Ecuaciones trigonométricas: ejercicios resueltos

1) Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas

a) $2tgx - 3\ cotgx - 1 = 0$
b) $cos^2x - 3sen^2x = 0$
c) $sen(2x + 60) + sen(x + 30) = 0$
d) $sen^2x - cos^2x = 1/2$
e) $sen2x \cdot cosx = 6sen^3x$
f) $2cosx = 3tgx$

Indicaciones:

Debes intentar reducir toda la expresión a una única razón trigonométrica (que todo sean senos, o cosenos, por ejemplo). Cuando puedas llegar a una expresión del tipo *seno(algo) = un número,* sólo tendrás que usar la función arco correspondiente (arcoseno, arcotangente, etc.).

Para conseguir que todas las razones trigonométricas sean iguales no hay una regla fija; tendrás que probar trasteando con las siguientes fórmulas básicas:

$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

$1 + tg^2\alpha = sec^2\alpha$

$tg\alpha = sen\alpha / cos\alpha$

$1 + cotg^2\alpha = cosec^2\alpha$

Ángulo suma

$sen\ (\alpha \pm \beta) = sen\alpha \cdot cos\beta \pm cos\alpha \cdot sen\beta$
$cos\ (\alpha \pm \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta \pm sen\alpha \cdot sen\beta$
$tg\ (\alpha + \beta) = (tg\alpha + tg\beta) / (1 - tg\alpha \cdot tg\beta)$
$tg\ (\alpha - \beta) = (tg\alpha - tg\beta) / (1 + tg\alpha \cdot tg\beta)$

Ángulo doble

$sen2\alpha = 2sen\alpha \cdot cos\alpha$
$cos2\alpha = cos2\alpha - sen2\alpha$
$tg2\alpha = (2tg\alpha) / (1 - tg2\alpha)$

Ángulo mitad

$sen\alpha/2 = \pm \sqrt{((1 - cos\alpha)/2)}$
$cos\alpha/2 = \pm \sqrt{((1 + cos\alpha)/2)}$
$tg\alpha/2 = \pm \sqrt{((1-cos\alpha)/(1+cos\alpha))}$

Transformar sumas en productos

$sen\alpha + sen\beta = 2sen((\alpha+\beta)/2) \cdot cos((\alpha-\beta)/2)$
$sen\alpha - sen\beta = 2cos((\alpha+\beta)/2) \cdot sen((\alpha-\beta)/2)$
$cos\alpha + cos\beta = 2cos((\alpha+\beta)/2) \cdot cos((\alpha-\beta)/2)$
$cos\alpha - cos\beta = -2sen((\alpha+\beta)/2) \cdot sen((\alpha-\beta)/2)$

Soluciones

a) $2tgx - 3\,cotgx - 1 = 0$

Solución:

Transformamos la cotg en tg. Llegamos a una ecuación de segundo grado.

$2tgx - 3/tgx - 1 = 0$
$2tg^2x - 3 - tgx = 0$

Resolvemos con la fórmula de la ecuación de segundo grado, siendo la incógnita tgx. Obtenemos dos soluciones:

Solución 1:

$tgx = 3/2 \rightarrow x = 56{,}31^o + 180k$

Solución 2:

$tg\,x = -1 \rightarrow x = 135^o + 180k$

b) $\cos^2x - 3sen^2x = 0$

Solución:

$1 - sen^2x - 3sen^2x = 0$
$1 - 4sen^2x = 0$
$sen^2x = 1/4$
$senx = \pm 1/2$

$x = arcsen 1/2 \rightarrow \quad x_1 = 30^o + 360k$
$\quad x_2 = 150^o + 360k$

$x = arcsen(-1/2) \rightarrow \quad x_3 = 210^o + 360k$
$\quad x_4 = 330^o + 360k$

c) $sen(2x + 60) + sen(x + 30) = 0$

Solución:
Convertimos la suma del seno de dos ángulos en un producto (revisa las fórmulas básicas):

$2sen\,(((2x+60)+(x+30))/2)\cdot\cos\,(((2x+60) - (x + 30))/2) = 0$
$2sen\,(3x/2 + 45)\cdot\cos\,(x/2 + 15) = 0$
$sen\,(3x/2 + 45)\cdot\cos\,(x/2 + 15) = 0$

$sen\ (3x/2 + 45) = 0 \rightarrow x_1 = -30º + 120k$

$cos\ (x/2 + 15) = 0 \rightarrow x_2 = 150º + 360k$
$x_3 = 510º + 360k$

d) $sen^2x - cos^2x = 1/2$

Solución:

Cambiamos el signo a los dos lados de la ecuación, para que lo de la izquierda se convierta en el coseno del ángulo doble:

$sen^2x - cos^2x = 1/2$
$cos^2x - sen^2x = -1/2$
$cos2x = -1/2$

$2x_1 = 120º + 360k \quad \rightarrow \quad x_1 = 60º + 180k$
$2x_2 = 240 + 360k \quad \rightarrow \quad x_2 = 120 + 180k$

e) $sen2x \cdot cosx = 6sen^3x$

Solución:

Transformamos el seno del ángulo doble, y pasamos el 2 dividiendo al lado derecho.

$2senx \cdot cosx \cdot cosx = 6sen^3x$
$senx \cdot cosx \cdot cosx = 3sen^3x$
$senx \cdot cos^2x - 3sen^3x = 0$

Sacamos factor común

$senx(cos^2x - 3sen^2x) = 0$

Como es un producto de dos cosas que dan cero, o bien la primera es cero o bien lo es la segunda. Así, por un lado,

$senx = 0 \rightarrow x_1 = 0º + 180k$

Por otro,

$cos^2x - 3sen^2x = 0$
$1 - sen^2x - 3sen^2x = 0$
$1 - 4sen^2x = 0$
$sen^2x = 1/4$
$senx = \pm 1/2$

$x = \text{arcsen}1/2 \rightarrow \quad x_2 = 30º + 360k$
$\quad x_3 = 120º + 360k$

$x = \text{arcsen}(-1/2) \rightarrow \quad x_4 = 210º + 360k$
$\quad x_5 = 330º + 360k$

f) 2cosx = 3tgx

$2\cos x = 3\text{sen}x/\cos x$
$2\cos^2 x = 3\text{sen}x$
$2(1-\text{sen}^2 x) = 3\ \text{sen}x$
$2 - 2\text{sen}^2 x - 3\text{sen}x = 0$

Resolvemos como una ecuación de segundo grado en la que la incógnita es senx. Obtenemos dos soluciones:

Solución 1:

$\text{sen}x = 1/2 \rightarrow \quad x1 = 30º + 360k$
$\quad x2 = 150º + 360k$

Solución 2:

$\text{sen}x = -2 \rightarrow$ se descarta, porque ningún seno o coseno puede valer más de 1 o -1.