

Resumen de límites		
Definición de límite de f(x) en x=a	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$	Una función tiene límite en un punto si existen los límites laterales y son iguales
Límite infinito (Asíntotas verticales)	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \text{ o } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \text{ o } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$
Cálculo de límites en $-\infty$ (Truco para facilitar cálculos)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$	$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 6x + 1}{2x^2 - x - 9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{2x^2} = 2$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 6x + 1}{2x^2 + x - 9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4(-x)^2 - 6(-x) + 1}{2(-x)^2 + (-x) - 9} =$
Límite de la función exponencial	$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a^x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a^{-x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{a^x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a^{-x} = +\infty$
Límite de la función logarítmica	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$

Propiedades de los límites			
Suma y restas	Producto	Cociente	Constante
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$	$\lim_{x \rightarrow a} (Kf(x)) = K \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
<p>Operaciones con Infinito Sea k un número real cualquiera</p> <p>a) $\infty = +(+\infty) = -(-\infty)$ b) $-\infty = -(+\infty) = +(-\infty)$ c) $k + \infty = \infty$ d) $k - \infty = -\infty$ e) $\infty + \infty = \infty$ f) $-\infty - \infty = -\infty$</p>	<p>g) Si $k > 0$, $\begin{cases} k(\infty) = \infty \\ k(-\infty) = -\infty \end{cases}$ h) Si $k < 0$, $\begin{cases} k(\infty) = -\infty \\ k(-\infty) = \infty \end{cases}$ i) $\infty(\infty) = (-\infty)(-\infty) = \infty$ j) $(-\infty)\infty = \infty(-\infty) = \infty = -\infty$</p>	<p>k) $\frac{k}{0} = \infty$ l) $\frac{k}{\infty} = 0$ m) $\frac{\infty}{k} = \infty$ n) $\frac{0}{\infty} = 0$ o) $\frac{\infty}{0} = \infty$</p>	<p>p) $0^\infty = 0$ q) $\infty^\infty = \infty$ r) $0^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k > 0 \\ \infty & \text{si } k < 0 \end{cases}$ s) $k^\infty = \begin{cases} \infty & \text{si } k > 1 \\ 0 & \text{si } 0 < k < 1 \end{cases}$</p>
Potencia	Raíz	Composición	Función elevada a función
$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right]^n = L^n$	$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$	$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x))$	$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$
Indeterminaciones	Hay casos en los que no se puede aventurar el resultado de una operación entre límites.		
Son indeterminaciones	$\frac{k}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{0}{0}, \infty - \infty, 0(\pm\infty)$	$1^\infty, 0^0, 0^\infty$ (no las vemos)	

Cómo resolvemos algunas indeterminaciones			
$\frac{k}{0}$	Racionales (Son asíntotas verticales)	Estudiamos los límites laterales El resultado es siempre $\pm\infty$. Si coinciden el límite es $\pm\infty$. Si no coinciden diremos que la función no tiene límite. El signo depende de los signos que adopten numerador y denominador	$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x - 5}{x - 3} = \frac{2 \cdot 3^+ - 5}{3^+ - 3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x - 5}{x - 3} = \frac{2 \cdot 3^- - 5}{3^- - 3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$
$\infty - \infty$	Polinomios $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} ax^n + bx^{n-1} + \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} ax^n = \pm\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^3 - 6x^2 - 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^3 = +\infty$
$\frac{\infty}{\infty}$	Racionales $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ (Comparamos grados)	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ \pm\infty & \text{si } n > m \end{cases}$	<p>Ejemplo</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 5}{x^3 - 4x^2 + 7} = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x^2 - 7x + 1}{3x^2 + 2x + 4} = -\frac{5}{3}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - 3x}{-4x^2 + 1} = -\infty$
$\frac{\infty}{\infty}$	Irracionales $x \rightarrow \pm\infty$	Dividimos los polinomios por la x de mayor grado	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x + 6}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{5x}{x} + \frac{6}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{5x}{x^2} + \frac{6}{x^2}} + \frac{x}{x}}$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5 + \frac{6}{x}}{\sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} + 1}$ <p>Sol: -5/2</p>

$\infty - \infty$	Irracionales $x \rightarrow \pm\infty$	Multiplicamos y dividimos por el conjugado para llegar a la indeterminación ∞/∞ . Luego dividimos por la x de mayor grado	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + 1} - 3x) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{9x^2 + 1} - 3x)(\sqrt{9x^2 + 1} + 3x)}{(\sqrt{9x^2 + 1} + 3x)} : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{9x^2 + 1})^2 - (3x)^2}{(\sqrt{9x^2 + 1} + 3x)}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 + 1 - 9x^2}{(\sqrt{9x^2 + 1} + 3x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{9x^2 + 1} + 3x}$ <p style="text-align: right;">Sol x=0.</p>
Los conjugados de expresiones del tipo $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, $\sqrt{a} - b$, $a - \sqrt{b}$ son, respectivamente, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\sqrt{a} + b$, $a + \sqrt{b}$.			
Regla de L'Hôpital			
Sean f y g dos funciones derivables en un entorno de a, tal que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ presenta los casos de indeterminación $\frac{0}{0}$, $o \frac{\infty}{\infty}$, entonces se verifica: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (a puede ser $\pm\infty$)			
$\infty - \infty$		Se efectúa la suma o resta dentro del límite (mínimo común múltiplo), buscando una de estas dos indeterminaciones $\frac{0}{0}$, $o \frac{\infty}{\infty}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{L(1+x)} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - L(1+x)}{x \cdot L(1+x)}$ Pasamos de una indeterminación ($\infty - \infty$) a $\frac{0}{0}$ y podemos aplicar LH
$0 \cdot \infty$		$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{0}{0} \text{ o } \infty$ bien $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{1/f(x)} = \frac{\infty}{\infty}$	$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \cdot (-\infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1/x} = \frac{-\infty}{\infty} =$ $(L'H) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$

Ejercicios

- 1.- (2010/Junio/B/1) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} [(e^x - e^{\sin x}) / (x^2)]$ **Sol:0.**
- 2.- (2009/Junio/A/1) Calcula el siguiente límite $\lim_{x \rightarrow 1} [1/\ln(x) - 2/(x^2 - 1)]$ **Sol:1**
- 3.- (2006/M1/B/1) Calcula $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$ siendo Ln la función logaritmo neperiano. **Sol: 1/2.**
- 4.- Estudia el dominio y el límite en el infinito de esta función, $f(x) = \frac{x(\ln x)^2}{(x-1)^2}$
siendo Ln la función logaritmo. **Sol: en $+\infty$ vale 0.**
- 5.- (2003/septiembre) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x \cdot \sin x}$ **Sol: -1/2**
- 6.- (2000/septiembre) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x \sin(x)]}{\text{tg}(x^2)}$ **Sol: 1**
- 7.- Siendo Ln(x) el logaritmo neperiano de x, calcula $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right)$ **Sol:1/2**
- 8.- Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)\sin x}{x^3 - x^2}$ **Sol:-1**
- 9.- Calcula (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2}$ (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot e^{-3x}$ **Sol:a)1/2, b)0**
- 10.-Calcula a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{5x^2 - 2x - 3x}]$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{\sqrt{x^6 - 2x}}$ **a)- ∞ , b) 0**
- 11.-Calcula a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{e}{e^x - e} \right)$ Sol: 1/2 b) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$ Sol:0
- 12.-Calcula: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\text{tg } x - 8}{\sec x + 10}$ **Sol:1**
- 13.-Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\text{tg } x - \sin x}$ **Sol:1/3**

14.-Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}$ Sol:1/6

15.-Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(x - \ln(1+x))}{x \ln(1+x)}$ Sol.

16.-Calcula $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{tg} x$ Sol:-1

17.-Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\operatorname{sen}^2 x}$ Sol:0

18.-Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{sen} x)$ Sol:1

19.-Calcula: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x - 1) \operatorname{sec} 2x$ Sol: -1

20.-Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) \cdot \operatorname{sen}(x)$ Sol:0

21.- Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)$ Sol:0

22.-Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$ Sol:1/2

23.-Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x} - \sqrt{4x^2 - 3})$ Sol:1/2

24.-Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - (x + 2))$ Sol: -2

25.-Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 - 5x - 2x}) = \text{Sol: } -5/4$

Límites con parámetros.

26.- (2015/Junio/B/1)

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - \cos(x)}{\operatorname{sen}(x^2)}$ es finito e igual a 1, calcula los valores de a y b.

27.- (2014/Junio/A/1) Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - e^x + ax}{x \operatorname{sen}(x)}$ es finito, calcula a y el valor del límite.
Sol a=1; límite=-5.

28.- (2013/Junio/A/1) Sabiendo que el $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos(x) + b \cdot \operatorname{sen}(x)}{x^3}$ es finito, calcula b y el valor del límite.
Sol: b=-1; límite =-1/3.

29.- (2012/Junio/B/1) Sabiendo que el $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \operatorname{sen}(x) - x \cdot e^x}{x^2}$ es finito, calcula el valor de a y del límite.
Sol: a=1; límite =-1.

30.- (2005/M3/A/1) Se sabe que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \alpha \cdot \operatorname{sen}(x)}{x^2}$ es finito. Determina el valor de α y calcula el límite. Sol: $\alpha = 1$; límite =0.

31.- (2004/M5/B/1) Se sabe que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{a}{2x}\right)$ es finito. Determina el valor de a y calcula el límite. Sol: a=2; límite=-1/2

32.- (2001/Septiembre/B/1) Determina α sabiendo que existe y es finito el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + \alpha x}{x - \operatorname{sen} x}$
Calcula dicho límite Sol: $\alpha = -2$; Límite=2

33.- Hallar a para que: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax + 1} - x) = 2$ Sol: a=4

34.- Calcular a para que el límite sea 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1 - ax}{x^2}$ Sol: a=-4