

PREGUNTA 1.- Dada la siguiente función: $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^3 - 4x}$

- a) Determina su dominio.
- b) Estudia su continuidad.
- c) Estudia su simetría.
- d) Halla los puntos de corte con los ejes.
- e) Estudia su signo.
- f) Busca sus asíntotas, si las tiene.
- g) Esboza su gráfica.

PREGUNTA 2.- Explica porqué las siguientes afirmaciones son VERDADERAS o FALSAS:

- a) Todas las funciones de la forma $f(x)=a^x$, con $a>0$ (Funciones Exponenciales) presentan un único punto de corte con los ejes en el punto (0,1).
- b) Todas las funciones logarítmicas; $f(x)=\log_a x$, con $a>0$, presentan una asíntota vertical en la recta $x=0$.
- c) La función $y=\operatorname{tg}x$ es una función acotada con recorrido $[-1,1]$

PREGUNTA 3.- Dibuja las gráficas de las siguientes funciones:

- a) $y = |\operatorname{sen}x|$
- b) $y = |x+2| + x$

PREGUNTA 4.- Aplicando la definición de derivada de una función en un punto, calcula:

- a) $f'(3)$ siendo $f(x) = \frac{2x - 3}{5}$
- b) $f'(1)$ siendo $f(x) = (2x + 1)^2$

PREGUNTA 5.- Dada la función $y = x^2 - 5x + 1$, busca, utilizando la definición de función derivada, los valores de x donde dicha función presenta puntos de tangente horizontal.

Calificaciones:

PREGUNTA	PUNTUACIÓN
1	3,5 puntos (0,5 puntos por apartado)
2	1,5 puntos (0,5 puntos por apartado)
3	2 punto (1 punto por apartado)
4	1,5 puntos (0,75 puntos por apartado)
5	1,5 puntos

PREGUNTA 1: $f(x) = \frac{x^2+x}{x^3-4x}$

a) $D(f) = \{x / x^3-4x \neq 0\}$

$x^3-4x=0 ; (x^2-4) \cdot x=0 \begin{cases} x^2-4=0 \Rightarrow \boxed{x=\pm 2} \\ \boxed{x=0} \end{cases}$

uego: $D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$

b) Es una función RACIONAL, así que será continua en todo \mathbb{R} excepto donde se anule el denominador, esto es: $\mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$

c) $f(-x) = \frac{(-x)^2+(-x)}{(-x)^3-4(-x)} = \frac{x^2-x}{4x-x^3} \neq f(x), -f(x) \Rightarrow$ NO PRESENTA NINGÚN TIPO DE SIMETRÍA.

d) $f(x) = \frac{x^2+x}{x^3-4x}$: P.C

- eje X: $x^2+x=0 \Rightarrow x=0, x=-1$
 $f(0) = \frac{0}{0} \Rightarrow$ NO ESTÁ DEFINIDA
 $f(-1) = \frac{0}{3} = 0 \rightarrow$ SÍ ES P. CORTE $\boxed{(-1, 0)}$
- eje Y: $f(0) = \frac{0}{0} \rightarrow$ No corta al eje Y

e) SIGNO: $f(x) = \frac{x^2+x}{x^3-4x} = \frac{x(x+1)}{x(x+2)(x-2)}$

$f(x) > 0$ si $x \in (-2, -1) \cup (2, +\infty)$
 $f(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (0, 2)$

	$-\infty$	-2	-1	0	2	$+\infty$
x	-	-	-	+	+	
(x+1)	-	-	+	+	+	
x(x+1)	+	+	-	+	+	
(x+2)	-	+	+	+	+	
(x-2)	-	-	-	-	+	
x(x+2)(x-2)	-	+	+	-	+	
f(x)	-	+	-	-	+	

f) Asintotas

VERTICALES

Si $\underline{x=-2}$: $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$ } Asintota Vertical

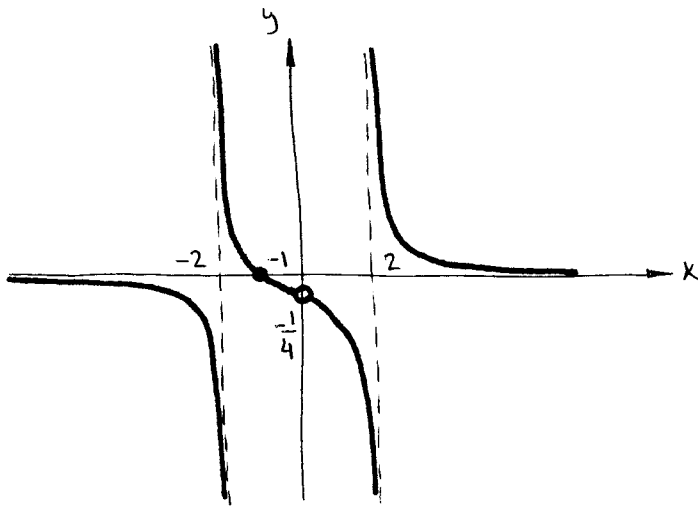
Si $\underline{x=0}$: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \left[\frac{0}{0} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x(x+2)(x-2))} = \frac{1}{-4} \rightarrow$ No es AS. VERT.

Si $\underline{x=2}$: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{6}{0^-} = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{6}{0^+} = +\infty$ } Asintota Vertical

HORIZONTALES

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y=0$ es Asintota horizontal \Rightarrow NO tiene AS. OBLICUA.

g)



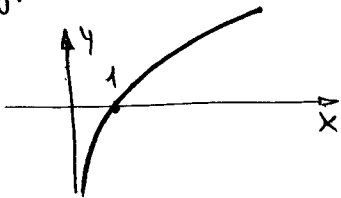
PREGUNTA 2:

a) VERDADERO:

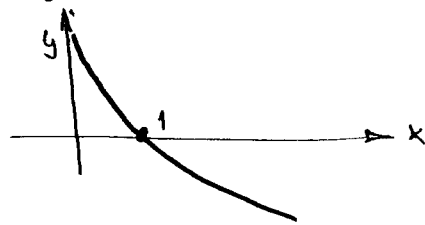
- No cortan nunca al eje x porque $a^x = 0$ con $a > 0$ no tiene solución.
- Cortan siempre al eje y en $(0,1)$ porque $a^0 = 1$, independientemente del valor de a (con $a > 0$)

b) VERDADERO:

$$- \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty \text{ si } a > 1$$



$$y \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty \text{ si } a < 1$$

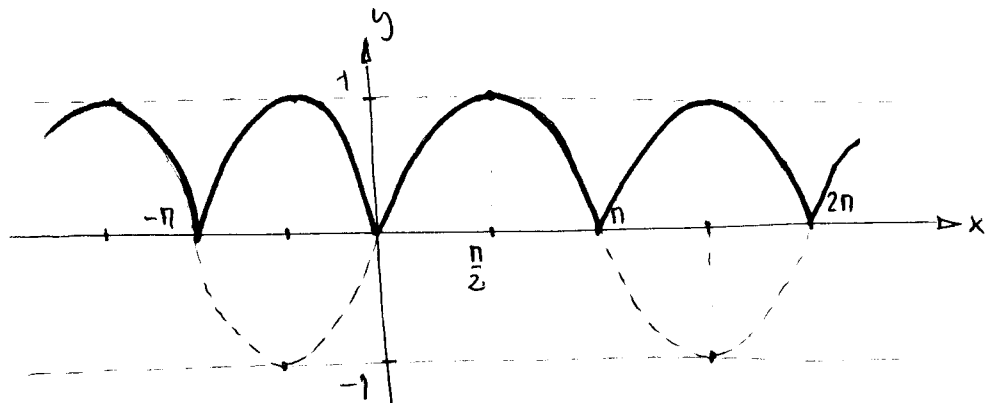


c) FALSO: Por ejemplo, si $x = \frac{\pi}{3}$ (60°)

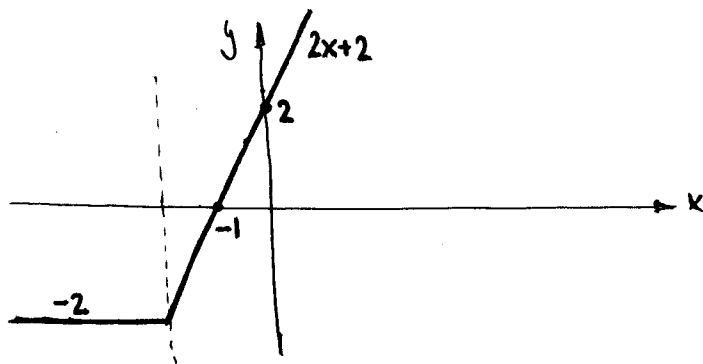
$$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3} > 1$$

PREGUNTA 3

a) $y = |\sin x|$



$$b) \quad y = |x+2| + x = \begin{cases} x+2+x = 2x+2 & \text{si } x+2 > 0 \Rightarrow \text{si } x > -2 \\ -x-2+x = -2 & \text{si } x+2 \leq 0 \Rightarrow \text{si } x \leq -2 \end{cases}$$



$$y = 2x + 2$$

x	y
0	2
-1	0

PREGUNTA 4

$$a) \quad f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2(3+h)-3}{5} - \frac{3}{5}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{6} + 2h - \cancel{3} - 3}{5h} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{5h} = \frac{2}{5}$$

$$b) \quad f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2(1+h)+1)^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+2h)^2 - 9}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 4h^2 + 12h - 9}{h} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{9} + 4h^2 + 12h - \cancel{9}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4h + 12) = 12$$

PREGUNTA 5:

Hallamos la función derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - 5(x+h) + 1 - (x^2 - 5x + 1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} + h^2 + 2xh - 5x - 5h + 1 - \cancel{x^2} + 5x - \cancel{1}}{h} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h^2} + (h + 2x - 5)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2x - 5) = 2x - 5$$

Los puntos de tangente horizontal tienen derivada nula, entonces:

$$2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{5}{2}}$$