 \\ \text{cos } 180^\circ &= \overline{OQ} = -1 \\ \text{tg } 180^\circ &= \overline{RS} = 0 \\ \text{cotg } 180^\circ &= \overline{MT} = \text{No existe} \\ \text{sec } 180^\circ &= \overline{OR} = -1 \\ \text{cosec } 180^\circ &= \overline{OT} = \text{No existe} \end{aligned}$$

$\alpha = 180^\circ$ un lado coincide con el semieje positivo de abscisas y otro con el semieje negativo de abscisas

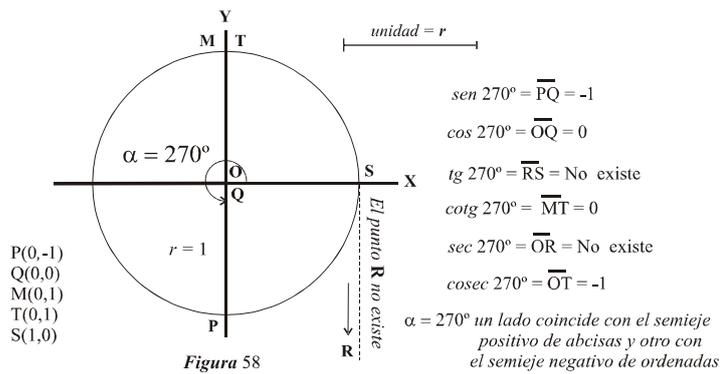
22. Razones trigonométricas del ángulo 270°.-

Veamos el caso particular del ángulo $\alpha = 270^\circ = \frac{3\pi}{2}$ radianes.

De un modo gráfico podemos obtener los valores de las razones trigonométricas del ángulo 270° ($\frac{3\pi}{2}$ radianes). Veamos:

- Representemos en el círculo trigonométrico el ángulo $\alpha = 270^\circ = \frac{3\pi}{2}$ radianes y actuemos del mismo modo que para cualquier otro ángulo:

En la figura 58 se aprecia que los puntos **O** y **Q** coinciden y sus coordenadas son $x = 0$ e $y = 0$. También coinciden **M** y **T**. Nótese que el punto **R** no existe (se pierde en el infinito), lo cual hace que la *tangente* \overline{RS} y la *secante* \overline{OR} no existan. Por tanto, el ángulo 270° no tiene ni *tangente* ni *secante*.



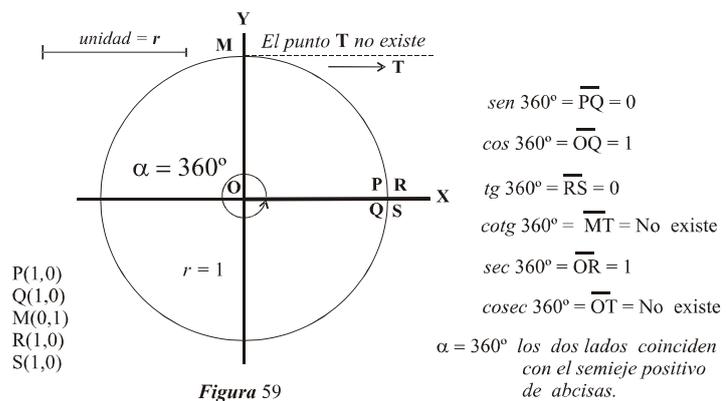
23. Razones trigonométricas del ángulo 360° .-

Veamos el caso particular del ángulo $\alpha = 360^\circ = 2\pi$ *radianes*.

De un modo gráfico podemos obtener los valores de las razones trigonométricas del ángulo 360° (2π *radianes*). Veamos:

- Representemos en el círculo trigonométrico el ángulo $\alpha = 360^\circ = 2\pi$ *radianes* y actuemos del mismo modo que para cualquier otro ángulo:

En la figura 59 se aprecia que los puntos **P** y **Q** coinciden y sus coordenadas son $x = 1$ e $y = 0$. También coinciden **R** y **S**. Nótese que el punto **T** no existe (se pierde en el infinito), lo cual hace que la *cotangente* \overline{MT} y la *cosecante* \overline{OT} no existan. Por tanto, el ángulo 360° no tiene ni *cotangente* ni *cosecante*.



NOTA: Puede apreciarse que las razones trigonométricas del ángulo 360° coinciden con las del ángulo 0° .

24. Relación entre las razones trigonométricas de un ángulo.-

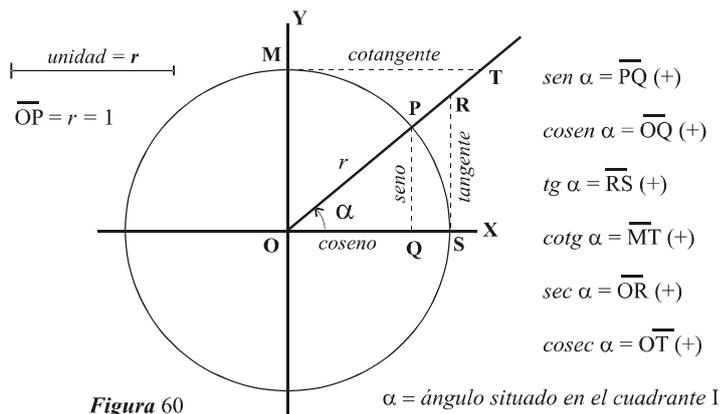
Sea α un ángulo y sean $\text{sen } \alpha$, $\text{cos } \alpha$, $\text{tg } \alpha$, $\text{cotg } \alpha$, $\text{sec } \alpha$ y $\text{cosec } \alpha$ sus razones trigonométricas.

Vamos a ver que dichas razones trigonométricas están relacionadas entre si.

En efecto:

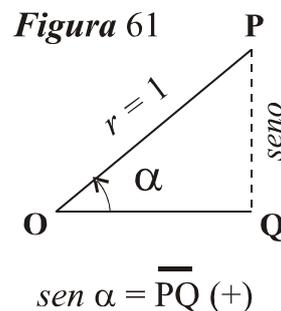
Vamos a considerar que α es un ángulo del primer cuadrante, pero el razonamiento es válido para un ángulo de cualquier cuadrante.

En la figura 60 hemos representado un ángulo α del cuadrante I y hemos trazado sus razones trigonométricas para buscar las relaciones existente entre ellas.



$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \overline{PQ} (+) \\ \operatorname{cosen} \alpha &= \overline{OQ} (+) \\ \operatorname{tg} \alpha &= \overline{RS} (+) \\ \operatorname{cotg} \alpha &= \overline{MT} (+) \\ \operatorname{sec} \alpha &= \overline{OR} (+) \\ \operatorname{cosec} \alpha &= \overline{OT} (+) \end{aligned}$$

Observa el triángulo rectángulo OQP



En la figura 61 tenemos el triángulo rectángulo OQP con ángulo recto en el vértice Q, catetos \overline{PQ} y \overline{OQ} e hipotenusa $r = 1$. Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos :

$$\overline{PQ}^2 + \overline{OQ}^2 = r^2$$

Teniendo en cuenta que $\overline{PQ} = \operatorname{sen} \alpha$, $\overline{OQ} = \operatorname{cosen} \alpha$ y $r = 1$, podemos poner que :

$$(\operatorname{sen} \alpha)^2 + (\operatorname{cosen} \alpha)^2 = 1$$

Para no tener que poner los paréntesis admitimos como correcto escribir la expresión anterior de la forma siguiente:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cosen}^2 \alpha = 1$$

Quede claro que esta última expresión significa lo mismo que la anterior. Hemos cambiado la forma para evitar los paréntesis.

La expresión $\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cosen}^2 \alpha = 1$ la verifican todos los ángulos α de cualquier cuadrante y se denomina **Fórmula Fundamental de la Trigonometría**. Su enunciado es como sigue:

“ Para cualquier ángulo α se verifica que su *seno* al cuadrado más su *coseno* al cuadrado es igual a 1 ”

Ejemplo 30.-

- ✓ Para el ángulo $\alpha = 38^\circ$ se verifica que $\operatorname{sen}^2 38^\circ + \operatorname{cosen}^2 38^\circ = 1$
- ✓ Para el ángulo $\alpha = 129^\circ$ se verifica que $\operatorname{sen}^2 129^\circ + \operatorname{cosen}^2 129^\circ = 1$
- ✓ Para el ángulo $\alpha = 205^\circ$ se verifica que $\operatorname{sen}^2 205^\circ + \operatorname{cosen}^2 205^\circ = 1$
- ✓ Para el ángulo $\alpha = 310^\circ$ se verifica que $\operatorname{sen}^2 310^\circ + \operatorname{cosen}^2 310^\circ = 1$
- ✓ Para el ángulo $\alpha = 90^\circ$ se verifica que $\operatorname{sen}^2 90^\circ + \operatorname{cosen}^2 90^\circ = 1^2 + 0^2 = 1 + 0 = 1$

También podemos expresar el ángulo en radianes:

- ✗ Para el ángulo $\alpha = \frac{3\pi}{5} \text{ rad}$ se verifica que $\operatorname{sen}^2 \frac{3\pi}{5} + \operatorname{cosen}^2 \frac{3\pi}{5} = 1$
- ✗ Para el ángulo $\alpha = \frac{5\pi}{4} \text{ rad}$ se verifica que $\operatorname{sen}^2 \frac{5\pi}{4} + \operatorname{cosen}^2 \frac{5\pi}{4} = 1$

Ejemplo 31.-

Se sabe que el seno de 45º vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Halla el valor del coseno de 45º.

Veamos:

Sabemos que $\text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y queremos hallar $\text{cos } 45^\circ$

Por la **Fórmula Fundamental de la Trigonometría** sabemos que: $\text{sen}^2 45^\circ + \text{cos}^2 45^\circ = 1$

Por tanto: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \text{cos } 45^\circ = 1$

$$\text{cos}^2 45^\circ = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{(\sqrt{2})^2}{2^2} = 1 - \frac{\sqrt{2^2}}{4} = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Despejando: $\text{cos } 45^\circ = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

Como 45º es del cuadrante I el seno es positivo

Por tanto:

$$\text{cos } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ejemplo 32.-

Se sabe que α es un ángulo del cuadrante II y que $\text{sen } \alpha = \frac{2}{5}$. Halla $\text{cos } \alpha$

Veamos:

Por ser α un ángulo del cuadrante II sabemos que $\text{cos } \alpha = \text{número negativo}$.

Por la **Fórmula Fundamental de la Trigonometría** tenemos que: $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$

Por tanto:

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

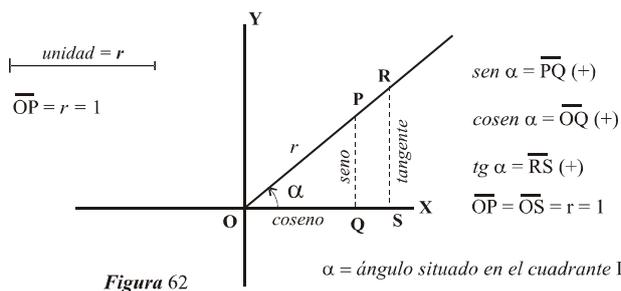
$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \text{cos}^2 \alpha = 1; \text{cos}^2 \alpha = 1 - \frac{4}{25}; \text{cos}^2 \alpha = \frac{25-4}{25}; \text{cos}^2 \alpha = \frac{21}{25}$$

Como el α es del cuadrante II: $\text{cos } \alpha = -\sqrt{\frac{21}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$

Por tanto:

$$\text{cos } \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

Observa nuevamente la figura 60. De esa figura extraemos la figura 62:



Los triángulos OQP y OSR son rectángulos y semejantes. Entonces podemos poner lo siguiente:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{RS}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{RS}}{1} = \overline{RS}$$

Figura 62

Ahora bien, observa que:

$$\operatorname{sen} \alpha = \overline{\text{PQ}} \quad ; \quad \operatorname{cos} \alpha = \overline{\text{OQ}} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \alpha = \overline{\text{RS}}$$

Entonces podemos poner que:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$$

Esto se verifica para todo ángulo α , independientemente del cuadrante al que pertenezca.

Por tanto: *“La tangente de un ángulo cualquiera es igual al seno de ese ángulo partido por el coseno”*

Ejemplo 33.-

Se sabe que $\operatorname{cos} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Hallar la tangente de 30° .

Veamos:

$$\begin{aligned} \text{sabemos que } \operatorname{cos} 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ y buscamos } \operatorname{tg} 30^\circ \\ \operatorname{tg} 30^\circ &= \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{cos} 30^\circ} = \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \text{Necesitamos hallar } \operatorname{sen} 30^\circ \end{aligned}$$

Por la fórmula fundamental de la trigonometría:

$$\operatorname{sen}^2 30^\circ + \operatorname{cos}^2 30^\circ = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 30^\circ + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 30^\circ = 1 - \frac{(\sqrt{3})^2}{2^2}$$

$$\operatorname{sen}^2 30^\circ = 1 - \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{sen}^2 30^\circ = \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{sen} 30^\circ = +\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \quad \text{el signo + es por ser } 30^\circ \text{ del cuadrante I}$$

$$\text{Por tanto: } \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{La tangente será: } \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Conclusión:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ejemplo 34.-

De un ángulo del cuadrante III se sabe que el *seno* es $-\frac{1}{3}$. Halla el *coseno* y la *tangente* de ese ángulo.

Veamos:

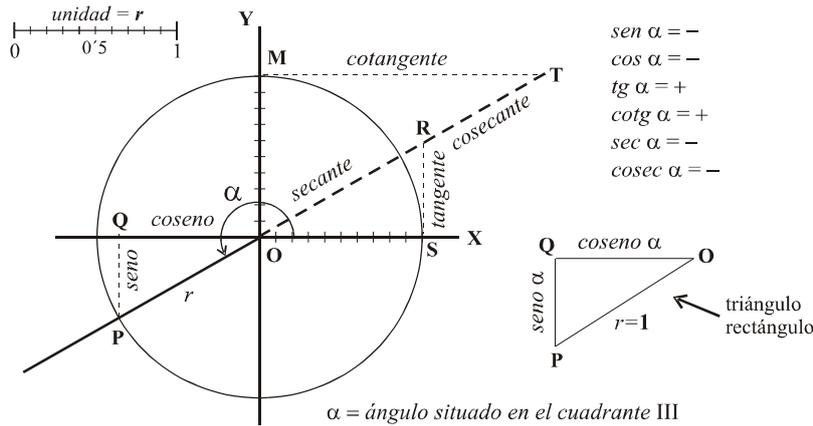


Figura 63

- sen $\alpha = -$
- cos $\alpha = -$
- tg $\alpha = +$
- cotg $\alpha = +$
- sec $\alpha = -$
- cosec $\alpha = -$

Observa el triángulo rectángulo OQP :

$$\overline{PQ}^2 + \overline{OQ}^2 = r^2 = 1$$

Es decir:

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

$$\frac{1}{9} + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

$$\text{cos}^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9}$$

$$\text{cos}^2 \alpha = \frac{8}{9} \Rightarrow \text{cos} \alpha = \pm \sqrt{\frac{8}{9}}$$

Como α es de III, es

$$\text{cos} \alpha = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{\sqrt{8}}{3} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Por tanto:

$$\text{cos} \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Hallemos la *tangente*:

$$\text{tg} \alpha = \frac{\text{sen} \alpha}{\text{cos} \alpha} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{3}{3 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Observa nuevamente la figura 60. De esa figura extraemos la figura 64:

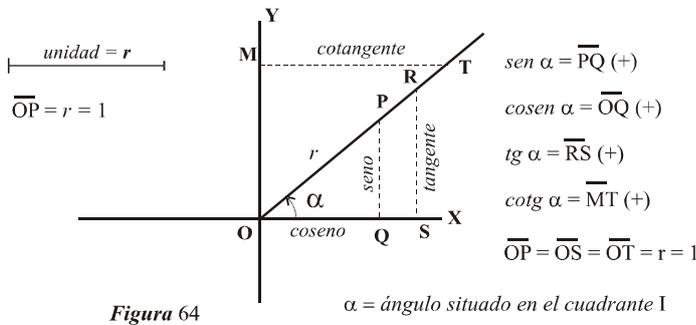


Figura 64

$\alpha = \text{ángulo situado en el cuadrante I}$

- sen $\alpha = \overline{PQ} (+)$
- cosen $\alpha = \overline{OQ} (+)$
- tg $\alpha = \overline{RS} (+)$
- cotg $\alpha = \overline{MT} (+)$
- $\overline{OP} = \overline{OS} = \overline{OT} = r = 1$

Los triángulos OQP y OMT son rectángulos y semejantes. Entonces podemos poner lo siguiente:

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{MT}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{MT}}{1} = \overline{MT}$$

Ahora bien, observa que:

$$\text{sen} \alpha = \overline{PQ} ; \text{cos} \alpha = \overline{OQ} \text{ y } \text{cotg} \alpha = \overline{MT}$$

Entonces podemos poner que:

$$\text{cotg} \alpha = \frac{\text{cos} \alpha}{\text{sen} \alpha}$$

Esto se verifica para todo ángulo α , independientemente del cuadrante al que pertenezca.

Por tanto: “La cotangente de un ángulo cualquiera es igual al coseno de ese ángulo partido por el seno”

Nótese además que:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

También $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1$, es decir, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg} \alpha}$

Quede claro que la *tangente* y *cotangente* de un ángulo α son inversas, es decir: $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1$

Nota: Obsérvese que para que ocurra que $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1$, la *tangente* y la *cotangente* de un ángulo α , deben tener el mismo signo (ambas positivas o ambas negativas).

Ejemplo 35.-

De un ángulo del cuadrante I se sabe que el *seno* es $\frac{5}{9}$. Halla el *coseno*, la *tangente* y *cotangente* de ese ángulo.

Veamos:

✓ Al ángulo le llamamos α . Sabemos que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{5}{9}$

Buscamos $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ y $\operatorname{cotg} \alpha$

✓ Por la fórmula fundamental de la trigonometría:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\left(\frac{5}{9}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1; \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{5}{9}\right)^2; \cos^2 \alpha = 1 - \frac{25}{81}; \cos^2 \alpha = \frac{56}{81}$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{56}{81}}$$

Como α es del cuadrante I, debe ser $\cos \alpha = + \sqrt{\frac{56}{81}} = \frac{\sqrt{56}}{9} = \frac{\sqrt{4 \cdot 14}}{9} = \frac{2\sqrt{14}}{9}$

Por tanto: $\cos \alpha = \frac{\sqrt{56}}{9} = \frac{2\sqrt{14}}{9}$

✓ Hallemos la *tangente*:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{2\sqrt{14}}{9}} = \frac{5 \cdot 9}{9 \cdot 2\sqrt{14}} = \frac{5}{2\sqrt{14}} = \frac{5 \cdot \sqrt{14}}{2\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{5\sqrt{14}}{2\sqrt{14}^2} = \frac{5\sqrt{14}}{2 \cdot 14} = \frac{5\sqrt{14}}{28}$$

✓ Hallemos la *cotangente*:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\frac{5\sqrt{14}}{28}} = \frac{28}{5\sqrt{14}} = \frac{28 \cdot \sqrt{14}}{5\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{28\sqrt{14}}{5\sqrt{14}^2} = \frac{28\sqrt{14}}{5 \cdot 14} = \frac{2 \cdot \sqrt{14}}{5}$$

O también: $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{14}}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{2\sqrt{14} \cdot 9}{9 \cdot 5} = \frac{2\sqrt{14}}{5}$

Por tanto:

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{14}}{9}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{5\sqrt{14}}{28}; \operatorname{cotg} \alpha = \frac{2\sqrt{14}}{5}$$

Ejemplo 36.-

Se sabe que la *tangente* de un ángulo del cuadrante II es $-1'25$. Halla la *cotangente* de ese ángulo.

Veamos:

✓ α es el ángulo. Sabemos que $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ y que $tg \alpha = -1'25 = -\frac{125}{100} = -\frac{5}{4}$

Buscamos $cotg \alpha$

✓ Sabemos que $cotg \alpha = \frac{1}{tg \alpha} = \frac{1}{-\frac{5}{4}} = -\frac{4}{5} = -0'8$

Por tanto:

$$cotg \alpha = -\frac{4}{5} = -0'8$$

Observa nuevamente la figura 60. De esa figura extraemos la figura 65:

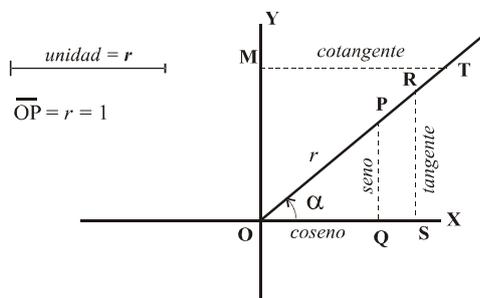


Figura 65

Consideremos el punto P
Hallemos la secante de α :

$$sec \alpha = \frac{\text{radio de P}}{\text{abscisa de P}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$\alpha = \text{ángulo situado en el cuadrante I}$

Observa que la secante de un ángulo es igual a la inversa del coseno, es decir:

$$sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

Esto es válido para cualquier cuadrante.

Ejemplo 37.-

De un ángulo del cuadrante I se sabe que el coseno es $\frac{7}{11}$. ¿Cuanto vale la secante?

Veamos:

✓ α es el ángulo. Sabemos que $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ y que $\cos \alpha = \frac{7}{11} = 0'63$

Buscamos $sec \alpha$

✓ Sabemos que $sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\frac{7}{11}} = \frac{11}{7} = 1'571428.....$ Por tanto:

$$sec \alpha = \frac{11}{7} = 1'571428.....$$

Ejemplo 38.-

La secante de un ángulo del cuadrante III es $-1'125$. Halla el valor del coseno.

Veamos:

✓ α es el ángulo. Sabemos que $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ y que $sec \alpha = -1'825 = -\frac{1825}{1000} = -\frac{73}{40}$

Buscamos $\cos \alpha$

✓ Sabemos que $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = -\frac{73}{40}$

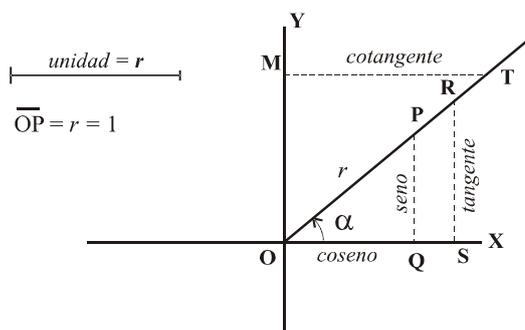
Por tanto:

$$\frac{1}{\cos \alpha} = -\frac{73}{40} ; -40 = 73 \cdot \cos \alpha ; -\frac{40}{73} = \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = -\frac{40}{73} = -0'54794520\dots\dots$$



Observa nuevamente la figura 60. De esa figura extraemos la figura 66:



Consideremos el punto P
 Hallemos la cosecante de α :

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\text{radio de P}}{\text{ordenada de P}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$\alpha = \text{ángulo situado en el cuadrante I}$

Figura 66

Observa que la cosecante de un ángulo es igual a la inversa del seno, es decir:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Esto es válido para cualquier cuadrante.

Ejemplo 39.-

El seno de un ángulo del cuadrante IV es $-0'105$. Halla el valor de la cosecante.

Veamos:

✓ α es el ángulo. Sabemos que $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ y que $\operatorname{sen} \alpha = -0'105 = -\frac{105}{1000} = -\frac{21}{40}$

Buscamos $\operatorname{cosec} \alpha$

✓ Sabemos que $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = -\frac{1}{-\frac{21}{40}} = -\frac{40}{21}$

Por tanto:

$$\operatorname{cosec} \alpha = -\frac{40}{21} = -1'90476190\dots\dots$$

Resumiendo:

Para cualquier ángulo α de cualquier cuadrante se verifica:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cos} \alpha}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Ejemplo 40.-

De un ángulo α se sabe que está en el cuadrante I y que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}$.

Halla el resto de sus razones trigonométricas.

Veamos:

→ Debemos hallar $\operatorname{cos} \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{cotg} \alpha$, $\operatorname{sec} \alpha$ y $\operatorname{cosec} \alpha$.

● Hallemos $\operatorname{cos} \alpha$:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 ; \frac{9}{25} + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 ; \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} ; \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{16}{25}$$

$$\text{Entonces: } \operatorname{cos} \alpha = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \pm \frac{4}{5}$$

como α es del cuadrante I, tomamos el valor positivo

Por tanto:

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{4}{5}$$

● Hallemos $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 4} = \frac{3}{4} . \text{ Por tanto:}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$$

● Hallemos $\operatorname{cotg} \alpha$:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4 \cdot 5}{5 \cdot 3} = \frac{4}{3} . \text{ Por tanto:}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{4}{3}$$

● Hallemos $\operatorname{sec} \alpha$:

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4} . \text{ Por tanto:}$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{5}{4}$$

- Hallemos $\operatorname{cosec} \alpha$:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3} . \text{ Por tanto:}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{5}{3}$$

Ejemplo 41.-

De un ángulo α se sabe que está en el cuadrante II y que $\cos \alpha = -\frac{4}{9}$.
Halla el resto de sus razones trigonométricas.

Veamos:

→ Debemos hallar $\operatorname{sen} \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{cotg} \alpha$, $\operatorname{sec} \alpha$ y $\operatorname{cosec} \alpha$.

- Hallemos $\operatorname{sen} \alpha$:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \left(-\frac{4}{9}\right)^2 = 1 ; \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{16}{81} = 1 ; \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{16}{81} ; \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{65}{81}$$

$$\text{Entonces: } \operatorname{sen} \alpha = \pm \sqrt{\frac{65}{81}} = \pm \frac{\sqrt{65}}{9}$$

como α es del cuadrante II, tomamos el valor positivo

Por tanto:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{65}}{9}$$

- Hallemos $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{65}}{9}}{-\frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{65} \cdot 9}{9 \cdot 4} = -\frac{\sqrt{65}}{4} . \text{ Por tanto:}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{65}}{4}$$

- Hallemos $\operatorname{cotg} \alpha$:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{-\frac{4}{9}}{\frac{\sqrt{65}}{9}} = -\frac{4 \cdot 9}{9 \cdot \sqrt{65}} = -\frac{4}{\sqrt{65}} = -\frac{4 \cdot \sqrt{65}}{\sqrt{65} \cdot \sqrt{65}} = -\frac{4 \cdot \sqrt{65}}{\sqrt{65^2}} = -\frac{4 \cdot \sqrt{65}}{65}$$

Por tanto:

$$\operatorname{cotg} \alpha = -\frac{4\sqrt{65}}{65}$$

- Hallemos $\operatorname{sec} \alpha$:

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{-\frac{4}{9}} = -\frac{9}{4} . \text{ Por tanto:}$$

$$\operatorname{sec} \alpha = -\frac{9}{4}$$

- Hallemos $\operatorname{cosec} \alpha$:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{65}}{9}} = \frac{9}{\sqrt{65}} = \frac{9 \cdot \sqrt{65}}{\sqrt{65} \cdot \sqrt{65}} = \frac{9 \cdot \sqrt{65}}{\sqrt{65^2}} = \frac{9 \cdot \sqrt{65}}{65}$$

Por tanto:

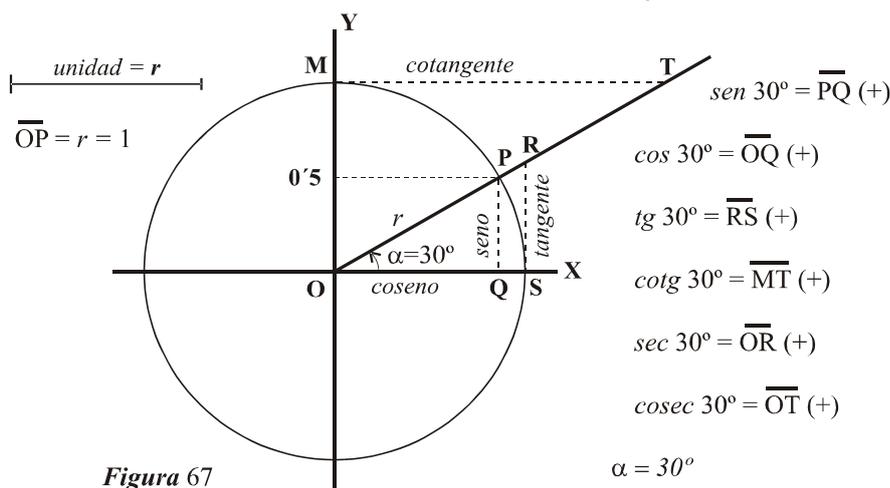
$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{9\sqrt{65}}{65}$$

25. Razones trigonométricas de algunos ángulos más usuales.-

Algunos ángulos son más usuales que otros en la tecnología, el diseño, el arte, etc. Esos ángulos, son 0° , 30° , 45° , 60° , 90° , 180° , 270° y 360° .

En algunos de ellos ya hemos visto sus razones trigonométricas anteriormente. Veremos ahora las de los ángulos 30° , 45° y 60° que aparecen con cierta frecuencia en las materias mencionadas anteriormente.

Razones trigonométricas de $\alpha = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ radianes :



Razones de $\alpha = 30^\circ$

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = 0'5$$

$$\operatorname{cos} 30^\circ = \operatorname{cos} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{cotg} 30^\circ = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{sec} 30^\circ = \operatorname{sec} \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} = 2$$

$$\alpha = 30^\circ$$

Partimos de que $\operatorname{sen} 30^\circ = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

Entonces:

$$\operatorname{sen}^2 30^\circ + \operatorname{cos}^2 30^\circ = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \operatorname{cos}^2 30^\circ = 1 ; \frac{1}{4} + \operatorname{cos}^2 30^\circ = 1 ; \operatorname{cos}^2 30^\circ = 1 - \frac{1}{4} ; \operatorname{cos}^2 30^\circ = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{cos} 30^\circ = \pm \sqrt{\frac{3}{4}} \underset{\substack{\text{por ser } 30^\circ \text{ del} \\ \text{cuadrante I tomamos} \\ \text{el valor positivo}}}{=} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{cos} 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

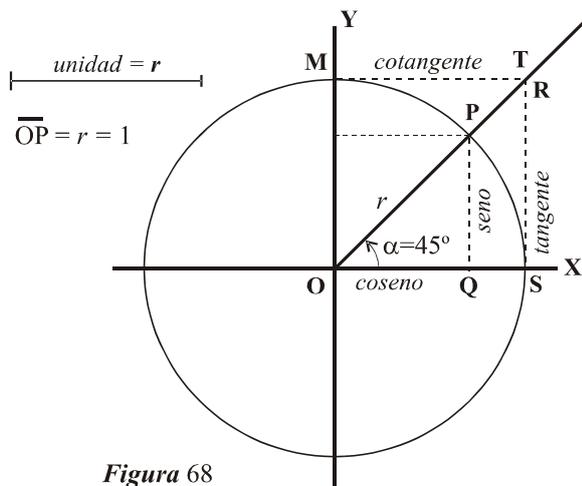
$$\operatorname{cotg} 30^\circ = \frac{\operatorname{cos} 30^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot 1} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{sec} 30^\circ = \frac{1}{\operatorname{cos} 30^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{1}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

En la figura 67 puedes comprobar como la longitud del segmento OT (cosecante de 30°) es el doble del radio y como la medida de PQ (seno de 30°) es la mitad.

Razones trigonométricas de $\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$ radianes :



$$\begin{aligned} \overline{OP} = r = 1 \\ \text{sen } 45^\circ = \overline{PQ} (+) \\ \text{cos } 45^\circ = \overline{OQ} (+) \\ \text{tg } 45^\circ = \overline{RS} (+) \\ \text{cotg } 45^\circ = \overline{MT} (+) \\ \text{sec } 45^\circ = \overline{OR} (+) \\ \text{cosec } 45^\circ = \overline{OT} (+) \\ \alpha = 45^\circ \end{aligned}$$

Razones de $\alpha = 45^\circ$

$$\begin{aligned} \text{sen } 45^\circ &= \text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{cos } 45^\circ &= \text{cos } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{tg } 45^\circ &= \text{tg } 4 = 1 \\ \text{cotg } 45^\circ &= \text{cotg } \frac{\pi}{4} = 1 \\ \text{sec } 45^\circ &= \text{sec } \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \\ \text{cosec } 45^\circ &= \text{cosec } \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Partimos de que $\text{sen } 45^\circ = \text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Entonces:

$$\text{sen}^2 45^\circ + \text{cos}^2 45^\circ = 1$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \text{cos}^2 45^\circ = 1 ; \frac{2}{4} + \text{cos}^2 45^\circ = 1 ; \text{cos}^2 45^\circ = 1 - \frac{1}{2} ; \text{cos}^2 45^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{cos } 45^\circ = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \begin{array}{l} \text{por ser } 45^\circ \text{ del} \\ \text{cuadrante I tomamos} \\ \text{el valor positivo} \end{array} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45^\circ = \frac{\text{sen } 45^\circ}{\text{cos } 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$\text{cotg } 45^\circ = \frac{\text{cos } 45^\circ}{\text{sen } 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$\text{sec } 45^\circ = \frac{1}{\text{cos } 45^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\text{cosec } 45^\circ = \frac{1}{\text{sen } 45^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Razones trigonométricas de $\alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$ radianes :

En este caso partimos de que $\text{sen } 60^\circ = \text{sen } \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

En la figura 69 tenemos trazadas las razones trigonométricas de ese ángulo en el círculo trigonométrico.

Es fácil apreciar gráficamente que $\text{sen } 60^\circ = \text{cos } 30^\circ$ y que $\text{cos } 60^\circ = \text{sen } 30^\circ$

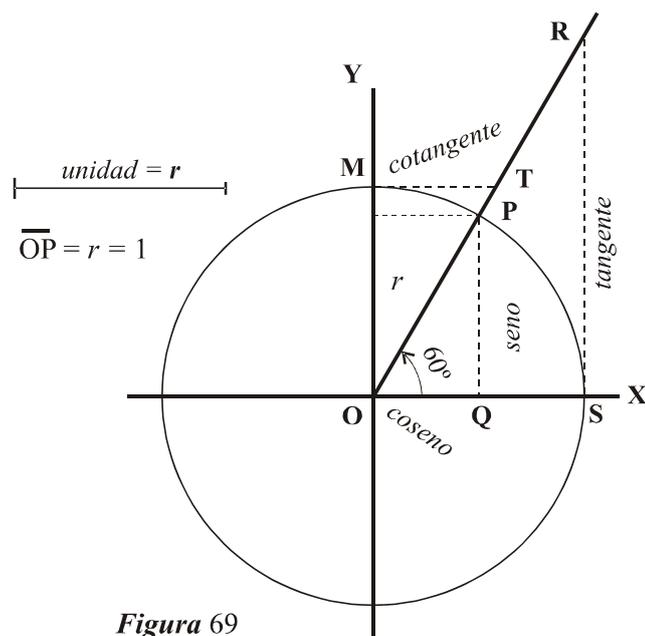


Figura 69

$$\text{sen } 60^\circ = \overline{PQ} (+)$$

$$\text{cos } 60^\circ = \overline{OQ} (+)$$

$$\text{tg } 60^\circ = \overline{RS} (+)$$

$$\text{cotg } 60^\circ = \overline{MT} (+)$$

$$\text{sec } 60^\circ = \overline{OR} (+)$$

$$\text{cosec } 60^\circ = \overline{OT} (+)$$

$$\alpha = 60^\circ$$

Hallemos $\text{cos } 60^\circ$, $\text{tg } 60^\circ$, $\text{cotg } 60^\circ$, $\text{sec } 60^\circ$ y $\text{cosec } 60^\circ$:

$$\text{sen}^2 60^\circ + \text{cos}^2 60^\circ = 1$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \text{cos}^2 60^\circ = 1 ; \frac{3}{4} + \text{cos}^2 60^\circ = 1 ; \text{cos}^2 60^\circ = 1 - \frac{3}{4} ; \text{cos}^2 60^\circ = \frac{1}{4}$$

$$\text{cos } 60^\circ = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \quad \begin{array}{l} \text{por ser } 60^\circ \text{ del} \\ \text{cuadrante 1 tomamos} \\ \text{el valor positivo} \end{array} \quad \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{\text{sen } 60^\circ}{\text{cos } 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\text{cotg } 60^\circ = \frac{\text{cos } 60^\circ}{\text{sen } 60^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{sec } 60^\circ = \frac{1}{\text{cos } 60^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\text{cosec } 60^\circ = \frac{1}{\text{sen } 60^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}$$

Razones de $\alpha = 60^\circ$

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} ; \text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2} ; \text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\text{sec } 60^\circ = 2 ; \text{cosec } 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3} ; \text{cotg } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Resumen:

La siguiente figura y el siguiente cuadro resumen las razones trigonométricas de los ángulos 30°, 45° y 60°, de las cuales conviene memorizar el *seno* y el *coseno*.

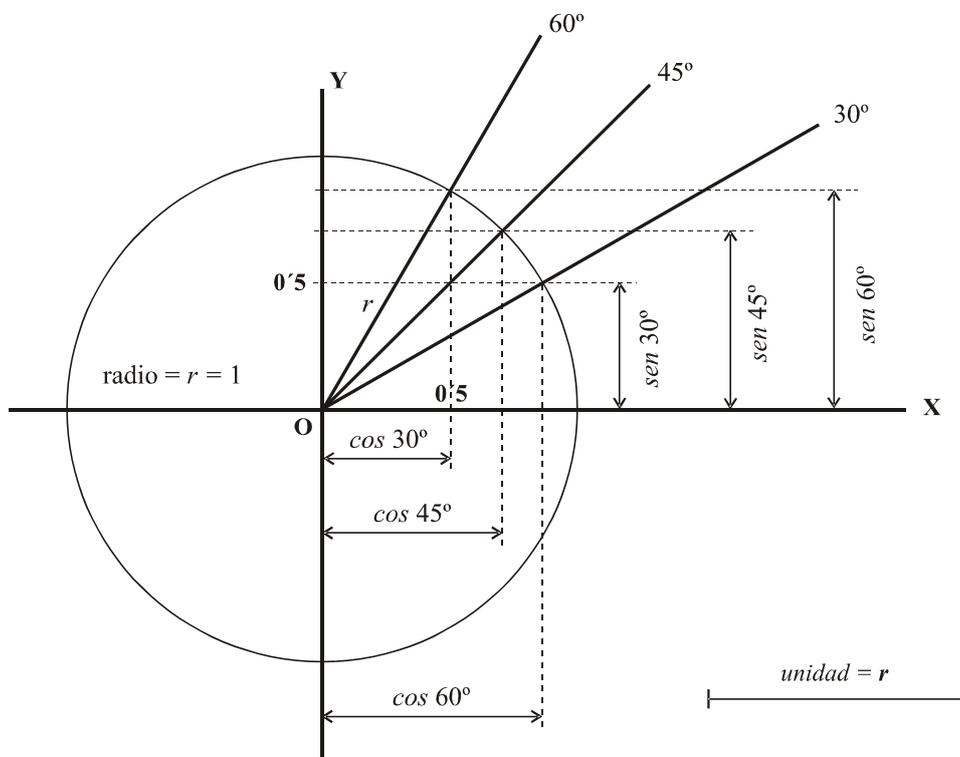


Figura 70

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Una regla nemotécnica para memorizar los valores que corresponden a *seno* y *coseno* de 30°, 45° y 60° se explica a continuación. Conviene que la entiendas para que no la olvides nunca.

- ✎ En la figura 70 puedes observar que $sen\ 30^\circ < sen\ 45^\circ < sen\ 60^\circ$
Es decir, de los **tres senos** el menor es el de 30°, el del medio es 45° y el mayor es 60°
- ✎ Debes tener claro que $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Estos tres números corresponden a los senos de esos ángulos, por lo que deberán ser:

$$sen\ 30^\circ = \frac{1}{2} < sen\ 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} < sen\ 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- ✎ Del mismo modo observa en la figura 70 que $cos\ 60^\circ < cos\ 45^\circ < cos\ 30^\circ$
Es decir, de los **tres cosenos** el menor es el de 60°, el del medio es 45° y el mayor 30°

☞ Debes tener claro que $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Estos tres números corresponden a los cosenos de esos ángulos, por lo que deberán ser:

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} < \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} < \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

26. Ángulos suplementarios.-

Dos ángulos α y β son suplementarios si su suma es 180° (π radianes). Es decir:

α y β son ángulos suplementarios $\Leftrightarrow \alpha + \beta = 180^\circ$
--

En este caso se dice que α es el suplementario de β y que β es el suplementario de α .

Ejemplo 42.-

Hallar el ángulo suplementario de $\alpha = 41^\circ 22' 55''$

Veamos:

- ✓ β es el ángulo suplementario de α
 Debe cumplirse que $\alpha + \beta = 180^\circ$
 Por tanto $\beta = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 41^\circ 22' 55'' = 138^\circ 37' 5''$ es el suplementario de α

Ejemplo 43.-

Hallar el ángulo suplementario de $\alpha = \frac{2\pi}{5} \text{ rad}$

Veamos:

- ✓ β es el ángulo suplementario de $\alpha = \frac{2\pi}{5} \text{ rad}$
 Debe cumplirse que $\alpha + \beta = \pi \text{ rad}$
 Por tanto $\beta = \pi - \alpha = \pi - \frac{2\pi}{5} = \frac{5\pi - 2\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}$ es el suplementario de α

27. Relación entre las razones de dos ángulos suplementarios.-

Ahora veamos como se relacionan las razones de un ángulo α y su suplementario $\beta = \pi - \alpha$

Supongamos un ángulo α (por comodidad lo tomaremos en el primer cuadrante) y su complementario $\beta = 180^\circ - \alpha$ (o lo que es lo mismo $\beta = \pi - \alpha$).

Queremos ver como se relacionan las razones trigonométricas de ambos ángulos, es decir, como se relacionan:

$\text{sen } \alpha$	$\text{cos } \alpha$	$\text{tg } \alpha$	$\text{cotg } \alpha$	$\text{sec } \alpha$	$\text{cosec } \alpha$
$\text{sen } (\pi - \alpha)$	$\text{cos } (\pi - \alpha)$	$\text{tg } (\pi - \alpha)$	$\text{cotg } (\pi - \alpha)$	$\text{sec } (\pi - \alpha)$	

y

Representemos gráficamente ambos ángulos (α y β) y tracemos sus razones trigonométricas. De un modo visual podremos obtener como se relacionan las de un ángulo y las de otro.

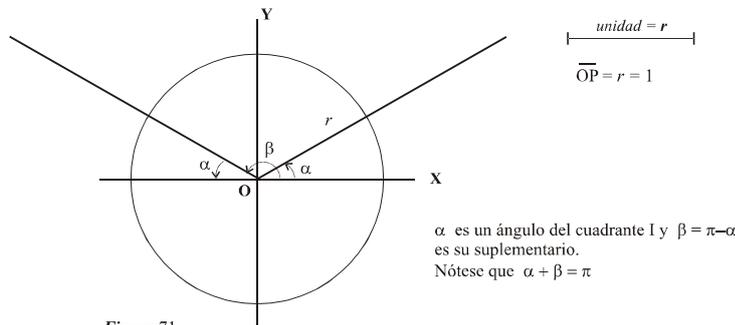


Figura 71

Una vez entendido como se ven dos ángulos α y β suplementarios en el círculo trigonométrico, vamos a ver como son sus razones trigonométricas y como se comparan.

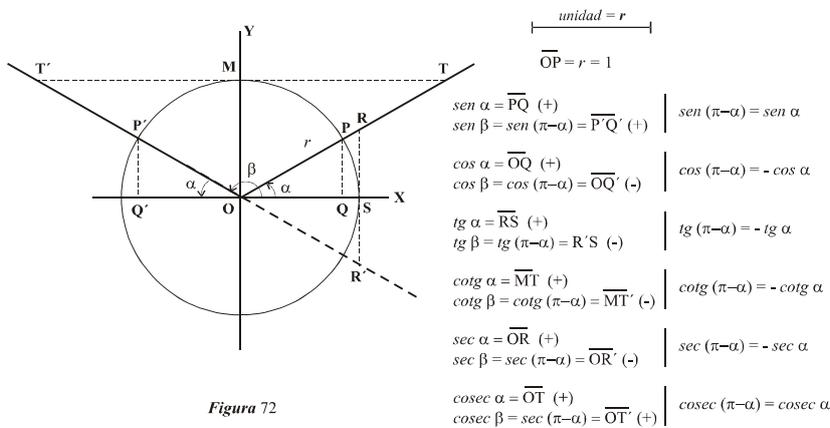


Figura 72

Las relaciones expresadas en la Figura 72 nos permite conocer las razones trigonométricas de un ángulo si conocemos las razones de su suplementario. Nótese que hay que tener en cuenta el signo.

Ejemplo 44.-

Supongamos que queremos hallar las razones trigonométricas del ángulo 150° basándonos en las razones trigonométricas de los ángulos que conocemos.

Veamos:

- Llamamos $\beta = 150^\circ$. Buscamos sus razones trigonométricas.
- Llamamos $\alpha = 30^\circ$. Observa que $\alpha + \beta = 180^\circ$, es decir, α y β son suplementarios.
- Por tanto, $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$

Entonces:

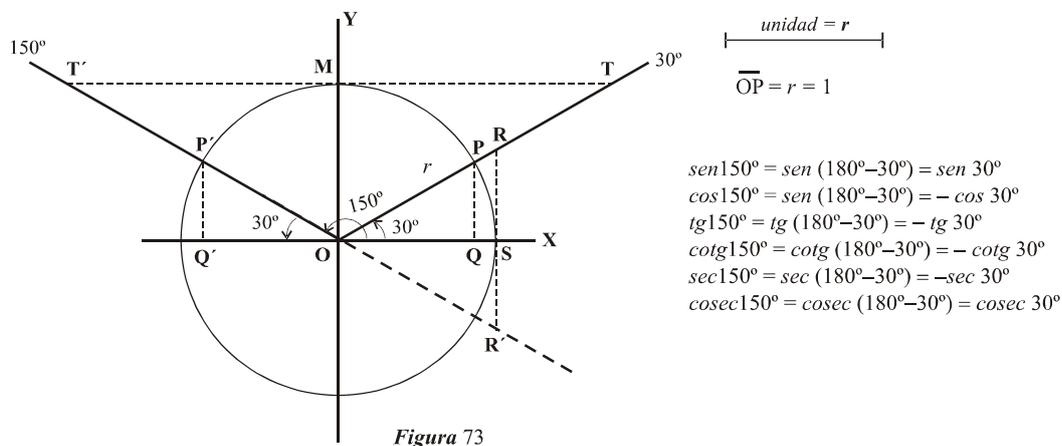


Figura 73

Utilizando las razones trigonométricas de 30° , calcularemos las de 150° :

$$\operatorname{sen} 150^\circ = \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{cos} 150^\circ = -\operatorname{cos} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 150^\circ = \frac{\operatorname{sen} 150^\circ}{\operatorname{cos} 150^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cotg} 150^\circ = \frac{\operatorname{cos} 150^\circ}{\operatorname{sen} 150^\circ} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

$$\operatorname{sec} 150^\circ = \frac{1}{\operatorname{cos} 150^\circ} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cosec} 150^\circ = \frac{1}{\operatorname{sen} 150^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Ejemplo 45.-

Hallemos las razones trigonométricas del ángulo 135°

Veamos:

No es necesario hacer el dibujo exacto del círculo trigonométrico con el ángulo 135° , aunque se puede esbozar un dibujo aproximado que nos sirva de ayuda, es decir:

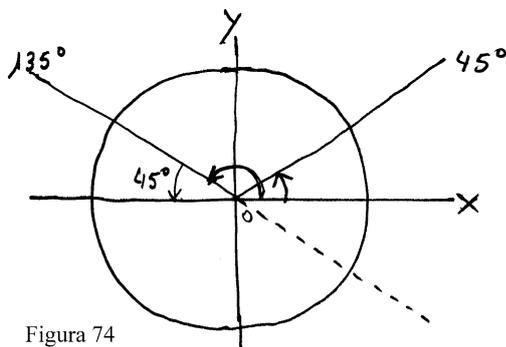


Figura 74

Llamaremos:

$$\alpha = 45^\circ \text{ y } \beta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

Observando la Figura 74, es fácil apreciar lo siguiente:

$$\operatorname{sen} 135^\circ = \operatorname{sen}(180^\circ - 45^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{cos} 135^\circ = \operatorname{cos}(180^\circ - 45^\circ) = -\operatorname{cos} 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 135^\circ = \frac{\operatorname{sen} 135^\circ}{\operatorname{cos} 135^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

$$\operatorname{cotg} 135^\circ = \frac{\operatorname{cos} 135^\circ}{\operatorname{sen} 135^\circ} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

$$\operatorname{sec} 135^\circ = \frac{1}{\operatorname{cos} 135^\circ} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

$$\operatorname{cosec} 135^\circ = \frac{1}{\operatorname{sen} 135^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Ejemplo 46.-

Sabemos que α es un ángulo del cuadrante I y tal que su seno vale 0'42. Halla el seno, coseno y tangente del ángulo $\beta = \pi - \alpha$.

Veamos:

☞ Es evidente que α y β son ángulos suplementarios ya que $\alpha + \beta = \alpha + \pi - \alpha = \pi$

☞ Sabemos que $\text{sen } \alpha = 0'42 = \frac{42}{100} = \frac{21}{50}$

☞ Buscamos $\text{sen}(\pi - \alpha)$, $\text{cos}(\pi - \alpha)$ y $\text{tg}(\pi - \alpha)$

Sin necesidad de esbozar un dibujo (aunque hacerlo puede servirnos de ayuda):

$$\text{sen } \beta = \text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen } \alpha = \frac{21}{50} = 0'42$$

$$\text{cos } \beta = \text{cos}(\pi - \alpha) = -\text{cos } \alpha$$

Hallemos el coseno de α . Recordemos que por ser del cuadrante I es positivo:

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

$$\left(\frac{21}{50}\right)^2 + \text{cos}^2 \alpha = 1 \quad ; \quad \text{cos}^2 \alpha = 1 - \frac{21^2}{50^2} \quad ; \quad \text{cos}^2 \alpha = \frac{50^2 - 21^2}{50^2} \quad ; \quad \text{cos}^2 \alpha = \frac{50^2 - 21^2}{50^2}$$

$$\text{cos}^2 \alpha = \frac{2059}{50^2} \quad ; \quad \text{cos } \alpha = +\sqrt{\frac{2059}{50^2}} \quad ; \quad \text{cos } \alpha = \frac{\sqrt{2059}}{50}$$

Entonces:

$$\text{cos } \beta = -\frac{\sqrt{2059}}{50} \quad (\text{recordemos que } \beta \text{ es del cuadrante II})$$

Hallemos la tangente de β :

$$\text{tg } \beta = \frac{\text{sen } \beta}{\text{cos } \beta} = \frac{\frac{21}{50}}{-\frac{\sqrt{2059}}{50}} = -\frac{21 \cdot 50}{50 \cdot \sqrt{2059}} = -\frac{21}{\sqrt{2059}} = -\frac{21 \cdot \sqrt{2059}}{\sqrt{2059} \cdot \sqrt{2059}} = -\frac{21 \sqrt{2059}}{\sqrt{2059}^2} = -\frac{21 \sqrt{2059}}{2059}$$

En definitiva:

$$\text{sen } \beta = \frac{21}{50} = 0'42$$

$$\text{cos } \beta = -\frac{\sqrt{2059}}{50} = -0'90752410.....$$

$$\text{tg } \beta = -\frac{21 \sqrt{2059}}{2059} = -0'46279762.....$$

28. Ángulos que se diferencian en π radianes (180º).

Sea α un ángulo cualquiera (no importa el cuadrante)

Sea el ángulo $\beta = \pi + \alpha$. ($\beta = 180^\circ + \alpha$)

Es evidente que ambos ángulos se diferencian en π radianes ya que $\beta - \alpha = \pi$ rad.

Nos hacemos la siguiente pregunta:

¿Cómo se relacionan las razones trigonométricas de β y de α ?

Si conocemos las razones de α , ¿podemos conocer las de $\beta = \pi + \alpha$?

Veamos:

☞ Por comodidad, vamos a suponer que α es un ángulo del cuadrante I (aunque lo que hacemos es válido para cualquier cuadrante).

☞ Representemos en el círculo trigonométrico los ángulos α y $\beta = \pi + \alpha$.

☞ Tracemos las razones trigonométricas de ambos ángulos y comparemos para ver la relación existente entre ellas:

$$\operatorname{sen} 210^\circ = -\operatorname{sen} 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{cos} 210^\circ = -\operatorname{cos} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 210^\circ = \frac{\operatorname{sen} 210^\circ}{\operatorname{cos} 210^\circ} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cotg} 210^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 210^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{sec} 210^\circ = \frac{1}{\operatorname{cos} 210^\circ} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cosec} 210^\circ = \frac{1}{\operatorname{sen} 210^\circ} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

Ejemplo 48.-

Hallemos las razones trigonométricas del ángulo $\beta = 225^\circ$

Veamos:

- ✓ Podemos poner que $\beta = 225^\circ = 180^\circ + 45^\circ$ si lo expresamos en grados sexagesimales.
- ✓ En este caso no nos ayudaremos de un dibujo. Mentalmente observamos que 225° está en el cuadrante II.

$$\operatorname{sen} 225^\circ = \operatorname{sen}(180^\circ + 45^\circ) = -\operatorname{sen} 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{cos} 225^\circ = \operatorname{cos}(180^\circ + 45^\circ) = -\operatorname{cos} 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 225^\circ = \frac{\operatorname{sen} 225^\circ}{\operatorname{cos} 225^\circ} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$\operatorname{cotg} 225^\circ = \frac{\operatorname{cos} 225^\circ}{\operatorname{sen} 225^\circ} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$\operatorname{sec} 225^\circ = \frac{1}{\operatorname{cos} 225^\circ} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

$$\operatorname{cosec} 225^\circ = \frac{1}{\operatorname{sen} 225^\circ} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

Ejemplo 49.-

Hallemos las razones trigonométricas del ángulo $\beta = \frac{4\pi}{3}$ rad

Veamos:

- ✗ Observa que en este caso nos dan el ángulo en radianes.
- ✗ Podemos poner que $\beta = \frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi + \pi}{3} = \frac{3\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$ rad siendo $\frac{\pi}{3}$ un ángulo de I.
- ✗ Considerando que $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$, podemos poner:

$$\operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = \operatorname{sen} \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = -\operatorname{sen} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{cos} \frac{4\pi}{3} = \operatorname{cos} \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\operatorname{cos} \frac{\pi}{3} = -\operatorname{cos} 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} = \frac{\operatorname{sen} \frac{4\pi}{3}}{\operatorname{cos} \frac{4\pi}{3}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{cotg} \frac{4\pi}{3} = \frac{\operatorname{cos} \frac{4\pi}{3}}{\operatorname{sen} \frac{4\pi}{3}} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{sec} \frac{4\pi}{3} = \frac{1}{\operatorname{cos} \frac{4\pi}{3}} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

$$\operatorname{cosec} \frac{4\pi}{3} = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{4\pi}{3}} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}$$

29. Relación entre las razones trigonométricas de ángulos opuestos.-

Recuerda que si α es un ángulo, su opuesto se escribe $-\alpha$ y se interpreta como un ángulo de igual tamaño pero tomado en sentido contrario a α , es decir, si α está tomado en el sentido del movimiento contrario a las agujas de un reloj (sentido positivo), entonces $-\alpha$ está tomado en el sentido del movimiento de las agujas del reloj.

Observa que la suma de un ángulo y su opuesto es el ángulo 0° , es decir:

$$\alpha + (-\alpha) = \alpha - \alpha = 0^\circ$$

En las figuras 77.a y 77.b se aprecia como serian un ángulo α y su opuesto $-\alpha$:

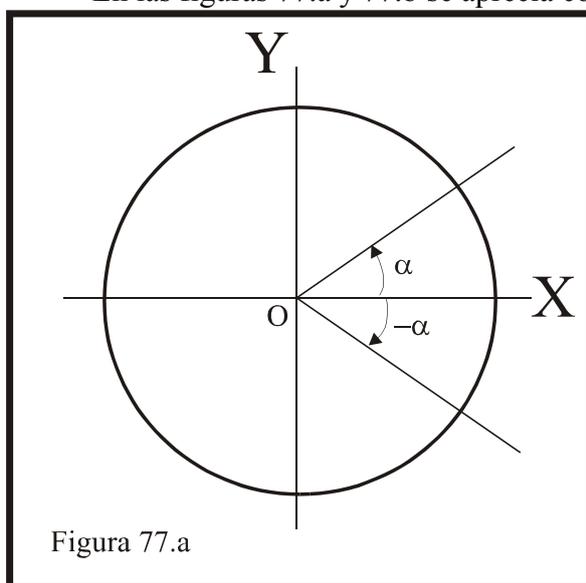


Figura 77.a

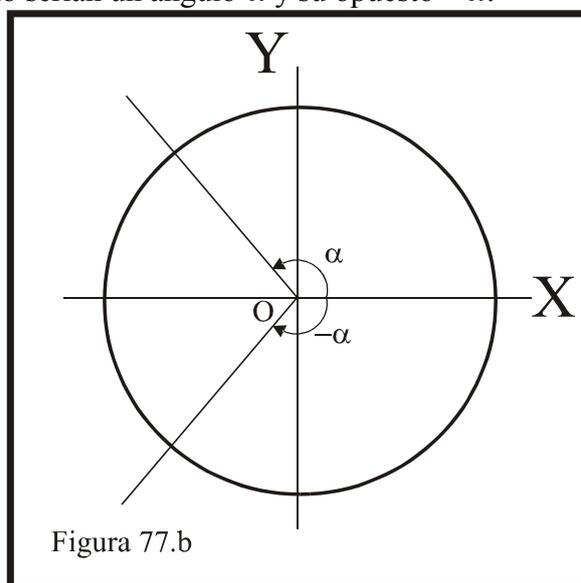


Figura 77.b

Figura 77.a:

En este caso el ángulo α es del cuadrante I y su opuesto $-\alpha$ está en el cuadrante IV. Nótese que el sentido del ángulo determina su signo

Figura 77.b:

En este caso el ángulo α es del cuadrante II y su opuesto $-\alpha$ está en el cuadrante III. Nótese que el sentido del ángulo determina su signo.

- ✓ Ahora veremos como se relacionan las razones trigonométricas de α y $-\alpha$.
 Consideremos que α es un ángulo del cuadrante I (los resultados son válidos para el caso que sea de otro cuadrante):

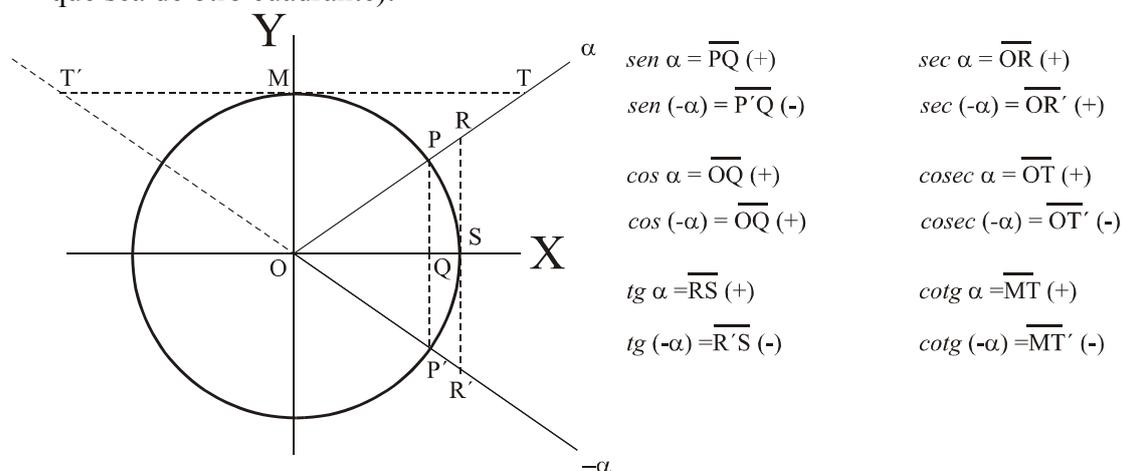


Figura 78

A la vista de la expresado en la figura 78 podemos poner:

$$\begin{aligned} \text{sen}(-\alpha) &= -\text{sen } \alpha & ; & & \text{cos}(-\alpha) &= \text{cos } \alpha \\ \text{tg}(-\alpha) &= -\text{tg } \alpha & ; & & \text{cotg}(-\alpha) &= -\text{cotg } \alpha \\ \text{sec}(-\alpha) &= \text{sec } \alpha & ; & & \text{cosec}(-\alpha) &= -\text{cosec } \alpha \end{aligned}$$

De este modo, si conocemos las razones trigonométricas de un ángulo α , podemos conocer las de su opuesto $-\alpha$.

Ejemplo 50.-

Hallemos las razones trigonométricas del ángulo -60°
 Veamos:

$$\text{sen}(-60^\circ) = -\text{sen } 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \text{cos}(-60^\circ) = \text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg}(-60^\circ) = -\text{tg } 60^\circ = -\frac{\text{sen } 60^\circ}{\text{cos } 60^\circ} = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 1} = -\sqrt{3}$$

$$\text{cotg}(-60^\circ) = -\text{cotg } 60^\circ = -\frac{\text{cos } 60^\circ}{\text{sen } 60^\circ} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{sec}(-60^\circ) = \text{sec } 60^\circ = \frac{1}{\text{cos } 60^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\text{cosec}(-60^\circ) = -\text{cosec } 60^\circ = -\frac{1}{\text{sen } 60^\circ} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ejemplo 51.-

Hallemos las razones trigonométricas del ángulo -135°

Veamos:

Observa que 135° es un ángulo del cuadrante II y -135° es un ángulo de III

$$\operatorname{sen}(-135^\circ) = -\operatorname{sen} 135^\circ = -\operatorname{sen} 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \operatorname{cos}(-135^\circ) = \operatorname{cos} 135^\circ = -\operatorname{cos} 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg}(-135^\circ) = \frac{\operatorname{sen}(-135^\circ)}{\operatorname{cos}(-135^\circ)} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$\operatorname{cotg}(-135^\circ) = \frac{\operatorname{cos}(-135^\circ)}{\operatorname{sen}(-135^\circ)} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$\operatorname{sec}(-135^\circ) = \frac{1}{\operatorname{cos}(-135^\circ)} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

$$\operatorname{cosec}(-135^\circ) = \frac{1}{\operatorname{sen}(-135^\circ)} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

30.Reducción al primer cuadrante.-

Veremos en este apartado como las razones trigonométricas de un ángulo del II, III o IV cuadrante están relacionadas con las razones de un ángulo del cuadrante I., es decir:

- ♣ Supongamos que β es un ángulo de uno de los cuadrantes II, III o IV.
- ♣ Existe un ángulo α del cuadrante I tal que las razones del ángulo β podemos hallarlas a través de las razones de α .

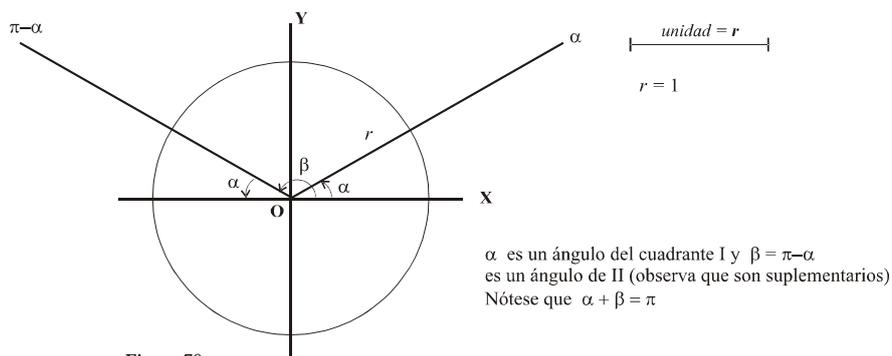
Veamos:

⇒ Sea α un ángulo del cuadrante I. El ángulo $\beta = \pi - \alpha$ será un ángulo del cuadrante II.

⇒ Si conocemos las razones trigonométricas del ángulo α podemos conocer las de $\beta = \pi - \alpha$

Nos ayudaremos de un gráfico:

En la figura 72 de la página 56 tienes explicado la relación entre las razones trigonométricas del ángulo $\beta = \pi - \alpha$ (del cuadrante II) y

**Ejemplo 52.-**

Supongamos que α un ángulo del cuadrante I y que $\operatorname{sen} \alpha = 0'38$.

Queremos hallar el seno y coseno del ángulo $\beta = \pi - \alpha$.

Veamos:

$$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha = 0'38 = \frac{38}{100} = \frac{19}{50} \quad \text{ya tenemos el valor del seno.}$$

Hallemos el coseno

$$\text{sen}^2(\pi - \alpha) + \text{cos}^2(\pi - \alpha) = 1$$

$$\text{cos}^2(\pi - \alpha) = 1 - \text{sen}^2(\pi - \alpha) = 1 - \left(\frac{19}{50}\right)^2 = \frac{50^2 - 19^2}{50^2} = \frac{2139}{2500}$$

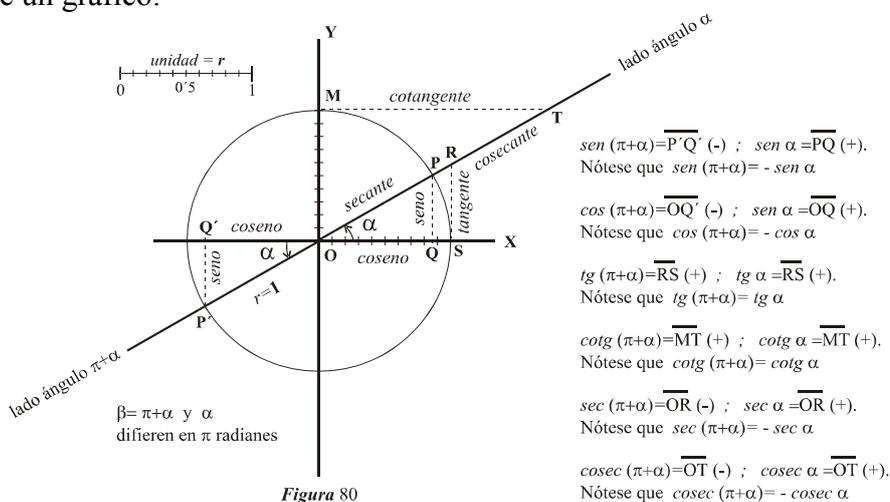
$$\text{cos}(\pi - \alpha) = -\sqrt{\frac{2139}{2500}} = -\frac{\sqrt{2139}}{50} = -0'92498648\dots \approx -0'9250$$

Nótese que hemos tomado $\text{cos}(\pi - \alpha)$ negativo por ser $\pi - \alpha$ un ángulo del cuadrante II.



- ⇒ Sea α un ángulo del cuadrante I. El ángulo $\beta = \pi + \alpha$ será un ángulo del cuadrante III. Observa que α y $\beta = \pi + \alpha$ se diferencian en π radianes.
- ⇒ Si conocemos las razones trigonométricas del ángulo α podemos conocer las de $\beta = \pi + \alpha$. Nos ayudaremos de un gráfico:

La figura 80 nos muestra como se relacionan las razones de los ángulos α (de I) y $\beta = \pi + \alpha$ (de III). Observa que esta figura coincide con la figura 75 de la página 59.



$\text{sen}(\pi + \alpha) = \overline{P'Q'}$ (-) ; $\text{sen} \alpha = \overline{PQ}$ (+).
 Nótese que $\text{sen}(\pi + \alpha) = -\text{sen} \alpha$
 $\text{cos}(\pi + \alpha) = \overline{OQ'}$ (-) ; $\text{sen} \alpha = \overline{OQ}$ (+).
 Nótese que $\text{cos}(\pi + \alpha) = -\text{cos} \alpha$
 $\text{tg}(\pi + \alpha) = \overline{RS}$ (+) ; $\text{tg} \alpha = \overline{RS}$ (+).
 Nótese que $\text{tg}(\pi + \alpha) = \text{tg} \alpha$
 $\text{cotg}(\pi + \alpha) = \overline{MT}$ (+) ; $\text{cotg} \alpha = \overline{MT}$ (+).
 Nótese que $\text{cotg}(\pi + \alpha) = \text{cotg} \alpha$
 $\text{sec}(\pi + \alpha) = \overline{OR}$ (-) ; $\text{sec} \alpha = \overline{OR}$ (+).
 Nótese que $\text{sec}(\pi + \alpha) = -\text{sec} \alpha$
 $\text{cosec}(\pi + \alpha) = \overline{OT}$ (-) ; $\text{cosec} \alpha = \overline{OT}$ (+).
 Nótese que $\text{cosec}(\pi + \alpha) = -\text{cosec} \alpha$

Ejemplo 53.-

Supongamos que α un ángulo del cuadrante I y que $\text{cos} \alpha = 0'75$

Queremos hallar el *seno*, *coseno*, *tangente* y *cotangente* del ángulo $\beta = \pi + \alpha$.

Veamos:

$$\text{sen}(\pi + \alpha) = -\text{sen} \alpha = -0'75 = -\frac{75}{100} = -\frac{3}{4} \quad \text{ya tenemos el valor del seno.}$$

Hallemos el *coseno*

$$\text{sen}^2(\pi + \alpha) + \text{cos}^2(\pi + \alpha) = 1$$

$$\text{cos}^2(\pi + \alpha) = 1 - \text{sen}^2(\pi + \alpha) = 1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{16 - 9}{16} = \frac{7}{16}$$

$$\text{cos}(\pi + \alpha) = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4} = -0'66143782\dots \approx -0'6614$$

Hallemos la *tangente* y *cotangente*:

$$\text{tg}(\pi + \alpha) = \frac{\text{sen}(\pi + \alpha)}{\text{cos}(\pi + \alpha)} = \frac{-\frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot \sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7} \approx 1'1339$$

$$\text{cotg}(\pi + \alpha) = \frac{1}{\text{tg}(\pi + \alpha)} = \frac{1}{\frac{3\sqrt{7}}{7}} = \frac{7}{3\sqrt{7}} = \frac{7 \cdot \sqrt{7}}{3\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{7 \cdot \sqrt{7}}{3 \cdot 7} = \frac{\sqrt{7}}{3} \approx 0'8819$$

- ⇒ Sea α un ángulo del cuadrante I. El ángulo $\beta = 2\pi - \alpha$ será un ángulo del cuadrante IV.
 - ⇒ Si conocemos las razones trigonométricas de α podemos conocer las de $\beta = 2\pi - \alpha$
- Nos ayudaremos de un gráfico:

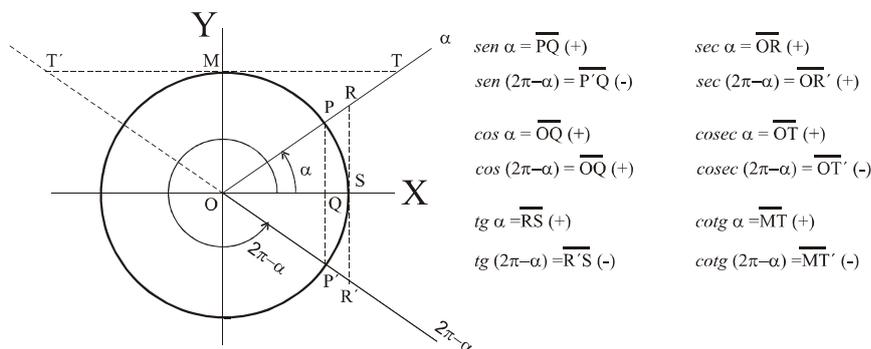


Figura 81

$\text{sen } \alpha = \overline{PQ} (+)$	$\text{sec } \alpha = \overline{OR} (+)$
$\text{sen } (2\pi - \alpha) = \overline{P'Q'} (-)$	$\text{sec } (2\pi - \alpha) = \overline{OR'} (+)$
$\text{cos } \alpha = \overline{OQ} (+)$	$\text{cosec } \alpha = \overline{OT} (+)$
$\text{cos } (2\pi - \alpha) = \overline{OQ'} (+)$	$\text{cosec } (2\pi - \alpha) = \overline{OT'} (-)$
$\text{tg } \alpha = \overline{RS} (+)$	$\text{cotg } \alpha = \overline{MT} (+)$
$\text{tg } (2\pi - \alpha) = \overline{R'S'} (-)$	$\text{cotg } (2\pi - \alpha) = \overline{MT'} (-)$

Observa que:

$$\begin{aligned} \text{sen } (2\pi - \alpha) &= -\text{sen } \alpha \\ \text{cos } (2\pi - \alpha) &= \text{cos } \alpha \\ \text{tg } (2\pi - \alpha) &= -\text{tg } \alpha \\ \text{cotg } (2\pi - \alpha) &= -\text{cotg } \alpha \\ \text{sec } (2\pi - \alpha) &= \text{sec } \alpha \\ \text{cosec } (2\pi - \alpha) &= -\text{cosec } \alpha \end{aligned}$$

Nótese que las razones trigonométricas del ángulo $2\pi - \alpha$ coinciden con las de $-\alpha$.

Ejemplo 54.-

Supongamos que α un ángulo del cuadrante I y que $\text{sen } \alpha = 0'80$

Queremos hallar el seno, coseno, tangente y cotangente del ángulo $\beta = 2\pi - \alpha$.

Veamos:

$$\text{sen } \beta = \text{sen } (2\pi - \alpha) = -\text{sen } \alpha = -0'80 = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}$$

$$\text{cos}^2 \beta = 1 - \text{sen}^2 \beta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

$$\text{cos } \beta = \pm \sqrt{\frac{9}{25}} = \pm \frac{3}{5} \text{ debemos elegir un signo}$$

$$\text{cos } \beta = \text{cos } (2\pi - \alpha) = \frac{3}{5}$$

Hemos tomado el signo positivo para el valor de $\text{cos } \beta$ porque β es un ángulo situado en el cuadrante IV, siendo los cosenos positivos.

Con el seno y coseno hallamos la tangente y con esta la cotangente:

$$\text{tg } \beta = \text{tg } (2\pi - \alpha) = \frac{\text{sen } \beta}{\text{cos } \beta} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{cotg } \beta = \text{cotg } (2\pi - \alpha) = \frac{1}{\text{tg } \beta} = \frac{1}{-\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$$

Recordemos que la cotangente de un ángulo es la inversa de su tangente

Ejemplo 55.-

Hallar el seno y coseno de los ángulos 150° , 240° y 335° .

Veamos:

Nótese que 150° es un ángulo del cuadrante II, 240° es del cuadrante III y 335° corresponde al IV.

Para hallar el seno y coseno comparamos dichos ángulos con otros del primer cuadrante. En el primer caso con el ángulo 30° , en el segundo con 60° y en el tercero con 45° . Como las razones de estos ángulos son de sobra conocidos no habrá problema para hallar lo pedido.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} 150^\circ &= \operatorname{sen}(180^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \\ \operatorname{cos} 150^\circ &= \operatorname{cos}(180^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{cos} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen} 240^\circ &= \operatorname{sen}(180^\circ + 60^\circ) = -\operatorname{sen} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{cos} 240^\circ &= \operatorname{cos}(180^\circ + 60^\circ) = -\operatorname{cos} 60^\circ = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{sen} 335^\circ &= \operatorname{sen}(360^\circ - 45^\circ) = -\operatorname{sen} 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{cos} 335^\circ &= \operatorname{cos}(360^\circ - 45^\circ) = \operatorname{cos} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\}$$

31. Ángulos complementarios.-

Dos ángulos son complementarios si su suma es un ángulo recto (90°).
Es decir:

$$\begin{aligned} \alpha \text{ y } \beta \text{ complementarios} &\Leftrightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \\ \alpha \text{ y } \beta \text{ complementarios} &\Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \end{aligned}$$

Se dice que α es el *complementario* de β y que β es el *complementario* de α

Ejemplo 56.-

- Los ángulos 30° y 60° son complementarios porque $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$
- Los ángulos $\frac{\pi}{5}$ y $\frac{3\pi}{10}$ son complementarios porque $\frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{10} = \frac{2\pi+3\pi}{10} = \frac{5\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$
- Los ángulos $\alpha=42^\circ 54'$ y $\beta=47^\circ 6'$ son complementarios porque $\alpha+\beta=90^\circ$.
- El complementario de 45° es 45° .

Ejemplo 57.-

Sea $\alpha = 28^\circ 35' 20''$ y queremos hallar su complementario.

Veamos:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \leftarrow \text{Buscamos el valor de } \beta$$

$$\text{Despejamos } \beta: \beta = 90^\circ - \alpha$$

Restamos:

$$90^\circ = 89^\circ 59' 60''$$

$$\underline{\alpha = 28^\circ 35' 20''}$$

$$90^\circ - \alpha = 61^\circ 24' 40'' \Rightarrow \beta = 61^\circ 24' 40'' \leftarrow \text{complementario de } \alpha$$

Ejemplo 58.-

Dado el ángulo $\alpha = \frac{2\pi}{9} \text{ rad}$, queremos hallar su complementario.

Veamos:

El complementario de α será $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{9} = \frac{9\pi - 4\pi}{18} = \frac{5\pi}{18} \text{ rad}$

32.Relación entre las razones de dos ángulos complementarios.-

En este apartado veremos como se relacionan las razones trigonométricas de un ángulo α y su complementario $\beta = 90^\circ - \alpha$. Nos ayudaremos de una representación en el círculo trigonométrico.

veamos:

→ Sean α y $\beta = 90^\circ - \alpha$ dos ángulos complementarios. Consideramos que ambos son positivos y que están en el cuadrante I.

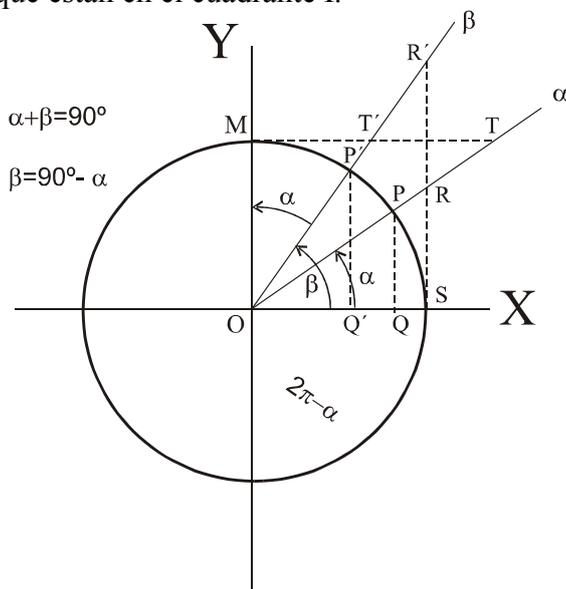


Figura 82

$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha &= \overline{PQ} (+) \\ \text{sen } \beta &= \text{sen } (90^\circ - \alpha) = \overline{P'Q'} (+) \\ \text{cos } \alpha &= \overline{OQ} (+) \\ \text{cos } \beta &= \text{cos } (90^\circ - \alpha) = \overline{OQ'} (+) \\ \text{tg } \alpha &= \overline{RS} (+) \\ \text{tg } \beta &= \text{tg } (90^\circ - \alpha) = \overline{R'S'} (+) \\ \text{sec } \alpha &= \overline{OR} (+) \\ \text{sec } \beta &= \text{sec } (90^\circ - \alpha) = \overline{OR'} (+) \\ \text{cosec } \alpha &= \overline{OT} (+) \\ \text{cosec } \beta &= \text{cosec } (90^\circ - \alpha) = \overline{OT'} (+) \\ \text{cotg } \alpha &= \overline{MT} (+) \\ \text{cotg } \beta &= \text{cotg } (90^\circ - \alpha) = \overline{MT'} (+) \end{aligned}$$

→ Observado detenidamente la figura 82 y viendo las medidas de los segmentos que representan a las razones trigonométricas de α y su complementario β , podemos poner:

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \overline{OQ'} && \text{por lo que } \text{sen } \alpha = \text{cos } (90^\circ - \alpha) \\ \overline{OQ} &= \overline{P'Q'} && \text{por lo que } \text{cos } \alpha = \text{sen } (90^\circ - \alpha) \\ \overline{RS} &= \overline{MT'} && \text{por lo que } \text{tg } \alpha = \text{cotg } (90^\circ - \alpha) \\ \overline{MT} &= \overline{R'S'} && \text{por lo que } \text{cotg } \alpha = \text{tg } (90^\circ - \alpha) \\ \overline{OR} &= \overline{OT'} && \text{por lo que } \text{sec } \alpha = \text{cosec } (90^\circ - \alpha) \\ \overline{OT} &= \overline{OR'} && \text{por lo que } \text{cosec } \alpha = \text{sec } (90^\circ - \alpha) \end{aligned}$$

Esto nos permite conocer las razones trigonométricas de un ángulo si conocemos las de su complementario.

Ejemplo 59.-

Los ángulos $\alpha = 30^\circ$ y $\beta = 60^\circ$ son suplementarios y observa que se verifica lo siguiente:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \operatorname{cos} 60^\circ = \frac{1}{2} \quad ; \quad \operatorname{cos} 30^\circ = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{cotg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad ; \quad \operatorname{cotg} 30^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{sec} 30^\circ = \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad ; \quad \operatorname{cosec} 30^\circ = \operatorname{sec} 60^\circ = 2$$

33. Razones trigonométricas del ángulo suma de otros dos ángulos.-

Sean α y β dos ángulos cualesquiera. En la página 13 y sucesivas hemos explicado el concepto de la suma $\alpha + \beta$ y el cálculo de su medida.

En este apartado nos preguntamos lo siguiente:

¿ Si conocemos las razones trigonométricas de α y β , podemos conocer las de $\alpha + \beta$?

La respuesta a esta pregunta es que **si**. Nos limitaremos a poner las fórmulas que permiten hallar las razones de $\alpha + \beta$ a partir de las razones de α y β sin demostrarlas (las demostraciones se salen de los objetivos de estos apuntes).

Veamos:

 Sean α y β dos ángulos de cualquier cuadrante.

 La suma $\alpha + \beta$ será otro ángulo que podrá estar en cualquier cuadrante.

¡Pues bien! Se verifica lo siguiente:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} \beta + \operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{cos} \alpha \\ \operatorname{cos}(\alpha + \beta) &= \operatorname{cos} \alpha \cdot \operatorname{cos} \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta \\ \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{cos}(\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \\ \operatorname{cotg}(\alpha + \beta) &= \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} \\ \operatorname{sec}(\alpha + \beta) &= \frac{1}{\operatorname{cos}(\alpha + \beta)} = \frac{1}{\operatorname{cos} \alpha \cdot \operatorname{cos} \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta} \\ \operatorname{cosec}(\alpha + \beta) &= \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} \beta + \operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{cos} \alpha} \end{aligned}$$

Ejemplo 60.-

Supongamos que queremos hallar las razones trigonométricas del ángulo 75° .

Veamos:

Podemos considerar que $75^\circ = 30^\circ + 45^\circ$

Entonces:

$$\operatorname{sen} 75^\circ = \operatorname{sen}(30^\circ + 45^\circ) = \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \operatorname{cos} 45^\circ + \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \operatorname{cos} 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\operatorname{cos} 75^\circ = \operatorname{cos}(30^\circ + 45^\circ) = \operatorname{cos} 30^\circ \cdot \operatorname{cos} 45^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg}(30^\circ + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} = \frac{\frac{\sqrt{3}+3}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}+3}{3-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}+3) \cdot (3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3}) \cdot (3+\sqrt{3})} = \frac{(\sqrt{3}+3)^2}{6}$$

$$\operatorname{cotg} 75^\circ = \operatorname{cotg}(30^\circ + 45^\circ) = \frac{1}{\operatorname{tg}(30^\circ + 45^\circ)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+3}{3-\sqrt{3}}} = \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3} = \frac{(3-\sqrt{3})^2}{-6} = -\frac{(3-\sqrt{3})^2}{6}$$

$$\operatorname{sec} 75^\circ = \operatorname{sec}(30^\circ + 45^\circ) = \frac{1}{\cos(30^\circ + 45^\circ)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot (\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \frac{4 \cdot (\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

$$\operatorname{cosec} 75^\circ = \operatorname{cosec}(30^\circ + 45^\circ) = \frac{1}{\operatorname{sen}(30^\circ + 45^\circ)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{4 \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{6})}{(\sqrt{2}+\sqrt{6}) \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{6})} = \frac{4 \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{6})}{-4} = -(\sqrt{2}-\sqrt{6}) = -\sqrt{2} + \sqrt{6} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

34. Razones trigonométricas del ángulo diferencia de otros dos.-

Sean α y β dos ángulos cualesquiera. En la página 14 y sucesivas hemos explicado el concepto de la resta $\alpha - \beta$ y el cálculo de su medida.

En este apartado nos preguntamos lo siguiente:

¿ Si conocemos las razones trigonométricas de α y β , podemos conocer las de $\alpha - \beta$?

La respuesta a esta pregunta es que **si**. Nos limitaremos a poner las fórmulas que permiten hallar las razones de $\alpha - \beta$ a partir de las razones de α y β sin demostrarlas (las demostraciones se salen de los objetivos de estos apuntes).

Veamos:

 Sean α y β dos ángulos de cualquier cuadrante.

 La resta $\alpha - \beta$ será otro ángulo que podrá estar en cualquier cuadrante.

¡Pues bien! Se verifica lo siguiente:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha - \beta) &= \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta \\ \operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \\ \operatorname{cotg}(\alpha - \beta) &= \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} \\ \operatorname{sec}(\alpha - \beta) &= \frac{1}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{1}{\cos \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta} \\ \operatorname{cosec}(\alpha - \beta) &= \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha} \end{aligned}$$

Ejemplo 61.-

Supongamos que queremos hallar las razones trigonométricas del ángulo 15° .

Veamos:

Podemos considerar que $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$

Entonces:

$$\operatorname{sen} 15^\circ = \operatorname{sen}(45^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\operatorname{sen} 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \quad \text{se puede racionalizar}$$

$$\operatorname{cotg} 15^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 15^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \quad \text{se puede racionalizar}$$

$$\operatorname{sec} 15^\circ = \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{4 \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{2})}{\sqrt{6^2}-\sqrt{2^2}} = \frac{4 \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} = \sqrt{6}-\sqrt{2}$$

$$\operatorname{cosec} 15^\circ = \frac{1}{\operatorname{sen} 15^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot (\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \frac{4 \cdot (\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\sqrt{6^2}-\sqrt{2^2}} = \frac{4 \cdot (\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$$

35. Razones trigonométricas del ángulo doble de otro.-

Sea α un ángulo cualquiera.

El doble de α es 2α , es decir, $2\alpha = \alpha + \alpha$.

Si conocemos las razones del ángulo α , podemos conocer las de su doble 2α .

En efecto:

Se trata de un caso particular de la suma $\alpha + \beta$, es decir, $\alpha + \alpha$.

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen}(\alpha + \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\operatorname{cos} 2\alpha = \operatorname{cos}(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \operatorname{cotg}(\alpha + \alpha) = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}$$

$$\operatorname{sec} 2\alpha = \operatorname{sec}(\alpha + \alpha) = \frac{1}{\operatorname{cos} 2\alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{cosec} 2\alpha = \operatorname{cosec}(\alpha + \alpha) = \frac{1}{\operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{1}{2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha}$$

Ejemplo 62.-

Observa que $60^\circ = 2 \cdot 30^\circ = 30^\circ + 30^\circ$

¡Pues bien!

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \operatorname{sen}(2 \cdot 30^\circ) = 2 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{cos} 60^\circ = \operatorname{cos}(2 \cdot 30^\circ) = \cos^2 30^\circ - \operatorname{sen}^2 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg}(2 \cdot 30^\circ) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 30^\circ} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{9 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot 6} = \sqrt{3}$$

Ejemplo 63.-

Observa que $90^\circ = 2 \cdot 45^\circ = 45^\circ + 45^\circ$

¡Pues bien!

$$\operatorname{sen} 90^\circ = \operatorname{sen}(2 \cdot 45^\circ) = 2 \cdot \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \cos 45^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\operatorname{cos} 90^\circ = \operatorname{cos}(2 \cdot 45^\circ) = \cos^2 45^\circ - \operatorname{sen}^2 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

36. Razones trigonométricas del ángulo mitad de otro.-

Sea α un ángulo cualquiera.

La mitad de α es $\alpha/2$.

Si conocemos las razones del ángulo α , podemos conocer las de su mitad $\alpha/2$. Nos limitaremos a dar las fórmulas, sin hacer la demostración:

$$\boxed{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}}$$

Dependiendo del cuadrante donde se encuentre el ángulo $\alpha/2$, tomaremos el signo + o -

$$\boxed{\operatorname{cos} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}}$$

Dependiendo del cuadrante donde se encuentre el ángulo $\alpha/2$, tomaremos el signo + o -

Para hallar la *tangente* utilizamos el *seno* y *coseno*:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cos} \frac{\alpha}{2}} = \frac{\pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}}{\pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}}$$

El signo + o - dependerá del cuadrante de $\alpha/2$ o de los signos del *seno* y del *coseno*.

Será fácil comprobar que la *cotangente* es:

$$\boxed{\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}}$$

Ejemplo 64.-

Supongamos que queremos hallar el *seno* y *coseno* del ángulo $22^\circ 30'$

Veamos:

- Llamamos $\alpha = 45^\circ$ y, por tanto, $\frac{\alpha}{2} = \frac{45^\circ}{2} = 22^\circ 30'$
- Aplicamos las fórmulas vistas antes y consideramos que $22^\circ 30'$ está en el cuadrante I

$$\operatorname{sen} 22^\circ 30' = \operatorname{sen} \frac{45^\circ}{2} = + \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} = + \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = + \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} = + \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\operatorname{cos} 22^\circ 30' = \operatorname{cos} \frac{45^\circ}{2} = + \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} = + \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = + \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}} = + \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 22^\circ 30' = \frac{\operatorname{sen} 22^\circ 30'}{\operatorname{cos} 22^\circ 30'} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

37. Fórmulas de transformación de sumas y restas en productos.-

Veremos a continuación unas fórmulas que son interesantes porque permiten la resolución de algunos problemas trigonométricos. No haremos las demostraciones aunque estas no presentan grandes dificultades.

✓ Sean α y β dos ángulos.

✓ Consideremos el ángulo suma de ambos, $\alpha + \beta$ y el ángulo diferencia, $\alpha - \beta$.

¡Pues bien!

Se verifican las siguientes igualdades (las demostraciones pueden verse en el anexo final)

$$\boxed{\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta = 2 \cdot \text{sen } \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \text{cos } \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

“El *seno* de un ángulo mas el *seno* de otro ángulo es igual al doble del *seno* del ángulo mitad de su suma por el *coseno* del ángulo mitad de su diferencia”

$$\boxed{\text{sen } \alpha - \text{sen } \beta = 2 \cdot \text{cos } \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \text{sen } \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

“El *seno* de un ángulo menos el *seno* de otro ángulo es igual al doble del *coseno* del ángulo mitad de su suma por el *seno* del ángulo mitad de su diferencia”

$$\boxed{\text{cos } \alpha + \text{cos } \beta = 2 \cdot \text{cos } \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \text{cos } \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

“El *coseno* de un ángulo mas el *coseno* de otro ángulo es igual al doble del *coseno* del ángulo mitad de su suma por el *coseno* del ángulo mitad de su diferencia”

$$\boxed{\text{cos } \alpha - \text{cos } \beta = -2 \cdot \text{sen } \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \text{sen } \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

“El *coseno* de un ángulo menos el *coseno* de otro ángulo es igual al opuesto del doble del *seno* del ángulo mitad de su suma por el *seno* del ángulo mitad de su diferencia”

Ejemplo 65.-

Anteriormente (ejemplos 60 y 61) hallamos el *seno* y *coseno* de los ángulos 75° y 15° . Ahora los vamos a hallar utilizando estas fórmulas.

Veamos:

$$\text{sen } 75^\circ + \text{sen } 15^\circ = 2 \cdot \text{sen } \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cdot \text{cos } \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \cdot \text{sen } 45^\circ \cdot \text{cos } 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{sen } 75^\circ - \text{sen } 15^\circ = 2 \cdot \text{sen } \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} \cdot \text{cos } \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} = 2 \cdot \text{sen } 30^\circ \cdot \text{cos } 45^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \text{sen } 75^\circ + \text{sen } 15^\circ &= \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \text{sen } 75^\circ - \text{sen } 15^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\}$$

Se trata de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Las incógnitas son $x = \text{sen } 75^\circ$ e $y = \text{sen } 15^\circ$

Resolvamos el sistema:

$$\left. \begin{aligned} x + y &= \frac{\sqrt{6}}{2} \\ x - y &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} \text{ Por el método de reducción: } 2x = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Por tanto: } x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{e} \quad y = \frac{\sqrt{6}}{2} - x = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{2\sqrt{6} - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{sen } 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{sen } 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

38. Arco (o ángulo) correspondiente a una razón trigonométrica.-

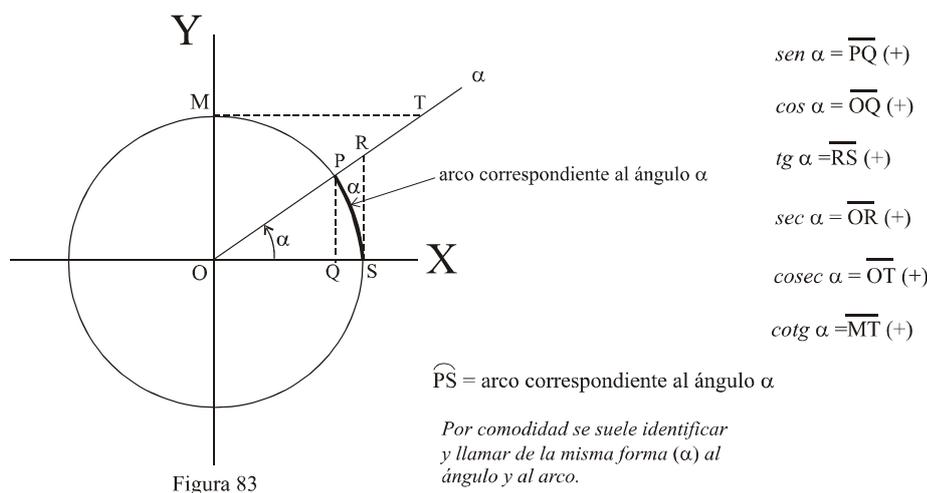
La expresión $\text{sen } x = y$ se interpreta como “el seno del ángulo x es y ”. También podemos decir que “ x es el ángulo cuyo seno es y ”. Esta última expresión se formaliza del siguiente modo:

$x = \text{arc sen } y$ Se lee de la forma: “ x es el arco seno de y ” o “ x es igual al arco seno de y ”
Su significado es que “ x es un ángulo cuyo seno vale y ”

Debe entenderse que las expresiones $\text{sen } x = y$ y $x = \text{arc sen } y$ son equivalentes, es decir, vienen a decir lo mismo:

“*seno de x es igual a y* ” equivale a decir que “ *x es un ángulo cuyo seno es y* ”

NOTA: Los términos **ángulo** y **arco** son equivalentes. Sabemos que en el círculo trigonométrico, a un ángulo de vértice el origen O (centro de la circunferencia, le corresponde un arco de circunferencia y sólo uno. Cuando nos referimos a ese arco, al ángulo se le suele denominar **arco** (en vez de ángulo). En general, cuando nos referimos al arco, la medida se suele dar en radianes y cuando nos referimos al ángulo se suele dar en grados sexagesimales.



- $\text{sen } \alpha = \overline{PQ} (+)$
- $\text{cos } \alpha = \overline{OQ} (+)$
- $\text{tg } \alpha = \overline{RS} (+)$
- $\text{sec } \alpha = \overline{OR} (+)$
- $\text{cosec } \alpha = \overline{OT} (+)$
- $\text{cotg } \alpha = \overline{MT} (+)$

Nótese que al ángulo central α le corresponde el arco de circunferencia **PS**
El segmento PQ es el *seno* de α . En general se identifica el ángulo con el arco
Si llamamos x al arco **PS**, podemos poner:

Del mismo modo se pueden definir los siguientes conceptos:

$x = \text{arc cos } y$ “ x es el arco de circunferencia (o el ángulo) cuyo coseno es y ” $\text{cos } x = y$
En la figura 83, α es el ángulo (o x el arco) cuyo coseno es el segmento OQ
$$x = \text{arc cos } \overline{OQ}$$

$x = \text{arc tg } y$ “ x es el arco de circunferencia (o el ángulo) cuya tangente es y ” $\text{tg } x = y$
En la figura 83, α es el ángulo (o x el arco) cuya tangente es el segmento RS
$$x = \text{arc tg } \overline{RS}$$

$x = \text{arc cotg } y$ “ x es el arco de circunferencia (ángulo) cuya cotangente es y ” $\text{cotg } x = y$
En la figura 83, α es el ángulo (o x el arco) de cotangente es el segmento MT
$$x = \text{arc cotg } \overline{MT}$$

$x = \text{arc sec } y$ “ x es el arco de circunferencia (o el ángulo) cuya secante es y ” $\text{sec } x = y$
En la figura 83, α es el ángulo (o x el arco) cuya secante es el segmento OR
$$x = \text{arc sec } \overline{OR}$$

$x = \text{arc cosec } y$

“ x es el arco de circunferencia (ángulo) cuya cosecante es y ” $\text{cosec } x = y$
 En la figura 83, α es el ángulo (x el arco) cuya cosecante es el segmento OT
 $x = \text{arc cosec } \overline{OT}$

Observación_1: Si fijamos un valor para y , puede ocurrir (en general ocurre así) que exista mas de un x que verifique la igualdad. También puede ocurrir que demos un valor a y y no exista un x que verifique dicha igualdad. Veremos un ejemplo para aclarar esto.

Observación_2: Las expresiones $x = \text{arc sen } y$, $x = \text{arc cos } y$, $x = \text{arc tg } y$, etc. se denominan “razones trigonométricas inversas”.

Ejemplo 66.-

Consideremos la igualdad trigonométrica $\text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Esto significa que $\frac{\pi}{6} = \text{arc sen } \frac{1}{2}$, es decir, “ $\frac{\pi}{6}$ es el arco cuyo seno vale $\frac{1}{2}$ ” (recuerda que $\pi/6 = 30^\circ$).

También ocurre que $\text{sen } \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, por lo que podemos también poner que $\frac{5\pi}{6} = \text{arc sen } \frac{1}{2}$.

Es decir:

$$\text{arc sen } \frac{1}{2} = \begin{cases} \frac{\pi}{6} \text{ rad} \\ \frac{5\pi}{6} \text{ rad} \end{cases}$$

Si consideramos que cada vez que damos una vuelta completa de 360° al lado del ángulo en el círculo trigonométrico, volvemos al mismo sitio, tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} \text{sen } 30^\circ &= \frac{1}{2} \\ \text{sen } (30^\circ + 360^\circ) &= \text{sen } 390^\circ = \frac{1}{2} \text{ una vuelta} \\ \text{sen } (30^\circ + 720^\circ) &= \text{sen } 750^\circ = \frac{1}{2} \text{ dos vueltas} \\ \text{sen } (30^\circ + 1080^\circ) &= \text{sen } 1110^\circ = \frac{1}{2} \text{ tres vueltas} \\ \dots\dots\dots \\ \text{sen } (30^\circ + k \cdot 360^\circ) &= \frac{1}{2} \text{ } k \text{ vueltas} \end{aligned} \right\} k = 0,1,2,3,4,5,\dots\dots\dots \text{etc.}$$

Del mismo modo:

$$\left. \begin{aligned} \text{sen } 150^\circ &= \frac{1}{2} \\ \text{sen } (150^\circ + 360^\circ) &= \text{sen } 510^\circ = \frac{1}{2} \text{ una vuelta} \\ \text{sen } (150^\circ + 720^\circ) &= \text{sen } 870^\circ = \frac{1}{2} \text{ dos vueltas} \\ \text{sen } (150^\circ + 1080^\circ) &= \text{sen } 1230^\circ = \frac{1}{2} \text{ tres vueltas} \\ \dots\dots\dots \\ \text{sen } (150^\circ + k \cdot 360^\circ) &= \frac{1}{2} \text{ } k \text{ vueltas} \end{aligned} \right\} k = 0,1,2,3,4,5,\dots\dots\dots \text{etc.}$$

De lo anterior deducimos que en la igualdad $x = \text{arc sen } \frac{1}{2}$, existen **infinitos** valores para x , pero entre 0° y 360° sólo existen dos, uno es 30° y el otro valor es 150° .

Ejemplo 67.-

Queremos encontrar **todos** los valores de x que verifican la igualdad $x = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$

Veamos:

✓ Sabemos que $\cos 45^\circ = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y que $\cos 315^\circ = \cos \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Por tanto:

$$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \\ x_2 = \frac{7\pi}{4} \text{ rad} \end{cases} \quad \text{dos soluciones entre } 0 \text{ y } 2\pi$$

✓ Si consideramos todas las soluciones posibles tendremos:

$$x_k = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad \text{para } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

$$x'_k = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad \text{para } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

Por ejemplo, para $k=0$ tenemos las soluciones $x_0 = \frac{\pi}{4}$ y $x'_0 = \frac{7\pi}{4}$ y para $k=3$ tenemos las soluciones $x_3 = \frac{\pi}{4} + 6\pi = \frac{25\pi}{4}$ y $x'_3 = \frac{7\pi}{4} + 6\pi = \frac{31\pi}{4}$. Para cada valor de $k=0, 1, 2, 3, 4, \dots$ tenemos dos soluciones.

Ejemplo 68.-

Queremos encontrar los valores de x comprendidos en el intervalo $[0, 2\pi]$ que verifican la igualdad $x = \arccos \frac{-\sqrt{3}}{2}$

Veamos:

✗ Sabemos que $\cos \frac{5\pi}{6} = \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cos \frac{7\pi}{6} = \cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Entonces:

$$\arccos \frac{-\sqrt{3}}{2} = \begin{cases} x_1 = 150^\circ = \frac{5\pi}{6} \text{ rad} \\ x_2 = 210^\circ = \frac{7\pi}{6} \text{ rad} \end{cases} \quad \text{dos soluciones entre } 0 \text{ y } 2\pi$$

Ejemplo 69.-

Queremos encontrar los valores de x comprendidos en el intervalo $[0, 2\pi]$ que verifican la igualdad $x = \arcsen 1'4$

Veamos:

◆ Sabemos que $x = \arcsen 1'4 \Leftrightarrow \sen x = 1'4$

◆ Sabemos que el seno de un ángulo es un número comprendido entre -1 y 1 , es decir, se debe verificar que $-1 \leq \sen x \leq 1$ por lo que no es posible que $\sen x = 1'4$

Por tanto, no existe ningún valor para x que verifique la igualdad $x = \arcsen 1'4$

Ejemplo 70.-

Queremos encontrar los valores de x comprendidos en el intervalo $[0, 2\pi]$ que verifican la igualdad $x = \arctg 0$

Es fácil apreciar que esos valores son $x_1 = 0 \text{ rad}$, $x_2 = \pi \text{ rad}$ y $x_3 = 2\pi \text{ rad}$.

39. Ecuaciones trigonométricas. Resolución.-

Una ecuación trigonométrica es una relación algebraica (sumas, restas, productos, cocientes, etc.) entre números conocidos y desconocidos separados mediante una igualdad (=). En esta relación debe intervenir, al menos, una de las razones trigonométricas explicadas en este tema: *seno, coseno, tangente, cotangente, secante o cosecante*. A los números desconocidos se les llama incógnitas.

- Una ecuación trigonométrica puede tener una o más incógnitas.
- Resolver una ecuación trigonométrica es hallar el valor o valores de las incógnitas. Dichos valores debe hacer que la igualdad sea cierta.
- A una ecuación trigonométrica le puede ocurrir que tenga solución o que no tenga solución. Una ecuación de este tipo puede tener infinitas soluciones.

Ejemplo 71.-

Las igualdades:

- a) $\operatorname{sen} x + 1 = 0$
- b) $\operatorname{tg} x = 1$
- c) $\cos x + \frac{1}{2} = \operatorname{sen} \frac{3x}{2}$
- d) $\cos x + 1 = 3$

Las cuatro igualdades anteriores son ecuaciones trigonométricas con una incógnita (x).
Una solución de **a)** es $x = 270^\circ$. Una solución de **b)** es $x = 45^\circ$. Una solución de **c)** es $x = 60^\circ$. La ecuación **d)** no tiene solución ya que se debe ser $-1 \leq \cos x \leq 1$ lo cual hace imposible que la igualdad sea verdad.

Comprobemos la solución de la ecuación c):

Para $x = 60^\circ$ tenemos que:

$$\cos 60^\circ + \frac{1}{2} = \operatorname{sen} \frac{3 \cdot 60^\circ}{2} \quad ; \quad \cos 60^\circ + \frac{1}{2} = \operatorname{sen} 90^\circ$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad ; \quad 1 = 1 \quad \leftarrow \quad x = 60^\circ \text{ hace que la igualdad sea verdad.}$$

Lo que hemos hecho es una comprobación, no una resolución. Hemos comprobado que $x=60^\circ$ es una solución.

Ejemplo 72.-

La igualdad $\cos x + 1 = \frac{3}{2}$ es una ecuación trigonométrica con una incógnita. En este caso vamos a ver que existen infinitas soluciones.

- ☞ $x = 60^\circ$ es una solución porque $\cos 60^\circ + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$
- ☞ $x = 300^\circ$ es una solución porque $\cos 300^\circ + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$
- ☞ $x = 360^\circ + 60^\circ = 420^\circ$ es una solución porque $\cos 420^\circ + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$
- ☞ $x = 360^\circ + 300^\circ = 660^\circ$ es una solución porque $\cos 660^\circ + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

Podemos decir que los ángulos de las formas :

$$x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad \text{con } k = 0,1,2,3,4,\dots \quad \text{es solución}$$

$$x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad \text{con } k = 0,1,2,3,4,\dots \quad \text{es solución}$$

Debes entender que:

$$60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \quad \text{y} \quad 300^\circ = \frac{5\pi}{3} \text{ rad}$$

Ha debido quedar claro que hay ecuaciones trigonométricas sin solución y con infinitas soluciones.

Ejemplo 73.-

La igualdad $2 \cdot \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} y = \operatorname{tg} x + \sqrt{2}$ es una ecuación trigonométrica con dos incógnitas.

Una solución estaría formada por un valor de x y otro de y que hagan verdadera a la igualdad.

En este caso $x = 45^\circ$ e $y = 0^\circ$ es una solución ya que:

$$2 \cdot \operatorname{sen} 45^\circ + \operatorname{cos} 0^\circ = \operatorname{tg} 45^\circ + \sqrt{2} \leftarrow \text{¿es verdad?}$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 1 + \sqrt{2} \leftarrow \text{¿es verdad?}$$

$$\sqrt{2} + 1 = 1 + \sqrt{2} \leftarrow \text{Vemos que es verdad}$$

Vamos a resolver algunas ecuaciones trigonométricas con una incógnita.

Ejemplo 74.-

Resolvamos la ecuación trigonométrica $2 \cdot \operatorname{sen} x + \sqrt{3} = 0$

Veamos:

El \cdot de la multiplicación no es necesario ponerlo (es optativo en este caso).

$$2 \operatorname{sen} x + \sqrt{3} = 0 \leftarrow \text{Buscamos el valor o valores de } x$$

$$2 \operatorname{sen} x = -\sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \Rightarrow x = \begin{cases} 240^\circ + k \cdot 360^\circ & k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \\ 300^\circ + k \cdot 360^\circ & k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \end{cases} \text{ Infinitas soluciones}$$

NOTA: La expresión $x = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ puede ponerse de la forma $x = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{-\sqrt{3}}{2}$

Quede claro que es incorrecto ponerlo del modo $x = \operatorname{arc} \operatorname{sen} -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ejemplo 75.-

Encontrar las soluciones a la ecuación trigonométrica $\operatorname{cos} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2} = 0$ que estén en el intervalo $[0, 2\pi]$ *radianes*.

Veamos:

Buscamos las soluciones x que verifiquen $0 \leq x \leq 2\pi$ *radianes* (es decir $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$)

$$\operatorname{cos} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2} = 0$$

$$\operatorname{cos} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc} \operatorname{cos} \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{o bien } x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} \quad (60^\circ) \\ \text{o bien } x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{3} \quad (300^\circ) \end{cases}$$

$$\text{Si } x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}, \text{ entonces } x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi - 3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$$

$$\text{Si } x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{3}, \text{ entonces } x = \frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{20\pi - 3\pi}{12} = \frac{17\pi}{12}$$

Hemos encontrado dos soluciones dentro del intervalo $[0, 2\pi]$ que son:

NOTA: Debes tener cuidado y no mezclar *radianes* con *grados*. Puedes trabajar en *grados* o en *radianes*, pero no en las dos unidades al mismo tiempo.

Ejemplo 76.-

Halla los valores de x entre 0° y 360° que verifiquen la igualdad $\cos 2x = \operatorname{sen} x$

Veamos:

$$\cos 2x = \operatorname{sen} x$$

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x \leftarrow \text{Recuerda que } \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x \leftarrow \text{Recuerda que } \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ y } \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$$

$$1 - 2\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x$$

$$0 = 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 \leftarrow \text{Hemos pasado todo a la derecha}$$

$$2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \leftarrow \text{Se trata de una ecuación de 2º grado de incògnita } \operatorname{sen} x$$

Despejamos:

$$\operatorname{sen} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 8}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \operatorname{sen} x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \operatorname{sen} x = \frac{-4}{4} = -1 \end{cases}$$

$$\text{Si } \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30^\circ \\ x_2 = 150^\circ \end{cases}$$

$$\text{Si } \operatorname{sen} x = -1 \Rightarrow x_3 = 270^\circ$$

Por tanto, la ecuación tiene tres soluciones entre 0° y 360° :

$$x_1 = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad} ; x_2 = 150^\circ = \frac{5\pi}{6} \text{ rad} \text{ y } x_3 = 270^\circ = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

Comprobemos la primera de ellas:

Para $x = 30^\circ$ tenemos que $\cos 60^\circ = \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$ se verifica la igualdad.

Ejemplo 77.-

Resolver al ecuación trigonométrica $\cos 2x + \operatorname{sen} x = 1$

Veamos:

$$\cos 2x + \operatorname{sen} x = 1$$

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 1 \leftarrow \text{recuerda que } \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 1 \leftarrow \text{recuerda que } \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$$

$$-2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 0$$

$$2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0 \leftarrow \text{hemos multiplicado por } -1 \text{ en ambos lados}$$

$$\operatorname{sen} x \cdot (2\operatorname{sen} x - 1) = 0 \leftarrow \text{hemos sacado factor común}$$

$$\operatorname{sen} x \cdot (2\operatorname{sen} x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{o bien } \operatorname{sen} x = 0 \\ \text{o bien } 2\operatorname{sen} x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Si } \operatorname{sen} x = 0 \text{ entonces } \begin{cases} x_0 = 0 \text{ rad} \\ x_1 = \pi \text{ rad} \\ x_2 = 2\pi \text{ rad} \\ \dots\dots\dots \\ x_k = 0 + k \cdot \pi \text{ rad } k = 0,1,2,3,\dots \end{cases}$$

- Si $2 \operatorname{sen} x - 1 = 0$ entonces $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \\ x_1 = 150^\circ = \frac{5\pi}{6} \text{ rad} \\ x_2 = 390^\circ = \frac{13\pi}{6} \text{ rad} \\ x_3 = 510^\circ = \frac{17\pi}{6} \text{ rad} \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Nótese que existen infinitas soluciones para la ecuación.

Comprobemos una de ellas:

Para $x = 150^\circ$ es $\cos 300^\circ + \operatorname{sen} 150^\circ = 1 \leftarrow \text{¿Es verdad?}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \leftarrow \text{Verdad}$$

Ejemplo 78.-

Encuentra las soluciones entre 0 y 2π rad. de la ecuación trigonométrica $2 \cos x = 3 \operatorname{tg} x$
Veamos:

$$2 \cos x = 3 \operatorname{tg} x$$

$$2 \cos x = 3 \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad ; \quad 2 \cos x \cdot \cos x = 3 \operatorname{sen} x \quad ; \quad 2 \cos^2 x = 3 \operatorname{sen} x$$

$$2(1 - \operatorname{sen}^2 x) = 3 \operatorname{sen} x \quad \leftarrow \text{recuerda que } \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$2 - 2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x = 0$$

$$-2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 2 = 0 \quad \leftarrow \text{vamos a multiplicar todo por } -1$$

$$2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x - 2 = 0 \quad \leftarrow \text{es una ecuación de 2º grado de incògnita } y = \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 2 \cdot 2}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} y_1 = \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \\ y_2 = \operatorname{sen} x = -2 \leftarrow \text{imposible} \end{cases}$$

$$\text{Si } \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \\ x_2 = 150^\circ = \frac{5\pi}{6} \text{ rad} \end{cases}$$

Por tanto, hay dos soluciones dentro del intervalo $[0, 2\pi]$ radianes.

40. Sistemas de ecuaciones trigonométricas.-

Con las ecuaciones trigonométricas también pueden formarse sistemas de, por ejemplo, dos ecuaciones con dos incògnitas. En esta publicación no incluimos la resolución de sistemas.

Ejemplo 79.-

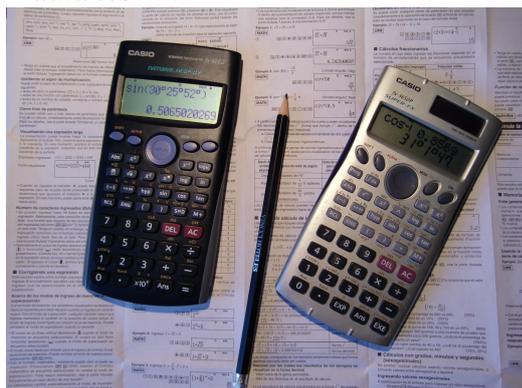
$$\text{Las igualdades } \begin{cases} \operatorname{sen} x + \cos y = 0'5 \\ \operatorname{cosec} x + \sec y = -1 \end{cases} \quad \text{forman un sistema de 2 ecuaciones} \\ \text{trigonométricas con 2 incògnitas.}$$

41. Uso de la calculadora en trigonometría.-

Las calculadoras actuales con funciones científicas (popularmente conocidas como calculadoras científicas) permiten hallar los valores numéricos de las razones trigonométricas de cualquier ángulo expresado en grados sexagesimales o en radianes.

Para ello hay que ponerla previamente en el modo “*grados sexagesimales*” (generalmente viene con **D** o **Deg**) o “*radianes*” (en general **rad**).

También es posible hallar el valor del ángulo (en grados o radianes) si le damos una de sus razones trigonométricas (por ejemplo si le damos lo que vale el *seno*). También es este caso hay que indicar previamente si queremos el valor del ángulo en “*grados minutos y segundos*” o en “*radianes*”



Debes aprender a manejar una calculadora con soltura. El manejo es muy parecido en casi todas ellas, aunque existen pequeñas diferencias.

En el teclado verás que aparecen las funciones correspondientes al *seno* (sin), *coseno* (cos) y *tangente* (tan). Las demás (*secante*, *cosecante* y *cotangente*) no aparecen porque estas se hallan si se conocen las anteriores.

También veras expresiones de la forma \sin^{-1} , \cos^{-1} y \tan^{-1} que permiten calcular el ángulo si conoces su *seno*, *coseno* o *tangente*.

Una tecla con los símbolos ° ' " permiten introducir “*grados*”, “*minutos*” y “*segundos*”. En la parte superior de esta tecla el símbolo \leftarrow permite conocer el ángulo si conocemos una de sus razones trigonométricas.

Veremos algunos ejemplo sobre estos cálculos, los cuales debes realizar con tu calculadora habitual.

Ejemplo 80.-

Ponemos la calculadora en el modo *grados sexagesimales* (D o Deg) y realizamos los siguientes cálculos.

■ $\text{sen } 23^\circ 45' 58'' = 0'40300405\dots$

Con este último número en pantalla, si activamos la función de la calculadora x^{-1} (o $1/x$), obtenemos $\text{cosec } 23^\circ 45' 58'' = 2'48136462\dots$ (recuerda que $\text{cosec } \alpha = 1/\text{sen } \alpha$)

■ $\text{cos } 108^\circ 36' 9'' = -0'31900066\dots$

Con este último número en pantalla, si activamos la función de la calculadora x^{-1} (o $1/x$), obtenemos $\text{sec } 108^\circ 36' 9'' = -3'13478972\dots$ (recuerda que $\text{sec } \alpha = 1/\text{cos } \alpha$)

■ $\text{tg } 216^\circ 42' 33'' = -0'74562593\dots$

Con este último número en pantalla, si activamos la función de la calculadora x^{-1} (o $1/x$), obtenemos $\text{cotg } 216^\circ 42' 33'' = 1'34115506\dots$ (recuerda que $\text{cotg } \alpha = 1/\text{tg } \alpha$)

Ejemplo 81.-

Para trabajar en radianes ponemos la calculadora en el modo *rad*. y realizamos los siguientes cálculos:

☉ $\text{sen } 1 = 0'84147098\dots$

Con este último número en pantalla, si activamos la función de la calculadora x^{-1} (o $1/x$), obtenemos $\text{cosec } 1 = 1'18839510\dots$ (recuerda que $\text{cosec } \alpha = 1/\text{sen } \alpha$)

Nota: Cuando solo se pone el valor del ángulo sin especificar que son $^\circ$ ''', se entiende que son *radianes*.

☉ $\text{cos } 1,82 = -0'24663231\dots$

Con este último número en pantalla, si activamos la función de la calculadora x^{-1} (o $1/x$), obtenemos $\text{sec } 1,82 = -4'05461879\dots$ (recuerda que $\text{sec } \alpha = 1/\text{cos } \alpha$)

☉ $\text{tg } \frac{3\pi}{5} = -0'08956463\dots$

Con este último número en pantalla, si activamos la función de la calculadora x^{-1} (o $1/x$), obtenemos $\text{cotg } \frac{3\pi}{5} = -11'1651212\dots$ (recuerda que $\text{cotg } \alpha = 1/\text{tg } \alpha$)

Nota: Observa que la calculadora tiene una tecla para expresar π .

Ejemplo 82.-

Sabemos que $\text{sen } \alpha = 0'591254$. ¿Cuál es el valor del ángulo α ?

Veamos:

Si queremos obtener el resultado en $^\circ$ ''', debemos poner la calculadora en el modo D (o Deg)

Si queremos obtener el resultado en *radianes* debemos poner la calculadora en el modo *rad*.

Sabemos que $\alpha = \text{arc sen } 0'591254$. Buscamos el valor de α

- ① Activamos la función de la calculadora sen^{-1} . Esta es la forma de expresar la calculadora la función *arc sen*
- ② Ponemos en pantalla el número $0'591254$. En la pantalla aparecerá $\text{sen}^{-1}0'591254$ que es la forma que tiene la calculadora de expresar *arc sen* $0'591254$.
- ③ Ejecutando (pulsando “=” o “EXE”) obtenemos $36,24604643^\circ$ (son grados).
- ④ Activando la función de la calculadora \leftarrow que hay sobre la tecla $^\circ$ ''', obtenemos el ángulo $\alpha = 36^\circ 14' 45,77''$

Ahora bien:

Una solución es el ángulo $\alpha = 36^\circ 14' 45,77''$ ya que $\text{sen } 36^\circ 14' 45,77'' = 0'591254$

Otra solución también es $\beta = 180^\circ - 36^\circ 14' 45,77'' = 143^\circ 45' 14,23''$ ya que se verifica que $\text{sen } 143^\circ 45' 14,23'' = 0'591254$ (recuerda el círculo trigonométrico)

La calculadora solo da un resultado.

Nota: Para obtener el resultado en radianes hay poner la calculadora en el modo *rad*.

Ejemplo 83.-

Sabemos que $\text{cos } \alpha = -0'452388$. Queremos hallar los ángulos α comprendidos entre 0° y 360° que verifican esta igualdad.

Veamos:

Buscamos $\alpha = \text{arc cos } (-0'452388)$.

Ponemos la calculadora en el modo D (o Deg) y actuamos como en el caso anterior con al diferencia de activar la función cos^{-1} .

La calculadora nos ofrece el resultado $\alpha = 116,8969991$ que convirtiendo con la función

← nos da $\alpha = 116^\circ 53' 49,2''$.

Veamos otro resultado:

Hacemos la resta $180^\circ - 116^\circ 53' 49,2'' = 63^\circ 6' 10,8''$

El ángulo $\beta = 180^\circ + 63^\circ 6' 10,8'' = 243^\circ 6' 10,8''$ también es solución.

Por tanto, las soluciones pedidas son:

$$\alpha = 116^\circ 53' 49,2''$$

$$\beta = 243^\circ 6' 10,8''$$

Ejemplo 84.-

Sabemos que $\cotg \alpha = 1'8545$. Queremos hallar los valores de α entre 0° y 360° .

Veamos:

$$\cotg \alpha = 1'8545 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\cotg \alpha} = \frac{1}{1'8545} = 0'539228902$$

⇒ Activando en la calculadora $\tan^{-1} 0'539228902$ tenemos $\alpha = 28,33482915^\circ$

⇒ Activando ← tenemos $\alpha = 28^\circ 20' 5,38''$ que es una solución.

⇒ Otra solución sería $\beta = 180^\circ + 28^\circ 20' 5,38'' = 208^\circ 20' 5,38''$

Puedes comprobar con la calculadora que:

$$\cotg 28^\circ 20' 5,38'' = 1'8545$$

$$\cotg 208^\circ 20' 5,38'' = 1'8545$$

Ejemplo 85.-

Sabemos que $\sec \alpha = -1'3208$. ¿Queremos hallar los valores de α en radianes, comprendidos entre 0 y 2π .

Veamos:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = -1'3208 \Rightarrow \cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha} = \frac{1}{-1'3208} = -0'757116898$$

$$\alpha = \operatorname{arc} \cos(-0'757116898)$$

→ Ponemos la calculadora en el modo *rad*.

→ Ponemos $\cos^{-1} -0'757116898$ y ejecutamos

→ La calculadora nos ofrece el resultado $\alpha = 2'429684807 \operatorname{rad}$.

→ Buscamos los que se encuentren entre $0 \operatorname{rad}$ y $2\pi = 6'283185307 \operatorname{rad}$.

Recuerda que ;

● El primer cuadrante es de $0 \operatorname{rad}$ a $\pi/2 = 1'70796327 \operatorname{rad}$

● El segundo cuadrante es de $\pi/2 = 1'70796327 \operatorname{rad}$ a $\pi = 3'141592654 \operatorname{rad}$

● El tercer cuadrante es de $\pi = 3'141592654 \operatorname{rad}$ a $3\pi/2 = 4'71238898 \operatorname{rad}$

● El cuarto cuadrante es de $3\pi/2 = 4'71238898 \operatorname{rad}$ a $2\pi = 6'283185307 \operatorname{rad}$

→ Observamos que el ángulo $\alpha = 2'429684807$ es del cuadrante II

Hallamos el ángulo $\beta = \pi - \alpha = 0'711907846$

El ángulo $\pi + \beta = 3'8535005$ (de III) también es una solución

Por tanto:

$\alpha_1 = 2'429684807 \operatorname{rad}$ del cuadrante II y $\alpha_2 = 3'8535005 \operatorname{rad}$ del cuadrante III son los ángulos buscados.