

# Trigonometría - Lo básico

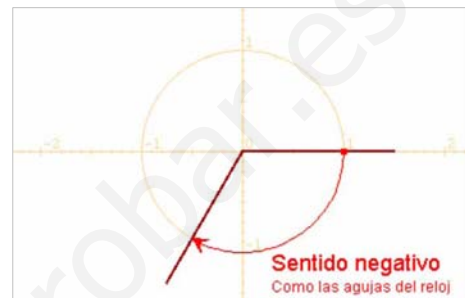
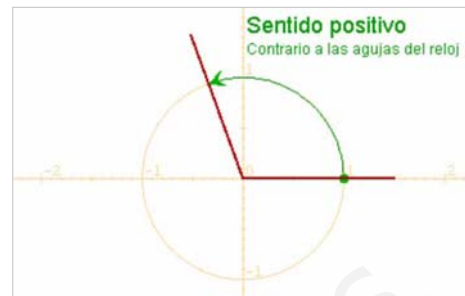
## 1. Los ángulos y su medida

**Trigonometría** es una palabra que deriva del griego Τριγωνομετρία, Tri (Τρι) tres, gono (γωνο) ángulo, metría (μετρία) medida, es decir, "medida de tres ángulos". Puedes consultar la definición de trigonometría que da el diccionario de la R.A.E.

En este curso se tratará únicamente la trigonometría plana.

Con objeto de estudiar los ángulos y su medida consideraremos que un ángulo es un recorrido en la circunferencia con centro el origen y de radio unidad o circunferencia goniométrica, el punto de partida de estos recorridos se situará en el punto de coordenadas (1,0) y la medida de un ángulo será la medida de ese recorrido.

Los ángulos pueden tener sentido positivo o negativo según sea el de su recorrido; si es contrario al de las agujas del reloj será positivo y si es igual, negativo.



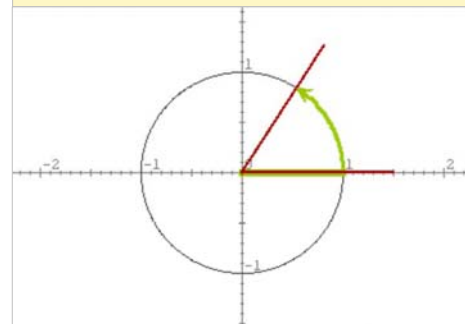
### Radianes

Medir un ángulo es medir su recorrido en la circunferencia.

Como la medida de toda la circunferencia es  $2 \cdot \pi \cdot \text{radio}$ , resulta conveniente tomar como unidad de medida el radio.

En las figuras, los ángulos se representan en una circunferencia de radio 1, ello no significa que el radio mida 1 cm o 1 pie o 1 m, sino que el radio es la unidad de medida tomada. Por razones evidentes a esta unidad se le llama **radián**.

El ángulo de **1 radián** es aquel cuyo recorrido en la circunferencia es igual al radio.



### Grados sexagesimales

Ya conoces el sistema sexagesimal de medida de ángulos.

Al dividir la circunferencia en 360 partes iguales, obtenemos un grado, a su vez cada grado se compone de 60 minutos y cada minuto de 60 segundos.

Así un ángulo se mide en:

**grados° minutos' segundos''**



# Trigonometría

## De grados a radianes y de radianes a grados

$$1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes}$$

De grados a radianes:

✓ multiplicamos por  $\frac{\pi}{180}$

$$1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \text{ grados}$$

De radianes a grados:

✓ multiplicamos por  $\frac{180}{\pi}$

El semiperímetro de la semicircunferencia es  $\pi \cdot \text{radio}$

$$\pi \text{ radianes} = 180 \text{ grados}$$

es decir,  $\pi$  veces un radián = 180 veces un grado  
 $\pi \cdot 1 \text{ radián} = 180 \cdot 1 \text{ grado}$

Si despejamos el grado resulta:

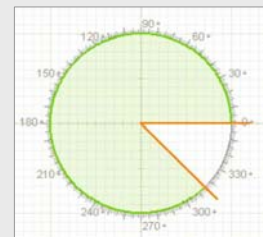
$$1 \text{ grado} = \pi/180 \text{ radianes} \sim 0.0175 \text{ radianes}$$

Si despejamos el radián resulta:

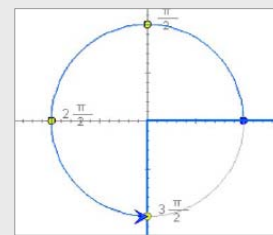
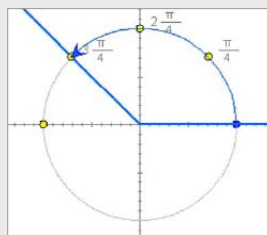
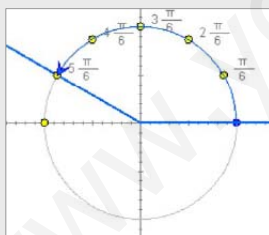
$$1 \text{ radián} = 180/\pi \text{ grados} \sim 57.2957 \text{ grados}$$

## EJERCICIOS resueltos

1. Dibuja en la circunferencia goniométrica los ángulos de  $120^\circ$ ,  $-50^\circ$  y  $315^\circ$ .



2. Dibuja en la circunferencia goniométrica el ángulo de  $5\pi/6$ ,  $3\pi/4$ , y  $3\pi/2$  rad.



3. Pasa a radianes: a)  $150^\circ$ , b)  $210^\circ$ , c)  $270^\circ$ , d)  $60^\circ$

$$a) 150^\circ = \frac{150 \cdot \pi}{180} = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

$$b) 210^\circ = \frac{210 \cdot \pi}{180} = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$$

$$c) 270^\circ = \frac{270 \cdot \pi}{180} = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

$$d) 60^\circ = \frac{60 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

4. Pasa a grados: a)  $11\pi/6$  rad, b)  $\pi/4$  rad, c)  $5\pi/4$  rad, d)  $2\pi/3$  rad

$$a) \frac{11\pi}{6} \text{ rad} = \frac{11\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 330^\circ$$

$$b) \frac{\pi}{4} \text{ rad} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 45^\circ$$

$$c) \frac{5\pi}{4} \text{ rad} = \frac{5\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 225^\circ$$

$$d) \frac{2\pi}{3} \text{ rad} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} = 120^\circ$$

# Trigonometría

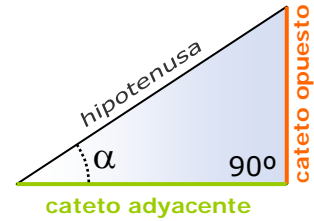
## 2. Razones trigonométricas

En los triángulos semejantes los ángulos son iguales y los lados homólogos son proporcionales. La razón entre los lados de un triángulo determina su forma.

Dado un triángulo rectángulo, las razones trigonométricas del ángulo agudo  $\alpha$  se definen:

- ✓ El **seno** es el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa.
- ✓ El **coseno** es el cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa.
- ✓ La **tangente** es el cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

Estas razones no dependen del tamaño del triángulo sino del ángulo.



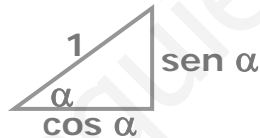
$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \\ \text{cos } \alpha &= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \\ \text{tg } \alpha &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \end{aligned}$$

### Seno y coseno en la circunferencia

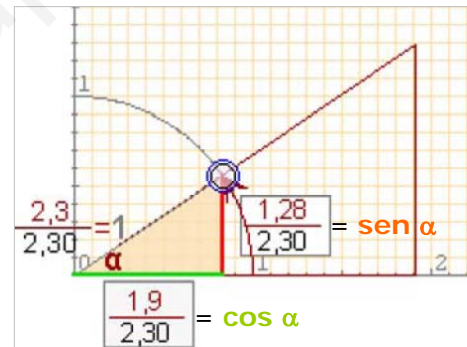
En la figura se ha representado el ángulo  $\alpha$  en la circunferencia goniométrica o de radio unidad.

En el triángulo rectángulo que se forma como la hipotenusa es 1, el cateto opuesto es el **sen  $\alpha$**  y el adyacente el **cos  $\alpha$** .

Es importante recordar el siguiente triángulo:



Observa que (**cos  $\alpha$** , **sen  $\alpha$** ) son las **coordenadas** del punto final del ángulo  $\alpha$  en la circunferencia de radio unidad.



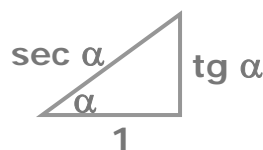
### Tangente en la circunferencia

En la figura se comprende por qué al cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente se le llama tangente, su valor queda definido sobre la recta tangente a la circunferencia en el punto (1,0).

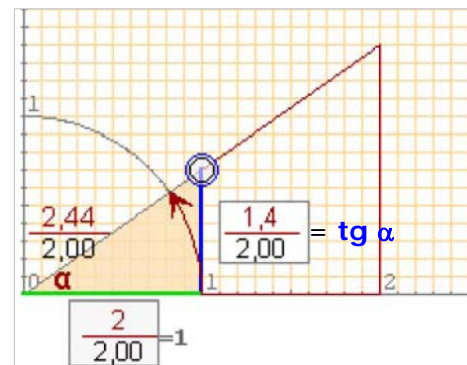
Observa que cuando el cateto adyacente vale 1, la hipotenusa es igual a la inversa del cos  $\alpha$ .

Al cociente:

$$\frac{1}{\text{cos } \alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$



se le llama secante de  $\alpha$  y se abrevia con **sec  $\alpha$** .



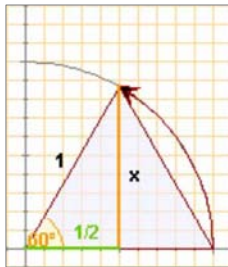
# Trigonometría

## Razones de 30°, 45° y 60°

Los ángulos de 30°, 45° y 60° aparecen con bastante frecuencia, fíjate cómo se calculan sus razones a partir de la definición si buscamos los triángulos adecuados.

En un triángulo equilátero los ángulos miden 60°. Con el Teorema de Pitágoras se calcula la altura

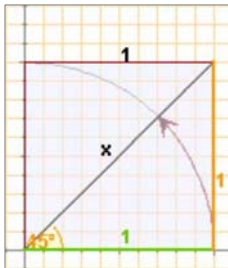
$$x = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Tomamos un cuadrado de lado 1

Con el Teorema de Pitágoras se calcula la diagonal

$$\text{diag} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$



	sen	cos	tg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Memorizar esta tabla es fácil si observas el orden que guardan. Una vez aprendidos los senos con las raíces consecutivas, los cosenos salen en orden inverso.

### Con la calculadora

En un principio, la única opción era dibujar un triángulo con un ángulo del tamaño del dado y, obteniendo las medidas de sus lados, hacer los cocientes (existen datos de cálculos que se remontan a hace 4000 años).

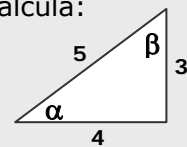
En el s. XVII, gracias al uso de los logaritmos, se empieza a generalizar el uso de tablas impresas que dan dichos valores.

Hoy en día usaremos siempre la calculadora para estas operaciones. Pero recuerda comprobar siempre que está en el modo D o DEG.

### EJERCICIOS resueltos

5. En el triángulo de la figura calcula:

- a) sen  $\alpha$       d) sen  $\beta$   
 b) cos  $\alpha$       e) cos  $\beta$   
 c) tg  $\alpha$         f) tg  $\beta$



- a) sen  $\alpha = \frac{3}{5} = 0,6$       d) sen  $\beta = \frac{4}{5} = 0,8$   
 b) cos  $\alpha = \frac{4}{5} = 0,8$       e) cos  $\beta = \frac{3}{5} = 0,6$   
 c) tg  $\alpha = \frac{3}{4} = 0,75$       f) tg  $\beta = \frac{4}{3} = 1,3\bar{3}$

6. Obtén con la calculadora:

- a) sen 30° = 0,5  
 b) cos 60° = 0,5  
 c) tg 45° = 1

7. Obtén con la calculadora los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  del ejercicio 5.

$$\alpha = 36,87^\circ$$

$$\beta = 53,13^\circ$$

Observa que en efecto suman 90°.

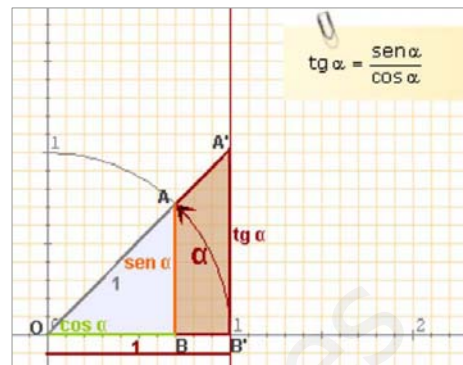
# Trigonometría

## 3. Relaciones fundamentales

Si se aplican la semejanza y el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos "básicos", es decir, con hipotenusa=1 o con cateto adyacente=1, se obtienen las relaciones fundamentales de la trigonometría:

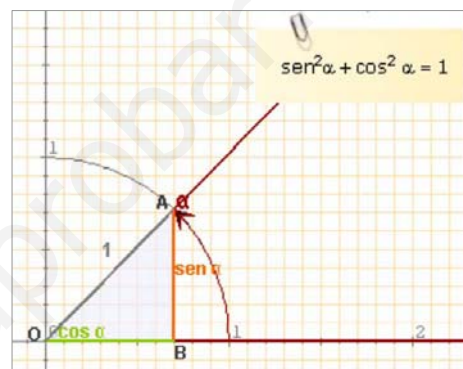
Los triángulos OBA y OB'A' son semejantes:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1} \quad \text{luego} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$



Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo OBA de la figura obtenemos:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

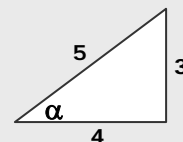


### EJERCICIOS resueltos

8. Comprueba en el ángulo  $\alpha$  del triángulo de la figura que se cumplen las relaciones fundamentales.

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} = \operatorname{tg} \alpha$$



9. Calcula el coseno y la tangente de un ángulo agudo  $\alpha$  tal que  $\operatorname{sen} \alpha = 0,3$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - 0,3^2 = 1 - 0,09 = 0,81 \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{0,81} = 0,9$$

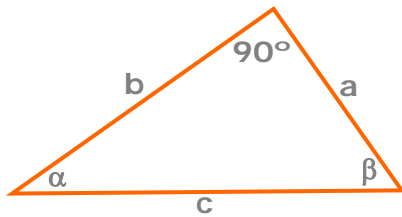
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,3}{0,9} = \frac{1}{3}$$

10. Comprueba que se cumple la relación:  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$



## 4. Resolución de triángulos rectángulos



Resolver un triángulo rectángulo es calcular los datos desconocidos, lados o ángulos, a partir de los conocidos.

Veamos los casos que se pueden presentar.

Calcular la altura del monte.

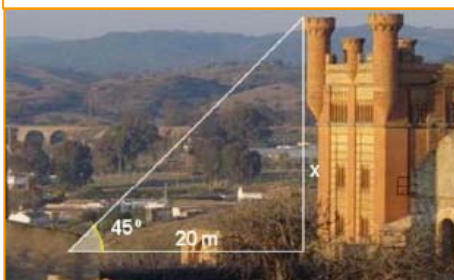


$$x = 650 \cdot \text{sen } 30^\circ = 650 \cdot 0,5 = 325$$

### a) Conocidos un ángulo y la hipotenusa

Para hallar los catetos de un triángulo rectángulo del que se conocen las medidas de la hipotenusa y de un ángulo agudo, buscamos la razón trigonométrica que involucra a esos dos datos y, como tercero, al que queremos calcular y despejamos.

Calcular la altura de la torre.

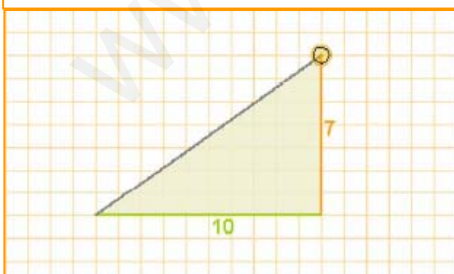


$$x = 20 \cdot \text{tg } 45^\circ = 20 \cdot 1 = 20\text{m}$$

### b) Conocidos un ángulo y un cateto

Para hallar los lados de un triángulo rectángulo del que se conocen las medidas un cateto y de un ángulo no recto, buscamos la razón trigonométrica que involucra a esos dos datos y, como tercero, al que queremos calcular y despejamos. Hay que tener cuidado pues, si queremos despejar un denominador tendremos que hacerlo en dos pasos.

Resolver el triángulo.



$$\text{hipotenusa} = \sqrt{7^2 + 10^2} = \sqrt{149}$$

Con la calculadora:  $\text{atan}(0,7) = 35^\circ$   
Y el otro ángulo:  $90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$

### c) Conocidos dos lados

Para hallar el otro lado del triángulo se aplicará el teorema de Pitágoras, el ángulo se determinará como

el arco cuya tangente es  $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$

o bien como el arco cuyo seno es  $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$

dependiendo de los datos iniciales.

Para calcular el otro ángulo basta restar de  $90^\circ$ .

# Trigonometría

## 5. Razones de cualquier ángulo

Recuerda que ( $\cos \alpha$ ,  $\text{sen } \alpha$ ) eran las **coordenadas** del punto final del ángulo  $\alpha$  en la circunferencia de radio unidad. Esto que vimos para los ángulos agudos podemos hacerlo extensible a ángulos cualesquiera.

### El seno

El seno de un ángulo es la coordenada **vertical** del punto final del recorrido del ángulo sobre la circunferencia goniométrica.

Observa que su valor está comprendido entre -1 y 1.

### El coseno

De la misma manera que el seno de un ángulo es la ordenada, el coseno es la **abscisa** del punto final del recorrido que marca el ángulo en la circunferencia.

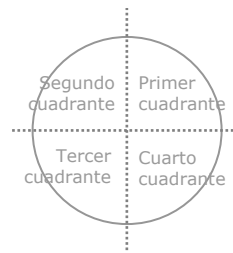
Su valor también está comprendido entre -1 y 1.

### La tangente

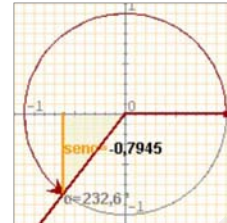
Con la relación fundamental  $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$  se amplía la definición de tangente en ángulos agudos a un ángulo cualquiera.

La tangente se representa en la recta tangente a la circunferencia goniométrica en el punto (1,0).

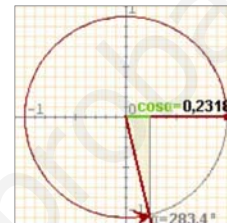
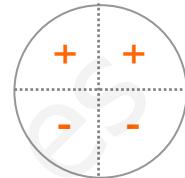
Para los ángulos de  $90^\circ$  y  $270^\circ$ , el coseno es 0 por lo que no está definida la tangente; cuanto más se acerca un ángulo a  $90^\circ$  o a  $270^\circ$ , mas grande se hace en valor absoluto la tangente, diremos que es infinito



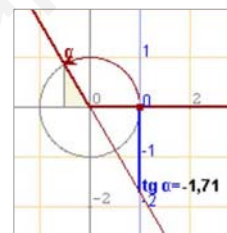
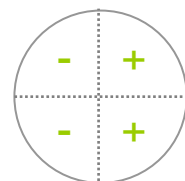
La circunferencia goniométrica es una circunferencia de radio unidad y centro el origen de coordenadas.



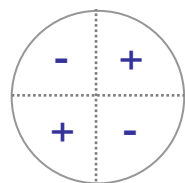
SIGNO DEL SENO



SIGNO DEL COSENO



SIGNO DE LA TANGENTE



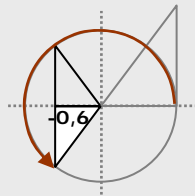
### EJERCICIOS resueltos

11. Dibuja un ángulo del tercer cuadrante cuyo cos sea -0,6 y calcula el seno y la tangente.

$$\text{sen}^2 \alpha = 1 - \text{cos}^2 \alpha = 1 - 0,36 = 0,64$$

$$\text{sen } \alpha = \pm \sqrt{0,64} = \pm 0,8 \text{ Como está en el tercer cuadrante será } -0,8$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{-0,8}{-0,6} = \frac{4}{3}$$



12. Calcula  $\text{cos } \alpha$  siendo  $\text{tg } \alpha = -2$  y  $\alpha$  del cuarto cuadrante.

$$1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\text{cos}^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\text{cos}^2 \alpha} = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \text{cos}^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\text{cos } \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{5}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ y elegimos el positivo ya que } \alpha \text{ está en el } 4^\circ \text{ cuadrante.}$$

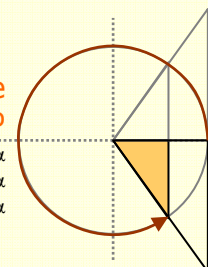
### Observa

#### Ángulos suplementarios

$$\begin{aligned} \text{sen}(180^\circ - \alpha) &= \text{sen } \alpha \\ \text{cos}(180^\circ - \alpha) &= -\text{cos } \alpha \\ \text{tg}(180^\circ - \alpha) &= -\text{tg } \alpha \end{aligned}$$

#### Ángulos que suman $360^\circ$

$$\begin{aligned} \text{sen}(360^\circ - \alpha) &= -\text{sen } \alpha \\ \text{cos}(360^\circ - \alpha) &= \text{cos } \alpha \\ \text{tg}(360^\circ - \alpha) &= -\text{tg } \alpha \end{aligned}$$



# Trigonometría

## 6. Resolver problemas métricos



La trigonometría es útil para resolver problemas geométricos y calcular longitudes en la realidad.

Con un teodolito como el de la fotografía, se pueden medir ángulos, tanto en el plano vertical como en el horizontal, que nos permiten, aplicando las razones trigonométricas, hallar distancias o calcular alturas de puntos inaccesibles.

En estos casos aunque el triángulo de partida no sea rectángulo, trazando su altura podemos obtener dos triángulos rectángulos a resolver con los datos que tenemos.

Veamos algunos ejemplos.

### Calcular áreas de polígonos regulares

Calcular el área de un pentágono regular de 25,2 cm de lado.

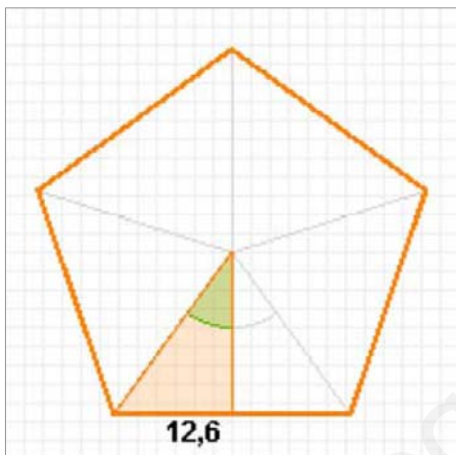
- ✓ El área de un polígono regular:  $\text{perímetro} \cdot \text{apotema} / 2$   
Como se trata de un pentágono el ángulo central mide:  
 $360^\circ / 5 = 72^\circ$

- ✓ Nos fijamos en el triángulo rectángulo de la figura en el que un cateto es la apotema y otro la mitad del lado. En este triángulo:

$$\operatorname{tg} 36^\circ = \frac{12,6}{a} \Rightarrow a = \frac{12,6}{\operatorname{tg} 36^\circ} = \frac{12,6}{0,72} = 17,34$$

Luego el área del pentágono es:

$$\text{Área} = \frac{25,2 \cdot 17,34}{2} = 1092,57 \text{ cm}^2$$



### Calcular medidas topográficas

Para medir la anchura de un río se han medido los ángulos de la figura desde dos puntos de una orilla distantes 160 m. ¿Qué anchura tiene el río?.

- ✓ La anchura del río es la altura del triángulo ACB que no es rectángulo, pero si lo son los triángulos ADC y BDC.

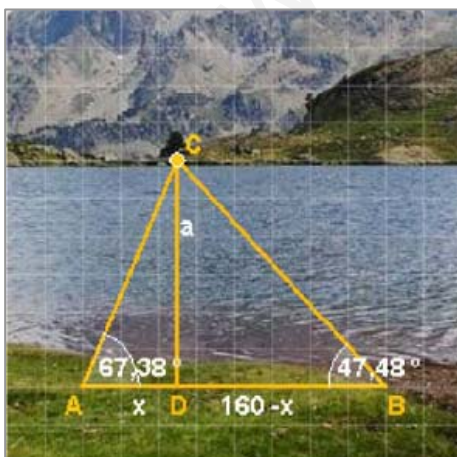
$$\text{En el triángulo ADC: } \operatorname{tg} 67,38^\circ = \frac{a}{x} \Rightarrow a = x \cdot \operatorname{tg} 67,38^\circ$$

$$\text{En el BDC: } \operatorname{tg} 47,48^\circ = \frac{a}{160 - x} \Rightarrow a = (160 - x) \operatorname{tg} 47,48^\circ$$

- ✓ Tenemos un sistema de dos ecuaciones que resolvemos por igualación:

$$\left. \begin{array}{l} a = 2,40x \\ a = 1,09(160 - x) \end{array} \right\} \Rightarrow 2,40x = 1,09(160 - x) \Rightarrow 3,49x = 174,40$$

$$x = \frac{174,40}{3,49} = 50 \Rightarrow a = 2,40 \cdot 50 = 120 \text{ m}$$

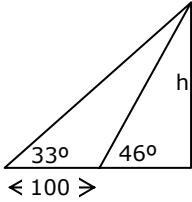
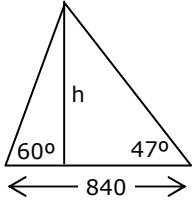




# Trigonometría



## Para practicar

- Expresa en radianes:
  - $15^\circ$
  - $120^\circ$
  - $240^\circ$
  - $345^\circ$
- Expresa en grados:
  - $\frac{\pi}{15}$
  - $\frac{3\pi}{10}$
  - $\frac{7\pi}{12}$
  - $\frac{11\pi}{6}$
- Halla con la calculadora las siguientes razones redondeando a centésimas:
  - $\sin 25^\circ$
  - $\cos 67^\circ$
  - $\operatorname{tg} 225^\circ$
  - $\operatorname{tg} 150^\circ$
- Un ángulo de un triángulo rectángulo mide  $47^\circ$  y el cateto opuesto 8 cm, halla la hipotenusa.
- La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 26 cm y un ángulo  $66^\circ$ . Calcula los catetos.
- Un ángulo de un triángulo rectángulo mide  $44^\circ$  y el cateto adyacente 16 cm, calcula el otro cateto.
- En un triángulo rectángulo los catetos miden 15 y 8 cm, halla los ángulos agudos.
- La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 45 cm y un cateto 27 cm, calcula los ángulos agudos.
- En un triángulo isósceles los ángulos iguales miden  $78^\circ$  y la altura 28 cm, halla el lado desigual.
- Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 41 cm y los ángulos iguales  $72^\circ$ , calcula el otro lado.
- El cos de un ángulo del primer cuadrante es  $3/4$ , calcula el seno del ángulo.
- La tangente de un ángulo del primer cuadrante es  $12/5$  calcula el seno.
- El  $\sin \alpha = 3/5$  y  $\alpha$  es un ángulo del segundo cuadrante, calcula la  $\operatorname{tg} \alpha$ .
- El  $\cos \alpha = 3/5$  y  $\alpha$  es un ángulo del cuarto cuadrante, calcula la  $\operatorname{tg} \alpha$ .
- La  $\operatorname{tg} \alpha = 3$  y  $\alpha$  es un ángulo del tercer cuadrante, calcula el  $\cos \alpha$ .
- La apotema de un polígono regular de 9 lados mide 15 cm, calcula el lado.
- El lado de un exágono regular mide 30 cm, calcula la apotema.
- La apotema de un octógono regular mide 8 cm, calcula el área del polígono.
- La longitud del radio de un pentágono regular es 15 cm. Calcula el área.
- La sombra de un árbol cuando los rayos del sol forman con la horizontal un ángulo de  $36^\circ$ , mide 11m. ¿Cuál es la altura del árbol?.
- El hilo de una cometa mide 50 m de largo y forma con la horizontal un ángulo de  $37^\circ$ , ¿a qué altura vuela la cometa?.
- Para medir la altura de un edificio se miden los ángulos de elevación desde dos puntos distantes 100m. ¿cuál es la altura si los ángulos son  $33^\circ$  y  $46^\circ$ ?.  

- Dos personas distantes entre sí 840 m, ven simultáneamente un avión con ángulos de elevación respectivos de  $60^\circ$  y  $47^\circ$ , ¿a qué altura vuela el avión?.  

- Para medir la altura de una montaña se miden los ángulos de elevación desde dos puntos distantes 480m y situados a 1200 m sobre el nivel del mar. ¿Cuál es la altura si los ángulos son  $45^\circ$  y  $76^\circ$ ?

# Trigonometría



**Recuerda lo más importante**

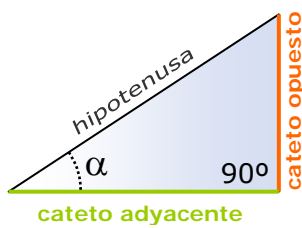
$$1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes} \quad \text{grados} \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}} \text{radianes}$$

$$\text{radianes} \xrightarrow{\times \frac{180}{\pi}} \text{grados} \quad 1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \text{ grados}$$

## Los ángulos y su medida

Para medir ángulos empleamos grados o radianes.

Un **radián** es el ángulo cuyo recorrido es igual al radio con que ha sido trazado.



- ✓ El **seno** es el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa.
- ✓ El **coseno** es el cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa.
- ✓ La **tangente** es el cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

## Razones trigonométricas

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

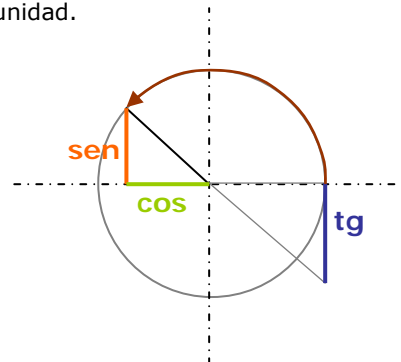
$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} \quad \text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

## Relaciones fundamentales

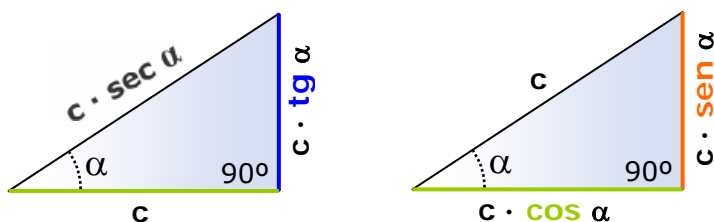


## Razones de ángulos cualesquiera

$(\text{cos } \alpha, \text{sen } \alpha)$  son las **coordenadas** del punto final del ángulo  $\alpha$  en la circunferencia goniométrica o de radio unidad.



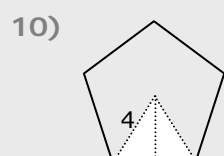
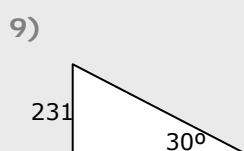
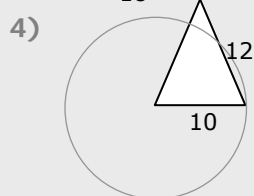
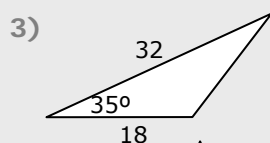
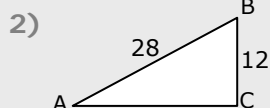
## SIGNO DE LAS RAZONES



**Resolver** un triángulo rectángulo consiste en hallar las medidas de sus seis elementos: tres lados y dos ángulos (el tercero es  $90^\circ$ ), conocidos un lado y un ángulo o dos lados.

# Trigonometría

## Repaso



1. Expresa en radianes el ángulo de  $150^\circ$ .
2. Calcula el valor de  $\operatorname{tg} A$  en el triángulo ABC de la figura.
3. Calcula el área del triángulo de la figura.
4. Con un compás de 12 cm de longitud hemos trazado una circunferencia de 10 cm de radio, ¿qué ángulo, en radianes, forman las ramas del compás?
5. Si  $\operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}$ , y  $\alpha$  es un ángulo agudo, calcula la  $\operatorname{tg} \alpha$ .
6. Si  $\operatorname{tg} \alpha = 1.25$  y  $\alpha$  está en el tercer cuadrante, calcula el  $\operatorname{cos} \alpha$ .
7. A partir de las razones del ángulo de  $30^\circ$ , calcula la  $\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ .
8. Si  $\operatorname{cos} \alpha = \frac{3}{5}$ , y  $\alpha$  es un ángulo agudo, calcula el  $\operatorname{cos}(180^\circ - \alpha)$ .
9. La altura de Torre España es de 231 m, ¿cuánto mide su sombra cuando la inclinación de los rayos del sol es de  $30^\circ$ ?
10. Calcula el área de un pentágono regular de radio 4 cm.

## Soluciones de los ejercicios para practicar

1. a)  $\frac{\pi}{12}$  b)  $\frac{2\pi}{3}$  c)  $\frac{4\pi}{3}$  d)  $\frac{23\pi}{12}$
2. a)  $12^\circ$  b)  $54^\circ$  c)  $105^\circ$  d)  $330^\circ$
3. a) 0,42 b) 0,39 c) 1 d) -0,58
4. 10,93 cm
5. 23,75 cm, 10,57 cm
6. 15,45 cm
7.  $28^\circ 4' 20''$   $61^\circ 55' 40''$
8.  $36^\circ 52' 11''$   $53^\circ 7' 49''$
9. 11,9 cm
10. 25,33 cm
11.  $\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$
12.  $\text{sen } \alpha = 12/13$
13.  $\text{tg } \alpha = -3/4$
14.  $\text{tg } \alpha = -4/3$
15.  $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$
16. 10,91 cm
17. 25,98 cm
18. lado=6,63 cm área=212,08 cm<sup>2</sup>
19. lado=17,63 cm apot=12,14 cm  
área=534,97 cm<sup>2</sup>
20. 7,99 m
21. 30 m
22. 57,41 m
23. 638,11 m
24.  $639,42+1200=1839,42$  m

## Soluciones REPASO

1.  $\frac{5\pi}{6}$
2. 0,47
3. 165,19 u<sup>2</sup>
4. 0,85 rad (truncamiento)
5.  $\text{tg } \alpha = 4/3$
6.  $\cos \alpha = -0,62$
7.  $\text{tg } \frac{-5\pi}{6} = \text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$
8.  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = -3/5$
9. 400,10 m
10. 38,04 m<sup>2</sup>