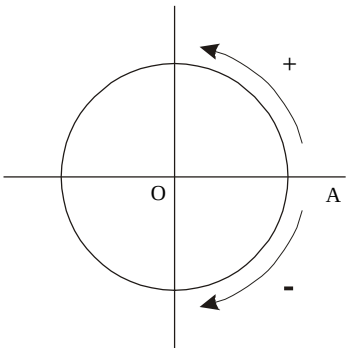
TRIGONOMETRÍA

1. **ÁNGULOS**

Origen: A

Positivos: sentido antihorario.

Negativos: sentido horario.



MEDIDA DE ÁNGULOS $\begin{cases} \text{Sistema sexagesimal} \\ \text{Sistema centesimal} \\ \text{Radianes} \end{cases}$

- SISTEMA SEXAGESIMAL. Unidad: El grado sexagesimal (º).

  1 ángulo completo= 360º

$$\boxed{1^{\circ} = \frac{1}{360}\ \text{ángulo completo}}$$

Divisores $\begin{cases} \text{Minuto sexagesimal } (') & 1^{\circ} = 60' \quad 1' = \dfrac{1^{\circ}}{60} \\ \text{Segundo sexagesimal } ('') & 1' = 60'' \quad 1'' = \dfrac{1'}{60} \end{cases}$

- SISTEMA CENTESIMAL. Unidad: El grado centesimal (^{g}).

  1 ángulo completo= 400 ^{g}.

$$\boxed{1^{g} = \frac{1}{400}\ \text{ángulo completo}}$$

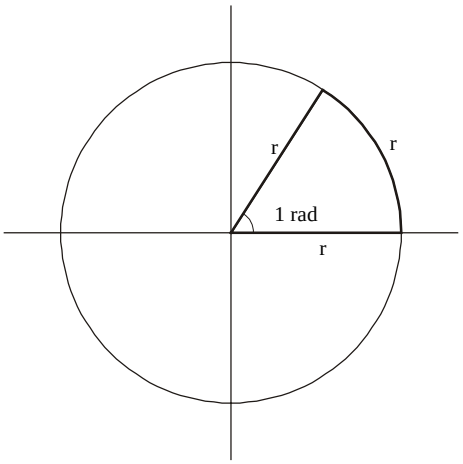
Divisores $\begin{cases} \text{Minuto centesimal } (^m) & 1^{g} = 100^{m} \quad 1^{m} = \dfrac{1^{g}}{100} \\ \text{Segundo centesimal } (^s) & 1^{m} = 100^{s} \quad 1^{s} = \dfrac{1^{m}}{100} \end{cases}$

- RADIANES. Unidad: El radián (rad).

  Un radián es un ángulo central correspondiente a un arco de circunferencia de longitud igual al radio de dicha circunferencia.

  Longitud de la circunferencia= $2\pi r$.

  1 ángulo completo= 2π rad.



$$\boxed{1\,\text{rad} = \frac{1}{2\pi}\ \text{ángulo completo}}$$

$$\boxed{1\ \text{rad} = 57^{\circ}17'44''}$$

RELACIÓN ENTRE LOS DISTINTOS SISTEMAS

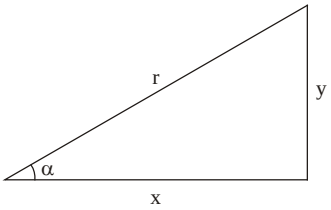
$$\boxed{360^{\circ} = 400^{g} = 2\pi\ \text{rad}}$$

y simplificada

$$\boxed{180^{\circ} = 200^{g} = \pi\ \text{rad}}$$

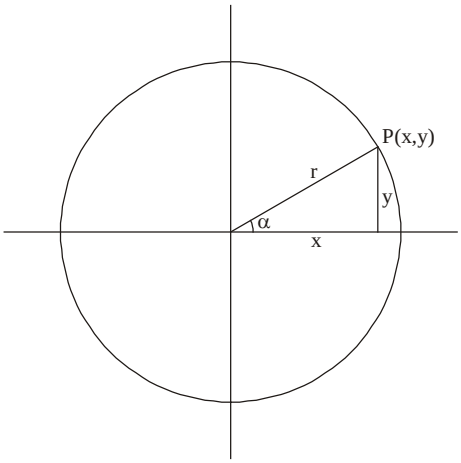
2. **<u>RAZONES TRIGONOMÉTRICAS</u>**

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO
(Razones trigonométricas de un ángulo agudo)



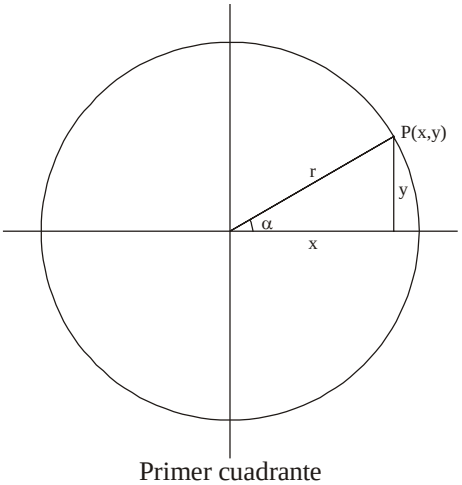
SENO	$sen\ \alpha = \dfrac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$	$sen\ \alpha = \dfrac{y}{r}$
COSENO	$cos\ \alpha = \dfrac{cateto\ contiguo}{hipotenusa}$	$cos\ \alpha = \dfrac{x}{r}$
TANGENTE	$tg\ \alpha = \dfrac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo}$	$tg\ \alpha = \dfrac{y}{x}$
COSECANTE	$cosec\ \alpha = \dfrac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$	$cosec\ \alpha = \dfrac{r}{y}$
SECANTE	$sec\ \alpha = \dfrac{hipotenusa}{cateto\ contiguo}$	$sec\ \alpha = \dfrac{r}{x}$
COTANGENTE	$cotg\ \alpha = \dfrac{cateto\ contiguo}{cateto\ opuesto}$	$cotg\ \alpha = \dfrac{x}{y}$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE CUALQUIER ÁNGULO



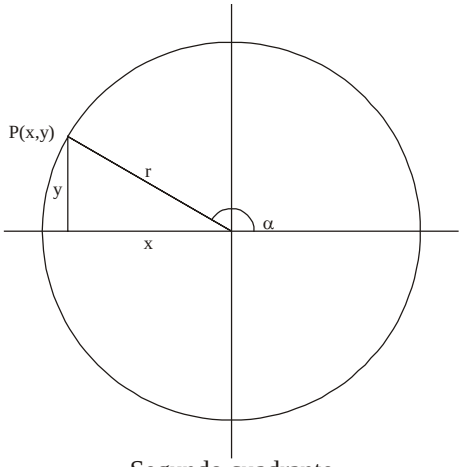
SENO	$sen\ \alpha = \dfrac{ordenada}{radio}$	$sen\ \alpha = \dfrac{y}{r}$
COSENO	$cos\ \alpha = \dfrac{abscisa}{radio}$	$cos\ \alpha = \dfrac{x}{r}$
TANGENTE	$tg\ \alpha = \dfrac{ordenada}{abscisa}$	$tg\ \alpha = \dfrac{y}{x}$
COSECANTE	$cosec\ \alpha = \dfrac{radio}{ordenada}$	$cosec\ \alpha = \dfrac{r}{y}$
SECANTE	$sec\ \alpha = \dfrac{radio}{abscisa}$	$sec\ \alpha = \dfrac{r}{x}$
COTANGENTE	$cotg\ \alpha = \dfrac{abscisa}{ordenada}$	$cotg\ \alpha = \dfrac{x}{y}$

3. SIGNO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS



Primer cuadrante
$\alpha \in I$

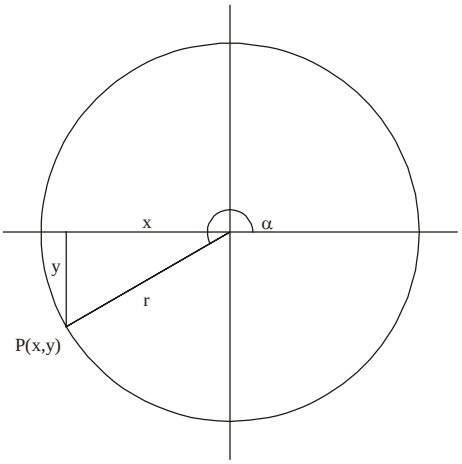
$x > 0$
$y > 0$



Segundo cuadrante
$\alpha \in II$

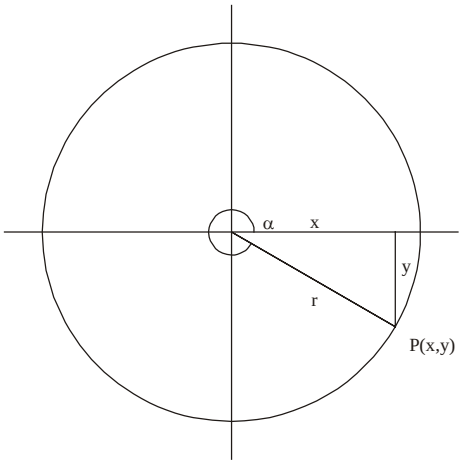
$x < 0$
$y > 0$

$r > 0$



Tercer cuadrante
$\alpha \in III$

$x < 0$
$y < 0$



Cuarto cuadrante
$\alpha \in IV$

$x > 0$
$y < 0$

	I	II	III	IV	
sen	+	+	-	-	cosec
cos	+	-	-	+	sec
tg	+	-	+	-	cotg

4. RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO

$\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$ $\quad \sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ $\quad \operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ $\quad \operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

Fórmula fundamental de la Trigonometría

$$\boxed{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$

$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $\qquad 1 + \cot g^2\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$

$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$ $\qquad 1 + \cot g^2\alpha = \cos ec^2\alpha$

Recorrido de las razones trigonométricas

$-1 \le \operatorname{sen}\alpha \le 1$ $\qquad \operatorname{cosec}\alpha \le -1$ ó $\operatorname{cosec}\alpha \ge 1$

$-1 \le \cos\alpha \le 1$ $\qquad \sec\alpha \le -1$ ó $\sec\alpha \ge 1$

$-\infty < tg\alpha < +\infty$ $\qquad -\infty < cotg\ \alpha < +\infty$

5. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNOS ÁNGULOS

Razones trigonométricas de 0º, 90º, 180º y 270º.

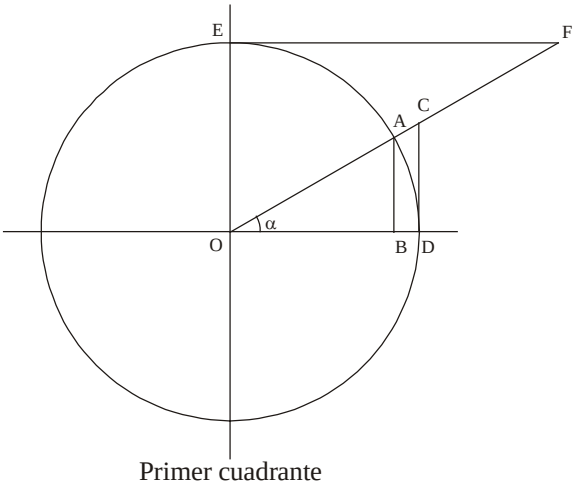
	0º	90º	180º	270º
sen	0	1	0	-1
cos	1	0	-1	0
tg	0		0	
cosec		1		-1
sec	1		-1	
cotg		0		0

Razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º.

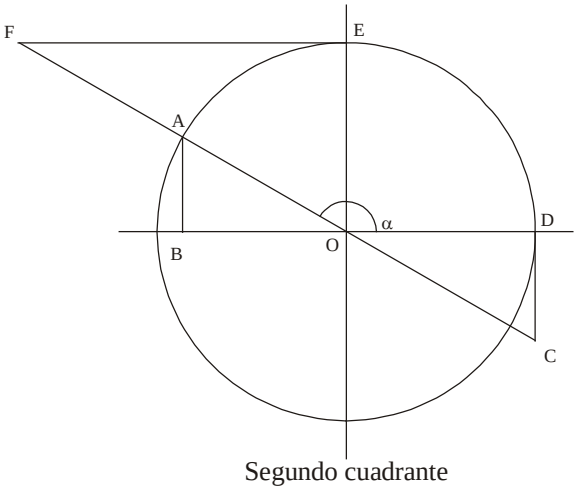
	30º	45º	60º
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cosec	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
sec	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
cotg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

6. LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS

Consideremos la circunferencia trigonométrica: $r = 1$

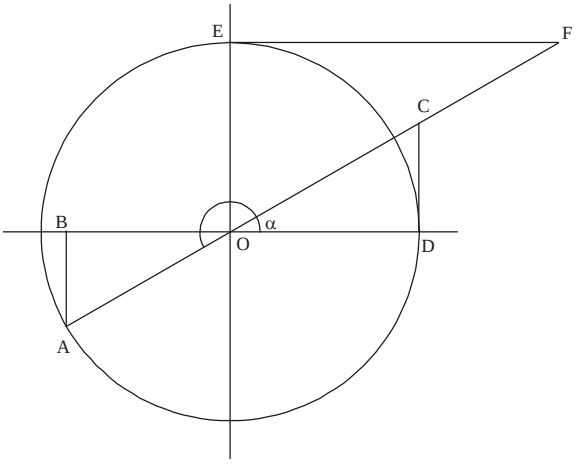


Primer cuadrante
$\alpha \in I$

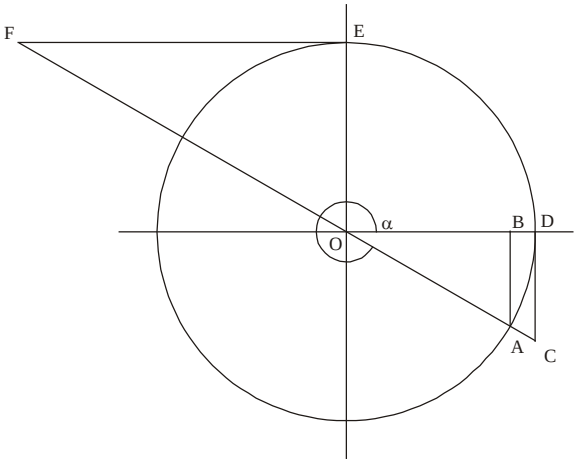


Segundo cuadrante
$\alpha \in II$

r = 1



Tercer cuadrante
$\alpha \in III$



Cuarto cuadrante
$\alpha \in IV$

$\operatorname{sen}\alpha = \overline{AB}$	$\cos\alpha = \overline{OB}$	$\operatorname{tg}\alpha = \overline{CD}$
$\operatorname{cosec}\alpha = \overline{OF}$	$\sec\alpha = \overline{OC}$	$\operatorname{cotg}\alpha = \overline{EF}$

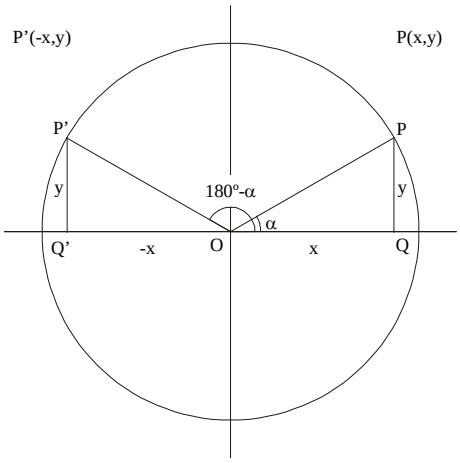
¡OJO! Esto es cierto únicamente cuando el radio es la unidad: $r = 1$.

7. RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNOS ÁNGULOS

ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

Son aquellos que suman 180º

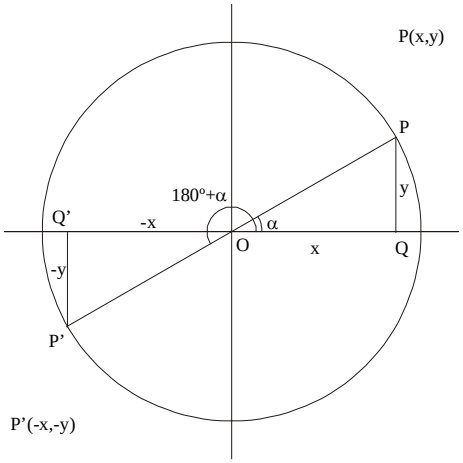
I	α
II	$180º-\alpha$



$\text{sen}\,(180º-\alpha)=\text{sen}\,\alpha$	$\text{cosec}\,(180º-\alpha)=\text{cosec}\,\alpha$
$\cos(180º-\alpha)=-\cos\alpha$	$\sec(180º-\alpha)=-\sec\alpha$
$\text{tg}\,(180º-\alpha)=-\text{tg}\,\alpha$	$\text{cotg}\,(180º-\alpha)=-\text{cotg}\,\alpha$

ÁNGULOS QUE SE DIFERENCIAN EN 180º

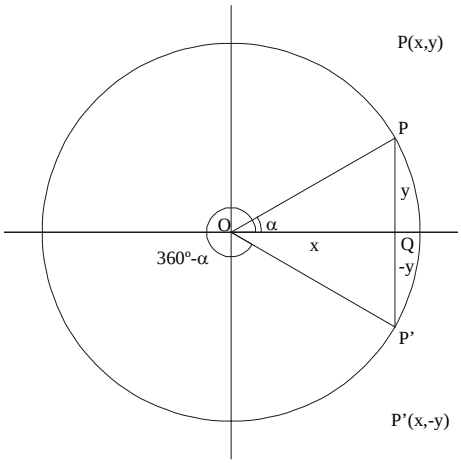
I	α
III	$180º+\alpha$



$\text{sen}\,(180º+\alpha)=-\text{sen}\,\alpha$	$\text{cosec}\,(180º+\alpha)=-\text{cosec}\,\alpha$
$\cos(180º+\alpha)=-\cos\alpha$	$\sec(180º+\alpha)=-\sec\alpha$
$\text{tg}\,(180º+\alpha)=\text{tg}\,\alpha$	$\text{cotg}\,(180º+\alpha)=\text{cotg}\,\alpha$

ÁNGULOS QUE SUMAN 360º

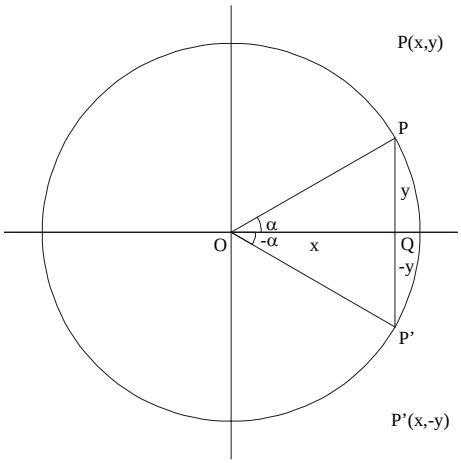
I	α
IV	360º−α



$\operatorname{sen}(360^{\circ}-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$	$\operatorname{cosec}(360^{\circ}-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha$
$\cos(360^{\circ}-\alpha) = \cos\alpha$	$\sec(360^{\circ}-\alpha) = \sec\alpha$
$\operatorname{tg}(360^{\circ}-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}(360^{\circ}-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$

ÁNGULOS OPUESTOS

I	α
IV	−α

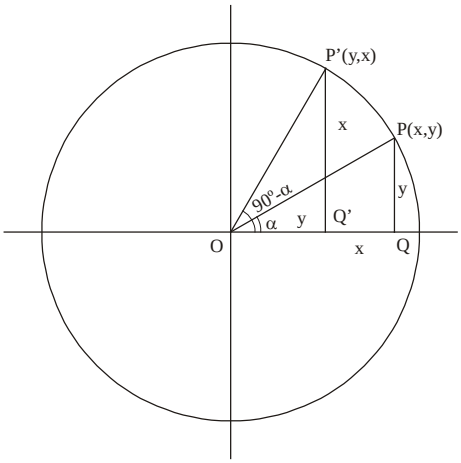


$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$	$\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\sec(-\alpha) = \sec\alpha$
$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$

ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Son aquellos que suman 90º

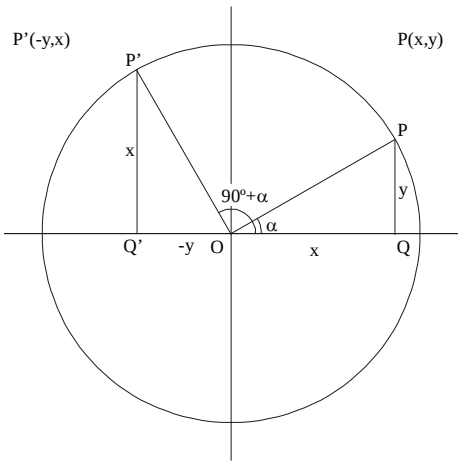
I	α
I	90º−α



$\text{sen}\,(90^o-\alpha)=\cos\alpha$	$\text{cosec}\,(90^o-\alpha)=\sec\alpha$
$\cos\,(90^o-\alpha)=\text{sen}\,\alpha$	$\sec\,(90^o-\alpha)=\text{cosec}\,\alpha$
$\text{tg}\,(90^o-\alpha)=\text{cotg}\,\alpha$	$\text{cotg}\,(90^o-\alpha)=\text{tg}\,\alpha$

ÁNGULOS QUE SE DIFERENCIAN EN 90º

I	α
II	90º+α



$\text{sen}\,(90^o+\alpha)=\cos\alpha$	$cosec\,(90^o+\alpha)=sec\,\alpha$
$\cos\,(90^o+\alpha)=-\text{sen}\,\alpha$	$sec\,(90^o+\alpha)=-cosec\,\alpha$
$\text{tg}\,(90^o+\alpha)=-\text{cotg}\,\alpha$	$cotg\,(90^o+\alpha)=-tg\,\alpha$

8. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA ADICIÓN

SUMA Y DIFERENCIA

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$
$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

ÁNGULO DOBLE

$$\operatorname{sen}2\alpha=2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$$
$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

ÁNGULO MITAD

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$
$$\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$
$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

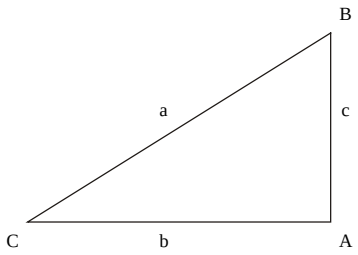
TRANSFORMACIÓN DE PRODUCTOS EN SUMAS

$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\cdot\left[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right]$$
$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\cdot\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$
$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta=\frac{1}{2}\cdot\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$$

TRANSFORMACIÓN DE SUMAS EN PRODUCTOS

$$\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B=2\cdot\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A+\cos B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A-\cos B=-2\cdot\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$$

9. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS



ÁNGULOS

$$\left.\begin{array}{r} A = 90^{\circ} \\ A + B + C = 180^{\circ} \end{array}\right\} \Rightarrow B + C = 90^{\circ}$$

B y C son complementarios

$$\boxed{B + C = 90^{\circ}}$$

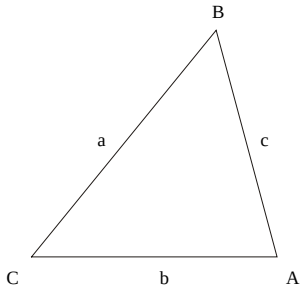
TEOREMA DE PITÁGORAS

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

$\operatorname{sen} B = \dfrac{b}{a}$	$\cos B = \dfrac{c}{a}$	$\operatorname{tg} B = \dfrac{b}{c}$
$\operatorname{sen} C = \dfrac{c}{a}$	$\cos C = \dfrac{b}{a}$	$\operatorname{tg} C = \dfrac{c}{b}$

10. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS NO RECTÁNGULOS



ÁNGULOS

$$\boxed{A + B + C = 90^{\circ}}$$

TEOREMA DEL SENO

$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}}$$

Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

La razón constante entre el lado de un triángulo y el seno del ángulo opuesto es igual al diámetro de la circunferencia circunscrita al mismo:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R$$

siendo R el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

TEOREMA DEL COSENO

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A}$$

El cuadrado del lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de los mismos por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.

Análogamente:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$$

TEOREMA DE LA TANGENTE

$$\boxed{\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}}$$

En todo triángulo, la suma de dos lados es a su diferencia como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos es a la tangente de la semidiferencia de los mismos.

FÓRMULAS DE BRIGGS

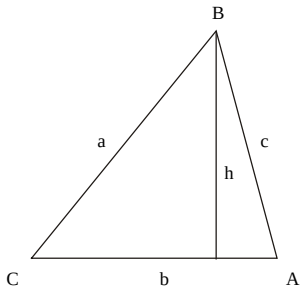
$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{p\cdot(p-a)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)\cdot(p-c)}{p\cdot(p-b)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)\cdot(p-b)}{p\cdot(p-c)}}$$

donde p es el semiperímetro.

11. <u>ÁREA DE UN TRIÁNGULO</u>



- Dado un lado y la altura sobre dicho lado.

$$\boxed{S=\frac{b\cdot h}{2}}$$

- Dado un lado y dos ángulos.

$$\boxed{S=\frac{b^2\cdot \operatorname{sen} A\cdot \operatorname{sen} C}{2\cdot \operatorname{sen}(A+C)}}$$

- Dados los lados y el radio de la circunferencia circunscrita.

$$\boxed{S=\frac{a\cdot b\cdot c}{4R}}$$

donde R es el radio de la circunferencia circunscrita.

- Dado el perímetro y el radio de la circunferencia inscrita.

$$\boxed{S=p\cdot r}$$

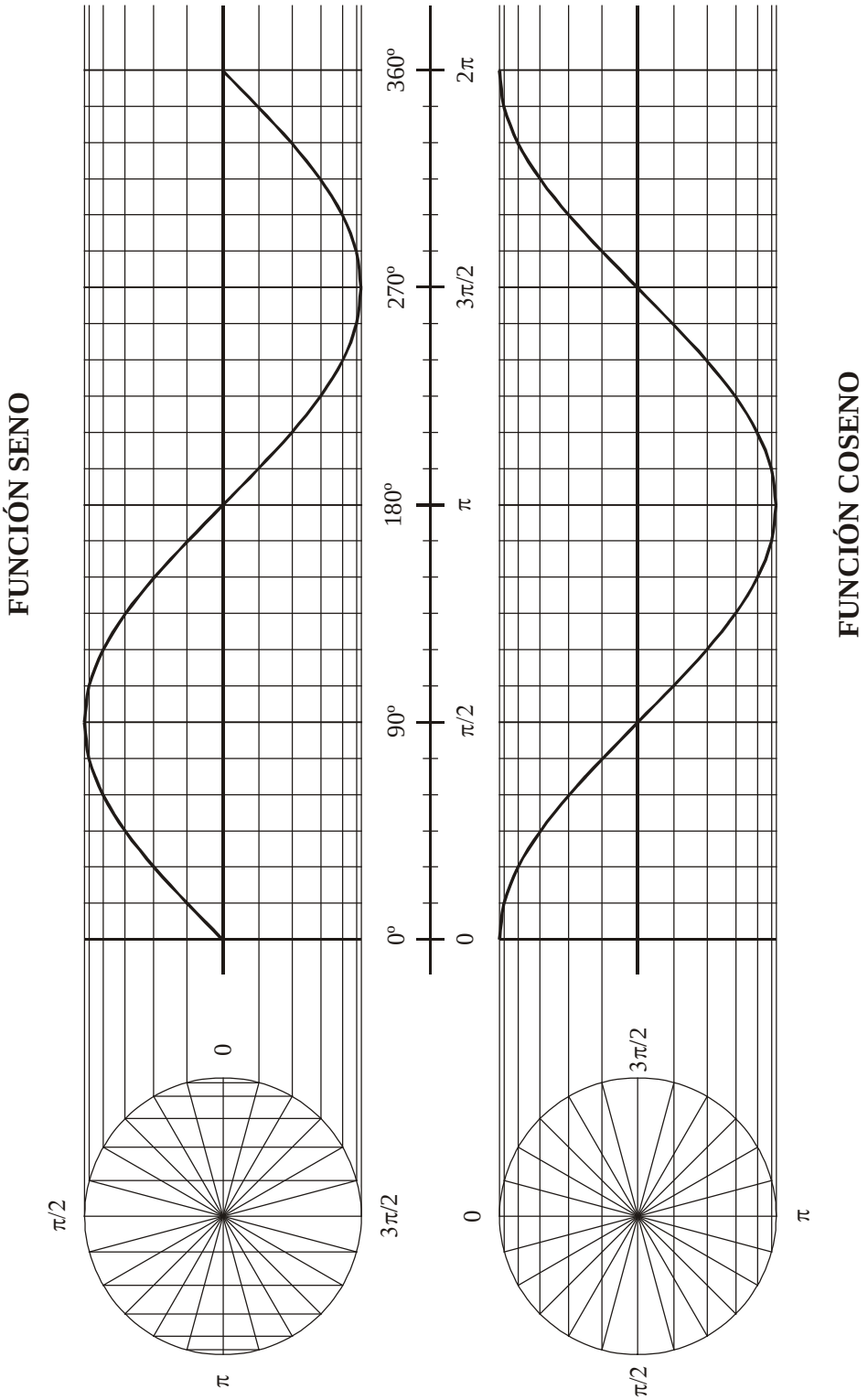
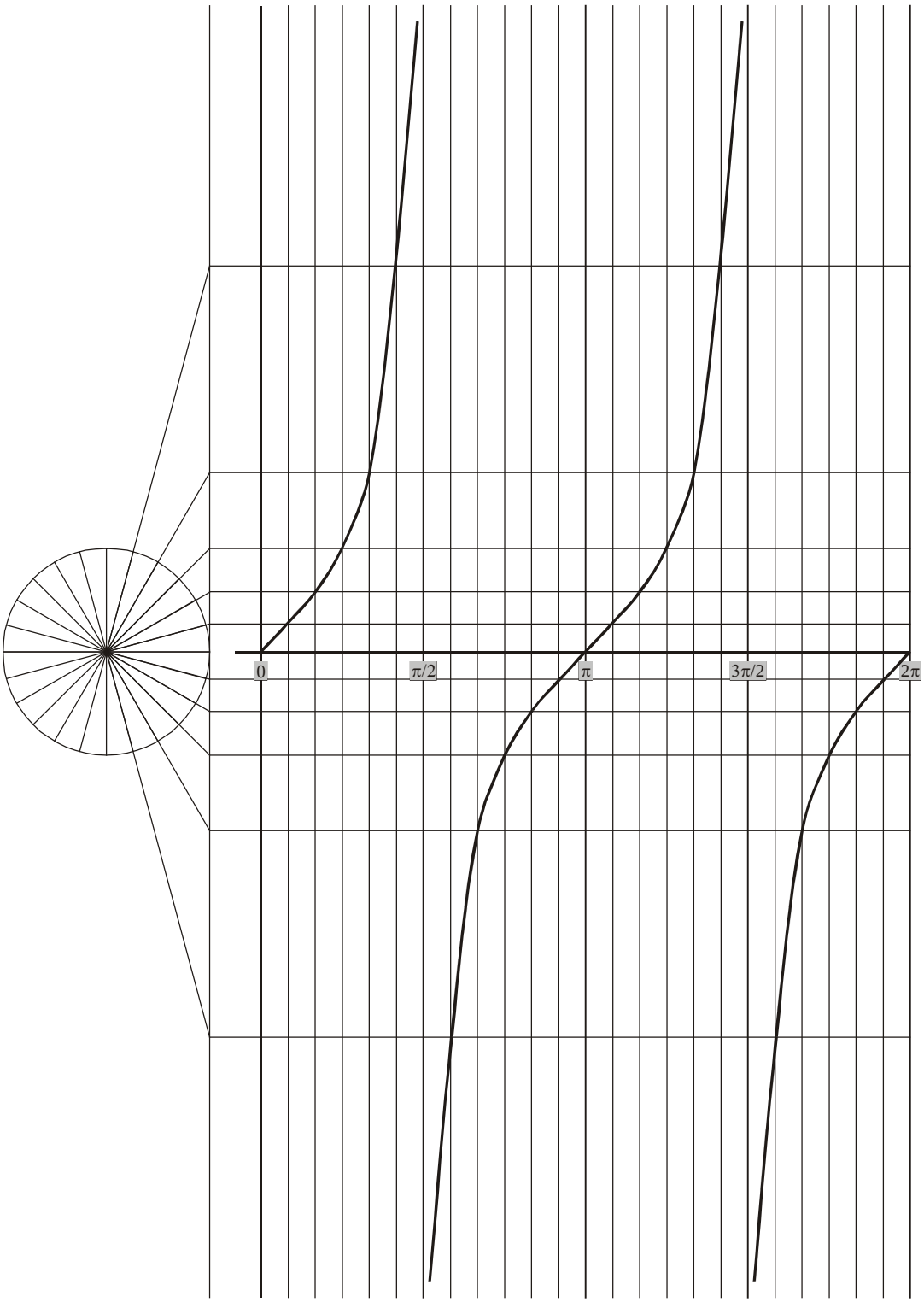
siendo p el semiperímetro y r el radio de la circunferencia inscrita.

- Dados los tres lados.

$$\boxed{S=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}}$$

donde p es el semiperímetro.

12. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS



FUNCIÓN TANGENTE