

• FUNCIONES LINEALES.

Se llaman funciones lineales a aquellas que se representan mediante rectas. Su expresión en forma explícita es $y = f(x) = ax + b$.

En sentido más estricto, se llaman funciones lineales sólo a las funciones que se representan mediante rectas que pasan por el origen de coordenadas y su forma explícita será $y = ax$.

Las de la forma $y = ax + b$ recibirían el nombre de funciones afines.

Nosotros seguiremos llamando funciones lineales a las primeras, dejando para las del tipo $y = ax$ el nombre de funciones de proporcionalidad ya que $\frac{y}{x} = a$, es decir, la relación entre la imagen y el original es constante.

El dominio y el recorrido de cualquier función lineal es el conjunto de números reales:

$$Dom(f) = \mathbb{R} \quad Im(f) = \mathbb{R}$$

La gran importancia de las funciones lineales nos viene dada por la gran cantidad de aplicaciones de ella:

- ★ El alargamiento de un muelle es proporcional al peso que colguemos: $A = k \cdot p$
- ★ La relación entre la dilatación y la temperatura de un cuerpo.
- ★ Dosis de un medicamento-peso del enfermo.

• FUNCIONES CUADRÁTICAS (PARÁBOLAS).

Son funciones en las que la imagen nos viene dada mediante un polinomio de segundo grado: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ y su gráfica es una parábola.

El dominio de la función cuadrática es el conjunto de números reales.

Partiendo de la gráfica de la función cuadrática más elemental ($y = x^2$) el efecto de cada uno de los coeficientes es el siguiente:

- El coeficiente “ a ” de x^2 determina que la curva sea más o menos estirada y su signo, que la parábola tenga las ramas hacia arriba (a positivo) o hacia abajo (a negativo).

Si $a > 1$, las ramas se cierran respecto de $y = x^2$. ___

Si $0 < a < 1$, las ramas se abren respecto de $y = x^2$.

- El coeficiente c hace que la curva suba o baje.
- El coeficiente b ” desplaza la gráfica hacia la derecha (b negativo) o hacia la izquierda (b positivo).
- El vértice de la parábola lo podemos calcular fácilmente mediante derivación, resolviendo la ecuación $y' = 0 \Rightarrow 2ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$.

• FUNCIONES POLINÓMICAS (de grado superior a dos).

Están definidas de la forma: $y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$

Todas ellas tienen en común las siguientes características:

- Su dominio es el conjunto de números reales y son continuas en él.
- No tienen asíntotas, es decir: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ según sea el coeficiente del término de mayor grado y la paridad de éste.
- Los puntos de corte con el eje OX (ceros de la función) los obtenemos resolviendo la ecuación $f(x) = 0$.
- Los puntos críticos los obtenemos de la siguiente manera:
 - * $f'(x) = 0 \Rightarrow$ máximos y mínimos relativos.
 - * $f''(x) = 0 \Rightarrow$ puntos de inflexión.

Una vez que hayamos obtenido las abscisas de los puntos críticos, sustituimos en la función para calcular las ordenadas correspondientes y poder representarlos.

• FUNCIONES RACIONALES.

Son funciones definidas mediante el cociente de dos funciones polinómicas: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinómicas.

El dominio de una función racional del tipo $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios, es \mathbb{R} menos los puntos que anulan el denominador, ya que tanto $P(x)$ como $Q(x)$ tienen existencia para cualquier valor real pero al dividirlos encontramos el inconveniente de no poder dividir por cero. En consecuencia, los valores de x que anulen el denominador no tendrán imagen y no pertenecerán al dominio de la función.

$$Dom(f) = \{ x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0 \} = \mathbb{R} - \{ x \in \mathbb{R} / Q(x) = 0 \}$$

• FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

Hay multitud de fenómenos que ligan dos variables cuya relación es de proporcionalidad inversa (una es inversa de la otra) como sucede con la presión y el volumen a temperatura constante, con la frecuencia de un sonido y su longitud de onda.

Veamos como está definida la función de proporcionalidad inversa y cual es su gráfica.

Se llama función de proporcionalidad inversa a la función definida de la forma:

$$y = f(x) = \frac{k}{x} = k \cdot \frac{1}{x}$$

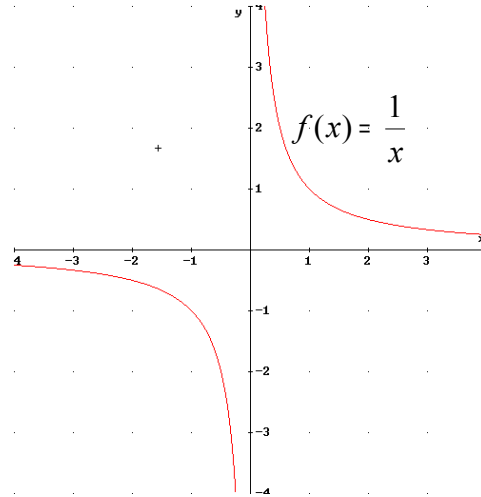
Si tratamos de calcular su gráfica, podemos observar que la función $\frac{1}{x}$ no está definida en el punto $x = 0$ y además

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Estudiando el comportamiento de la función en los extremos de la recta real, tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^- \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

En consecuencia, la gráfica será tangente a la recta $y = 0$ (eje OX) en el infinito (+ o -). Este tipo de rectas reciben el nombre de **asíntotas** (las estudiaremos posteriormente) y como es paralela al eje OX se denominan **horizontales**. Con ello la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ será de la forma:

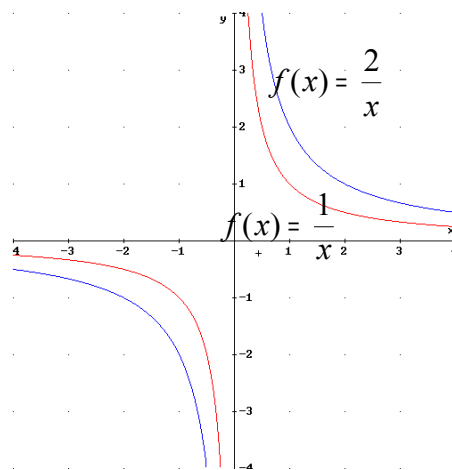


Esta gráfica recibe el nombre de **HIPÉRBOLA**.

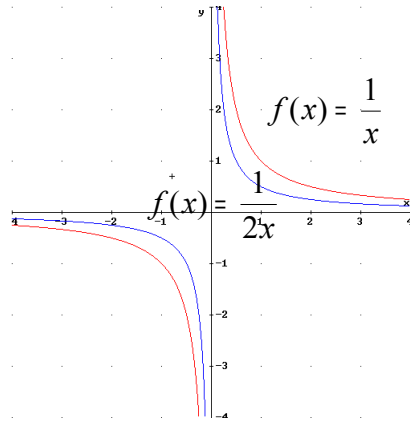
Si queremos representar $f(x) = \frac{k}{x}$, las características que hemos estudiado son las mismas; únicamente debemos tener en cuenta lo siguiente:

Si $k > 0$ podemos establecer:

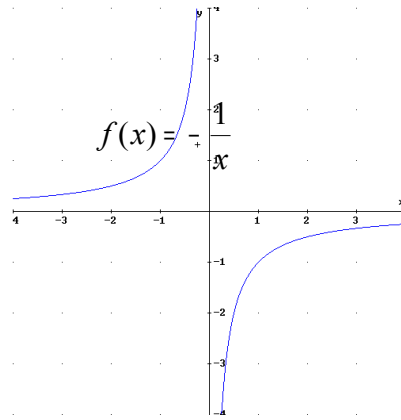
- $k > 1 \Rightarrow$ la gráfica se aleja del origen de coordenadas. Por ejemplo, si $k = 2$, la función nos queda $f(x) = \frac{2}{x}$ y su gráfica sería



- $0 < k < 1 \Rightarrow$ la gráfica se aproxima al origen de coordenadas. Por ejemplo, si $k = 1/2$, la función nos queda $f(x) = \frac{1}{2x}$ y su gráfica sería



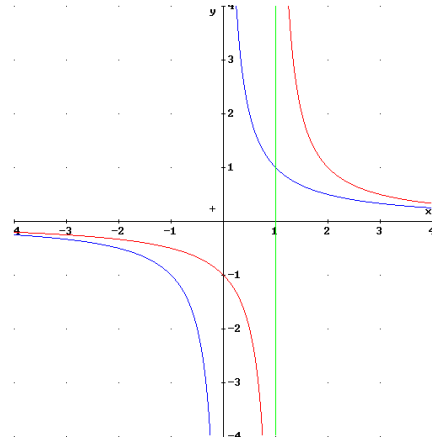
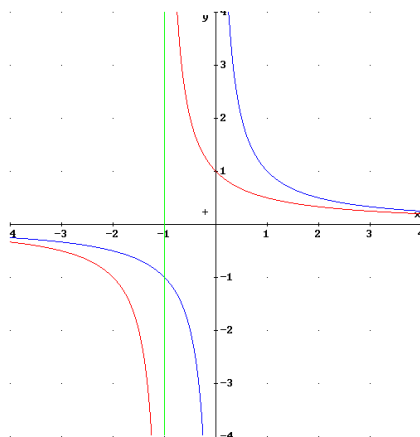
Si $k < 0$, los límites cambian de signo y obtenemos la función opuesta de la anterior:



Podemos observar que las funciones de proporcionalidad inversa son funciones impares o simétricas respecto del origen.

Otras funciones relacionadas con la función de proporcionalidad inversa son:

- $f(x) = \frac{k}{x \pm r} \Rightarrow$ el $\pm r$ desplaza la gráfica de la función $\frac{k}{x}$ hacia la izquierda ($+ r$) o hacia la derecha ($- r$). Por ejemplo, las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{1}{x+1}$ y $g(x) = \frac{1}{x-1}$ serían:

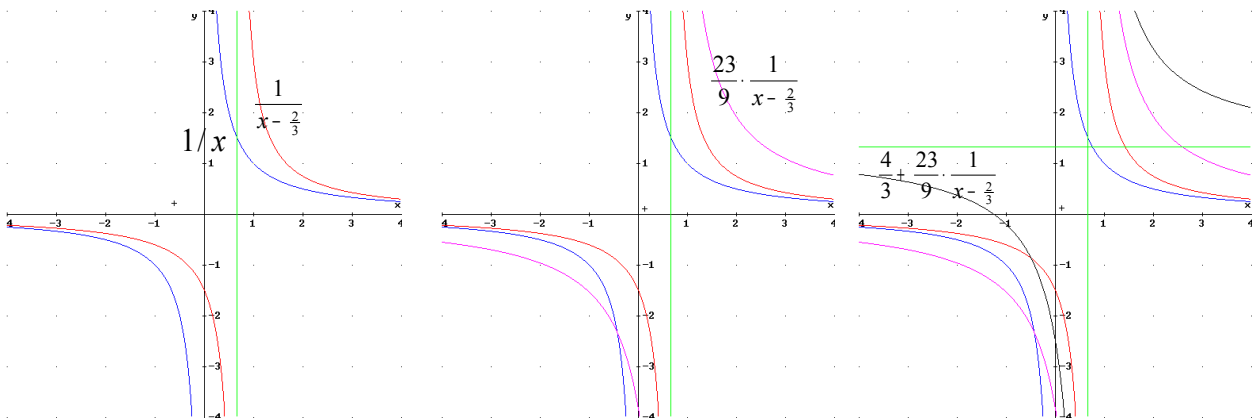


- $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow$ las funciones de este tipo se pueden convertir, efectuando la división, en $f(x) = p + \frac{q}{x \pm r}$: $\frac{q}{x \pm r}$ es del tipo anterior y “p” sube o baja la gráfica de la función según sea positivo o negativo.

- Ejemplo: La función $f(x) = \frac{4x+5}{3x-2}$ se puede expresar de la forma :

$$f(x) = \frac{4x+5}{3x-2} = \frac{4}{3} + \frac{\frac{23}{3}}{3x-2} = \frac{4}{3} + \frac{\frac{23}{9}}{x-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3} + \frac{23}{9} \cdot \frac{1}{x-\frac{2}{3}}$$

Entonces, la gráfica de f partiendo de $\frac{1}{x}$:



Las gráficas de estas funciones también son **HIPÉRBOLAS**.

• FUNCIONES RADICALES.

Son funciones donde la variable se encuentra bajo el signo radical (dentro de una raíz).

El dominio de estas funciones dependerá del índice de dicha raíz:

- Si el índice es par, el dominio es el conjunto de puntos que hace el radicando positivo.
- Si el índice es impar, el dominio de nuestra función será el mismo de la función que tengamos en el radicando.

• FUNCIÓN EXPONENCIAL.

Definimos la función exponencial en base $a > 0$ y $a \neq 1$ como una función real de variable real tal que a cada $x \in \mathbb{R}$ le hacemos corresponder otro número real dado por a^x , es decir:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{\text{exp}_a} \mathbb{R}_+^* \\ x \in \mathbb{R} &\longrightarrow y = a^x \end{aligned}$$

Propiedades:

- El dominio de la función exponencial es \mathbb{R} y su recorrido es \mathbb{R}_+^*

- Es continua en todo su dominio.
- Se verifica que $f(0) = 1$ y $f(1) = a$ para cualquier $a > 0$.
- Si $a > 1$, f es estrictamente creciente.

Si $a < 1$, f es estrictamente decreciente.

Esto nos indica que la función exponencial es inyectiva, cualquiera que sea la base.

- Si $a > 1$, se verifica que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0^+$$

- Si $a < 1$, se verifica que:

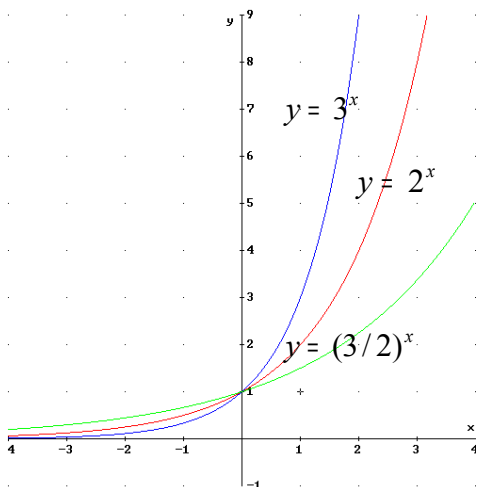
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

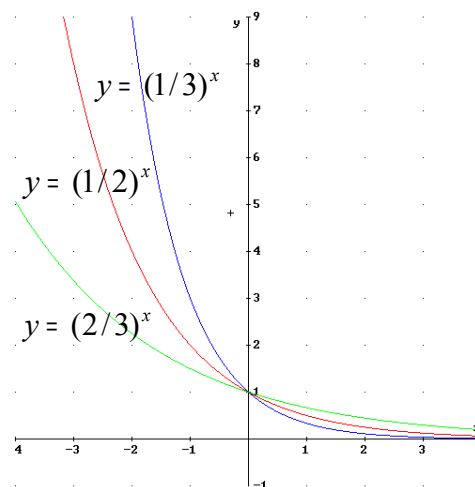
- Si $a = 1$, tenemos $f(x) = 1^x = 1$: nos queda la función unidad (constante).

- Su gráfica nos quedaría de la forma:

Si $a > 1$

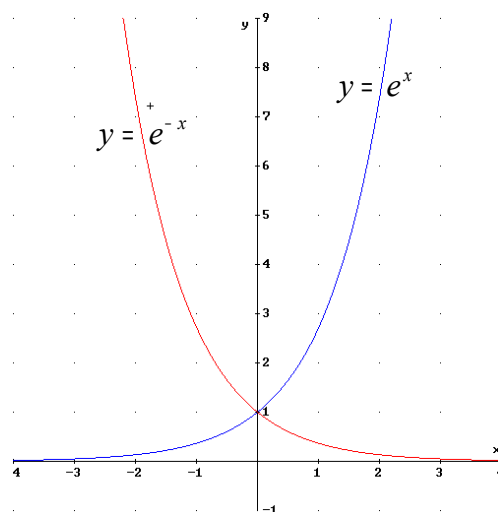


Si $0 < a < 1$



- Las gráficas de $f(x) = a^x$ y $f(x) = (1/a)^x$ son simétricas respecto del eje OY .

Si dibujáramos las gráficas de dos funciones exponenciales cuyas bases sean inversas obtendríamos



• FUNCIONES CIRCULARES.

Son funciones que están definidas mediante las razones trigonométricas de los ángulos:

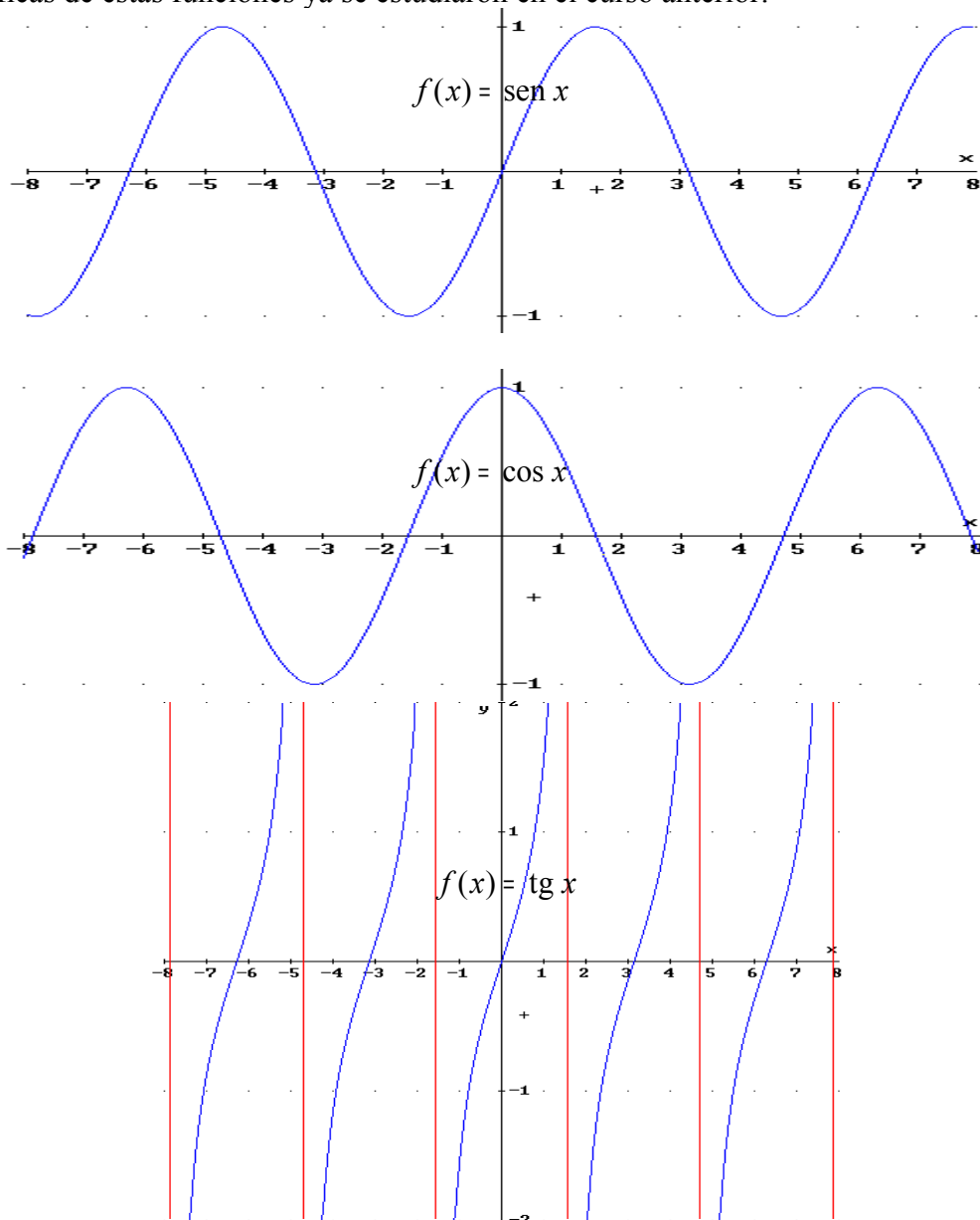
$$f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow \text{función seno}$$

$$f(x) = \operatorname{cos} x \Rightarrow \text{función coseno}$$

$$f(x) = \operatorname{tg} x \Rightarrow \text{función tangente}$$

Son funciones periódicas de período $T = 2\pi$ salvo las funciones tangente y cotangente que tienen de período π . Son continuas y derivables en todo su dominio.

Las gráficas de estas funciones ya se estudiaron en el curso anterior:



Podríamos generalizar estas funciones a

$$f(x) = \operatorname{sen}(ax + b)$$

$$f(x) = \operatorname{cos}(ax + b)$$

teniendo ellas las siguientes características:

- Están definidas y son continuas en \mathbb{R} .
- Su recorrido es el intervalo cerrado $[-1,1]$, por lo que están acotadas.
- Su período es $T = \frac{2\pi}{a}$: el efecto que produce el coeficiente a es el de comprimir o estirar la gráfica de dichas funciones.
- El coeficiente b desplaza la gráfica a izquierda o derecha.

▪ **FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS.**

Son funciones en las que en cada tramo (intervalo) están definidas mediante una función cualquiera.

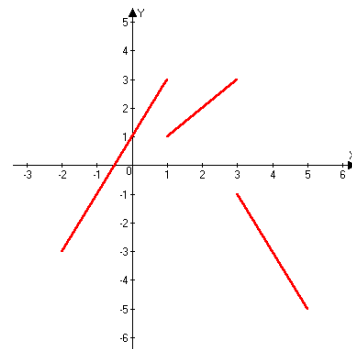
Para definir este tipo de funciones es imprescindible indicar el tramo o intervalo que corresponde a cada función.

Para representar gráficamente las funciones definidas a trozos, tendremos que representar en cada trozo la función mediante la que esté definida.

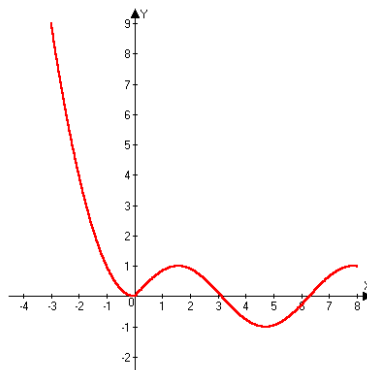
Ejemplos:

$$a) f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ x & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 3 - 2x & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Su dominio será el intervalo cerrado $[-2,5]$ y su gráfica sería



$$b) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ \text{sen } x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} \text{ y su gráfica:}$$



Veamos algunas funciones conocidas definidas a trozos:

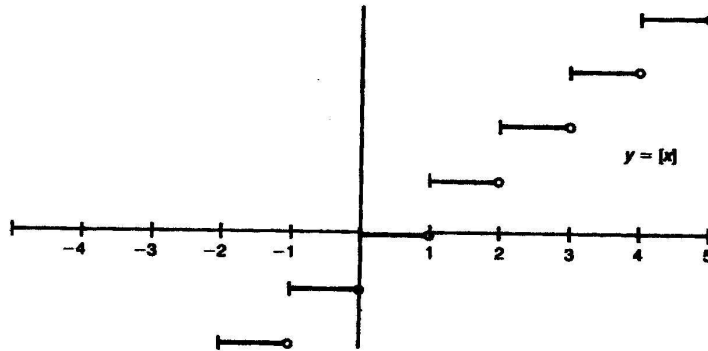
▫ **Función PARTE ENTERA de un número.**

Es una función entera de variable real definida de la siguiente forma:

$$y = f(x) = Ent(x) = [x]$$

parte entera de un número real x es el mayor entero menor o igual que x .

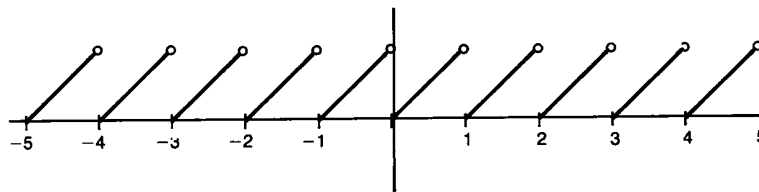
Su **gráfica**, teniendo en cuenta la definición, es la siguiente:



• **Función PARTE DECIMAL o MANTISA.**

Está definida por $y = f(x) = Dec(x) = Mant(x) = x - [x]$

Su gráfica nos viene dada por:



Como podemos observar en la gráfica, se trata de una función periódica, de período $T=1$. Esta función parte decimal nos da la distancia de un número al entero más próximo.

▪ **Función VALOR ABSOLUTO.**

El valor absoluto de un número real se define como el máximo entre dicho número y su opuesto:

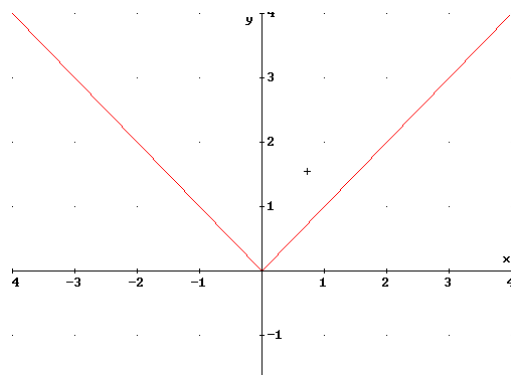
$$|x| = \max \{x, -x\}$$

De esta manera el valor absoluto de un número siempre será positivo: si el número es negativo, su valor absoluto es igual a su opuesto y si es positivo, el valor absoluto coincide con el propio número.

La función **valor absoluto** es una función real de variable real en la que a cada número le hacemos corresponder su valor absoluto. Nos queda definida de la siguiente forma:

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Su gráfica será:

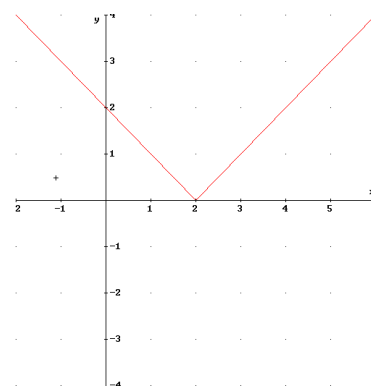
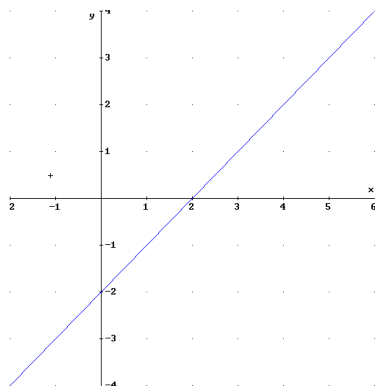


La gráfica de una función $y = |f(x)|$ es fácil de construir si conocemos la gráfica de la función $y = f(x)$, pues bastaría considerar la función opuesta donde $f(x)$ fuese negativa.

Para obtener la expresión analítica de $y = |f(x)|$ debemos conocer las abscisas de los puntos en donde $f(x)$ cambia de signo, es decir, donde $f(x) = 0$.

Ejemplo:

$$\bullet \quad y = f(x) = |x - 2| = \begin{cases} -(x - 2) & \text{si } x - 2 < 0 \\ x - 2 & \text{si } x - 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$



$$\bullet \quad y = f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

ya que la función $x^2 - 1$ se anula en los puntos -1 y 1 siendo negativa en los valores comprendidos entre ellos.

Gráficamente:

