Problemas de continuidad y límites resueltos

Razona de manera justificada el dominio de la siguientes funciones.

a) $f(x)=\ln(\sqrt{x}-1)$

b) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{(x-2)(x-3)}}$

c) $f(x)=\dfrac{x}{\cos(x)}$

a) La raíz cuadrada solo admite discriminantes nulos o positivos. Mientras que el logaritmo solo admite argumentos positivos. Por lo tanto:

$$Dom(\sqrt{x}-1)=\mathbb{R}^{+}\cup\{0\} \quad\rightarrow\quad Dom(\ln(\sqrt{x}-1))=(1,+\infty)$$

b) La raíz cuadrada solo admite discriminantes nulos o positivos. Y un cociente de polinomios no está definido en aquellos puntos que anulan el denominador. Por lo tanto:

$$Dom\left(\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}\right)=\mathbb{R}-\{2,3\}$$

$$\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}\geq 0 \quad si \quad x\geq 1 \quad y \quad x\notin[2,3] \quad\rightarrow\quad Dom\left(\sqrt{\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}}\right)$$ = [1, 2) U (3, $+\infty$)

c) La función coseno se anula periódicamente en $x=\ldots,\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\ldots$. Por lo tanto:

$$Dom\left(\frac{x}{\cos(x)}\right)=\mathbb{R}-(2k+1)\frac{\pi}{2},\quad k\in\mathbb{Z}$$

Estudia la continuidad de la siguiente función en los puntos $x=1$ y $x=5$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & si \quad x<1\\ 2x-4 & si \quad 1\leq x\leq 5\\ \ln(x-5) & si \quad x>5\end{cases}$$

Estudiemos la continuidad en $x=1$.

$$\exists f(1)=2\cdot 1-4=-2$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-4x+3}{x-1}=\frac{0}{0} \quad\rightarrow\quad \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-4x+3}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x-3)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x-3)=-2$$

$$\lim_{x\to 1^+}(2x-4)=-2$$

$$f(1)=-2=L$$

La función es continua en $x=1$.

Estudiemos la continuidad en $x=5$.

$$\exists f(5)=2\cdot 5-4=6$$

$$\lim_{x\to 5^-}(2x-4)=6$$

$$\lim_{x\to 5^+}\ln(x-5)=-\infty$$

La función presenta una discontinuidad no evitable de salto infinito en $x=5$.

Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2}$

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \dfrac{\infty-\infty}{\infty}$ → Indeterminación

Multiplicamos y dividimos por conjugado del numerador.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x-x-1}{x+x+1+2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{-1}{2x+1+2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{0} = \infty$ → Estudiamos límites laterales

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Sea la función $f(x) = a + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$ **, donde** a, b **y** c **son números reales. Calcula los valores de** a, b **y** c **sabiendo que** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ **, la gráfica de** $f(x)$ **corta al eje** OY **en el punto de ordenada** $y=2$ **y que la gráfica pasa por el punto** $(1, \frac{3}{2})$ **.**

Expresamos la función como una única fracción.

$$f(x) = \frac{ax^2+bx+a+c}{x^2+1}$$

Interpretamos analíticamente cada una de las frases del enunciado.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3 \quad \to \quad \lim_{x \to \infty} \frac{ax^2+bx+a+c}{x^2+1} = \frac{a}{1} = a \quad \to \quad a = 3$$

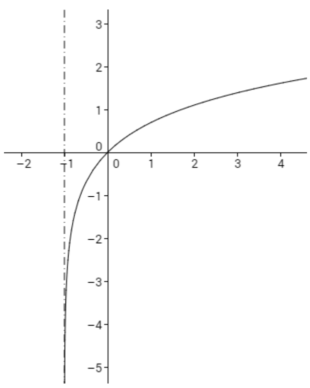
$$Corte \;\; eje \;\; OY \;\; en \;\; y=2 \quad \to \quad f(0)=2 \quad \to \quad \frac{a+c}{1}=2 \quad \to \quad \frac{3+c}{1}=2 \quad \to \quad c=-1$$

$$f(x) \;\; pasa \;\; por \;\; (1, \frac{3}{2}) \quad \to \quad f(1) = \frac{3}{2} \quad \to \quad \frac{a+b+a+c}{1+1} = \frac{3}{2} \quad \to \quad \frac{b+5}{2} = \frac{3}{2} \quad \to \quad b=-2$$

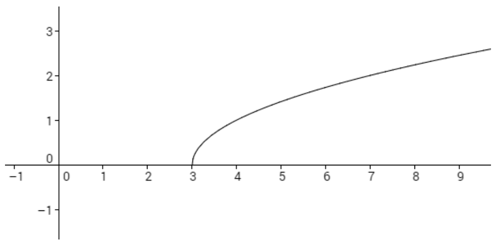
Relaciona de manera justificada las siguientes funciones con sus respectivas gráficas. Debes razonar con el máximo detalle posible.

- $f(x)=\ln(x+1)$
- $g(x)=\dfrac{x}{x-1}$
- $h(x)=\sqrt{x-3}$

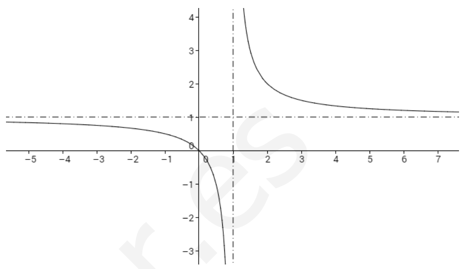
a)



b)



c)



$f(x)=\ln(x+1)$ se corresponde con la gráfica ***a)*** ya que la función está definida siempre que el argumento del logaritmo sea positivo, por lo que presenta una asíntota vertical para valores a la derecha de $x=-1$.

Además, la función logaritmo es una función estrictamente creciente y se dispara a infinito cuando $x\to\infty$.

Por último si $x=0$ $\rightarrow$ $f(0)=\ln(0+1)=0$ → La función corta a los ejes cartesianos en el origen de coordenadas $(0,0)$.

$g(x)=\dfrac{x}{x-1}$ se corresponde con la gráfica **c)**, ya que posee una asíntota vertical en $x=1$ (donde no está definida la función, por anularse el denominador) y una asíntota horizontal en $y=1$ que se corresponde con el límite $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$.

Además, la gráfica corta a los ejes cartesianos en el origen de coordenadas $(0,0)$, que se corresponde con el valor $g(0)=0$.

$h(x)=\sqrt{x-3}$ se corresponde con la gráfica b), ya que la función no está definida para discriminantes negativos, por lo que su dominio es $x\geq 3$.

Además, la función raíz cuadrada es estrictamente creciente y se dispara a infinito cuando $x\to\infty$.

Sea $f(x)=\frac{x^2-7x+10}{x^2-4x-5}$ **.**

a) Estudia la continuidad en $x=-1$ **y en** $x=5$ **.**

b) Calcula $\lim_{x\to\infty} f(x)$

Estudiemos la continuidad de la función en $x=-1$.

$\nexists f(-1)$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-7x+10}{x^2-4x-5}=\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-7x+10}{(x+1)(x-5)}=\frac{18}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-7x+10}{x^2-4x-5}=\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-7x+10}{(x+1)(x-5)}=\frac{18}{0^-}=-\infty$$

Discontinuidad no evitable de primera especie de salto infinito en $x=-1$.

Estudiemos la continuidad de la función en $x=5$.

$\nexists f(5)$

$$\lim_{x\to 5^-}\frac{x^2-7x+10}{x^2-4x-5}=\lim_{x\to 5^-}\frac{(x-2)(x-5)}{(x+1)(x-5)}=\lim_{x\to 5^-}\frac{x-2}{x+1}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{x^2-7x+10}{x^2-4x-5}=\frac{1}{2}$$

Discontinuidad evitable en $x=5$.

b) $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$

Ya que tenemos un cociente de polinomios de grado dos, donde los coeficientes que acompañan a x^2 en el numerador y en el denominador es 1 .

Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to\infty}(3x-5\sqrt{x})$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}-\frac{2+x}{1+x}\right)$

a) $\lim_{x\to\infty}(3x-5\sqrt{x})=\infty-\infty$ → Indeterminación

Multiplicamos y dividimos por el conjugado.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x-5\sqrt{x})(3x+5\sqrt{x})}{3x+5\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2-25x}{3x+5\sqrt{x}}=\infty$$

El límite en el infinito va a infinito por tener un cociente de polinomios, con el grado del numerador mayor que el grado del denominador.

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}-\frac{2+x}{1+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)-\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+x}{1+x}\right)=1-1=0$

El límite de la diferencia es la diferencia de los límites. Y en cada término tenemos un cociente de polinomios del mismo grado en numerador y denominador.

Determina a y b para que la función sea continua en $x=0$ y en $x=3$.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si \quad x<0 \\ a\,x+b & si \quad 0\leq x\leq 3 \\ \dfrac{x^2-9}{x-3} & si \quad x>3 \end{cases}$$

La función es continua en $x=0$ si se cumplen los siguientes requisitos.

$\exists f(0)=a\cdot 0+b=b$

$\lim\limits_{x \to 0^-} (x^2+1)=0+1=1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} (a\,x+b)=b$

Límites laterales iguales → $b=1$ → Existe el límite y vale $L=1$

$f(0)=1=L$

La función es continua en $x=3$ si se cumplen los siguientes requisitos.

$\exists f(3)=a\cdot 3+b=3\,a+1$

$\lim\limits_{x \to 3^-} (a\,x+b)=3\,a+1$

$\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{(x+3)(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x \to 3^+} (x+3)=6$

Límites laterales iguales → $3\,a+1=6$ → $a=\dfrac{5}{3}$

$f(3)=6=L$

Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x)=1+\sqrt{\dfrac{3-x}{5-x}}$

b) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(2\,x+3)}}$

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2\,x}{x-1} & si \quad x\leq 0 \\ \sqrt{2\,x+1} & si \quad x>0 \end{cases}$

a) $f(x)=1+\sqrt{\dfrac{3-x}{5-x}}$

El argumento de la raíz debe ser mayor o igual a cero. Además, el denominador de la fracción no puede anularse.

$\dfrac{3-x}{5-x}\geq 0$ → Raíz del numerador $x=3$; Raíz del denominador $x=5$

Evaluamos la inecuación en los siguientes intervalos.

$(-\infty, 3) \rightarrow x=0 \rightarrow \frac{3}{5}>0$ → Intervalo perteneciente al dominio

$(3,5) \rightarrow x=4 \rightarrow \frac{3-4}{5-4}<0$ → Intervalo no perteneciente al dominio

$(5,\infty) \rightarrow x=10 \rightarrow \frac{3-10}{5-10}>0$ → Intervalo perteneciente al dominio

La solución será la unión de los intervalos permitidos, además de las raíces del numerador. Es decir:

$Dom(f)$ = (- ∞ , 3] U (5 , ∞)

b) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(x-1)(2x+3)}}$

Nuevamente imponemos la condición de que el argumento de la raíz no pueda anularse. Y tampoco puede ser cero, ya que la raíz está dividiendo en la fracción.

$(x+1)(2x+3)>0$ → Raíces $x=-1$, $x=\frac{-3}{2}$

Evaluamos el argumento en los siguientes intervalos.

$(-\infty,-\frac{3}{2}) \rightarrow x=-10 \rightarrow (-10+1)(2(-10)+3)>0$ → intervalo perteneciente al dominio

$(\frac{-3}{2},-1) \rightarrow x=\frac{-5}{4} \rightarrow (\frac{-5}{4}+1)(2(\frac{-5}{4})+3)<0$ → intervalo no perteneciente al dominio

$(-1,\infty) \rightarrow x=0 \rightarrow (0+1)(2(0)+3)>0$ → intervalo perteneciente al dominio

Solución final → $Dom(f)=(-\infty,-\frac{3}{2})\cup(-1,\infty)$

c) $f(x)=\left\{\begin{matrix} \frac{2x}{x-1} & si \quad x\leq 0 \\ \sqrt{2x+1} & si \quad x>0 \end{matrix}\right\}$

Debemos estudiar el dominio de la función en cada tramo, además de la continuidad en el punto frontera.

Para $x<0 \rightarrow f(x)=\frac{2x}{x-1}$ es una función continua salvo en $x=1$. Pero ese valor no pertenece al intervalo $x<0$ → La función es continua para todo valor $x<0$.

Para $x>0 \rightarrow f(x)=\sqrt{2x+1}$ es una función con discriminante positivo, ya que para $x>0$ el argumento $2x+1$ siempre es positivo → La función es continua para todo valor $x>0$.

Debemos estudiar la continuidad en el punto frontera $x=0$, aplicando las tres condiciones de continuidad de una función en un punto.

$$\exists f(0)=\frac{0}{0-1}=0$$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{x-1}=0$, $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{2x+1}=1$ → Los límites laterales no coinciden

La función no continua en $x=0$ → $Dom(f)=\mathbb{R}-\{0\}$

4. Realiza la composición $(f\circ g)(x)$ y $(g\circ f)(x)$ de la siguiente pareja de funciones.

a) $f(x)=\frac{1}{x}$ **,** $g(x)=\frac{1}{x-2}$

b) $f(x)=x^2-x-2$ **,** $g(x)=\sqrt{2x-4}$

c) $f(x)=\frac{x+3}{x-3}$ **,** $g(x)=\frac{x^2-1}{x}$

a) $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x-2}$

$$(f\circ g)(x)=f\left(\frac{1}{x-2}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x-2}}=x-2 \quad , \quad (g\circ f)(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x}-2}=\frac{x}{1-2x}$$

b) $f(x)=x^2-x-2$, $g(x)=\sqrt{2x-4}$

$$(f\circ g)(x)=f(\sqrt{2x-4})=(\sqrt{2x-4})^2-\sqrt{2x-4}-2=2x-4-\sqrt{2x-4}-2=2x-\sqrt{2x-4}-6$$

$$(g\circ f)(x)=g(x^2-x-2)=\sqrt{2(x^2-x-2)-4}=\sqrt{2x^2-2x-8}$$

c) $f(x)=\frac{x+3}{x-3}$, $g(x)=\frac{x^2-1}{x}$

$$(f\circ g)(x)=f\left(\frac{x^2-1}{x}\right)=\frac{\frac{x^2-1}{x}+3}{\frac{x^2-1}{x}-3}=\frac{x^2+3x-1}{x^2-3x-1}$$

$$(g\circ f)(x)=g\left(\frac{x+3}{x-3}\right)=\frac{\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^2-1}{\frac{x+3}{x-3}}=\frac{\frac{(x+3)^2-(x-3)^2}{(x-3)^2}}{\frac{x+3}{x-3}}=\frac{12x}{(x-3)(x+3)}=\frac{12x}{x^2-9}$$

Rompe a trozos la función $f(x)=|x^2+1|+|x-1|$

Obtenemos las raíces de los polinomios de cada argumento de los valores absolutos.

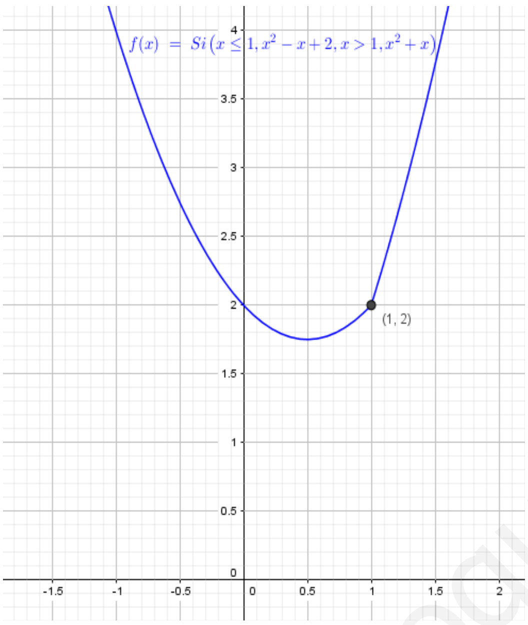
$$x^2+1=0 \rightarrow \nexists\, solución \in \mathbb{R} \rightarrow x^2+1>0\ \forall\, x\in\mathbb{R}$$

Por lo tanto, podemos quitar las barras de valor absoluto de $|x^2+1|$ para cualquier valor real.

$x-1=0 \rightarrow x=1$ → Estudiamos el signo de $x-1$ en los siguientes intervalos:

$(-\infty,1) \rightarrow x-1<0 \rightarrow |x-1|=-(x-1)$

$(1,\infty) \rightarrow x-1>0 \rightarrow |x-1|=x-1$



Por lo que la función a trozos queda:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1-(x-1) & si\ x\le 1 \\ x^2+1+x-1 & si\ x>1 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+2 & si\ x\le 1 \\ x^2+x & si\ x>1 \end{cases}$$

Calcula los siguientes límites en el infinito.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x+3}{2-x^2-2x^3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-2}}{x+6}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x+3}{2-x^2-2x^3}=\dfrac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación → Cociente de polinomios de igual grado

El límite coincide con el cociente de los coeficientes que acompañan a la máxima potencia (x^3) .

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x+3}{2-x^2-2x^3}=\frac{1}{-2}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-2}}{x+6}=\dfrac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación

El numerador lo podemos ver, en el infinito, como un polinomio de grado ½. Y el denominador como un polinimio de grado 1. Como el grado del denominador es mayor que el del numerador, el cociente tiende a 0 cuando la variable tiende a infinito.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x+6}=0$$

1. Calcula las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-9}$

b) $f(x)=\dfrac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}$

c) $f(x)=\dfrac{2x+5}{3x}$

a) Las asíntotas verticales aprecen en los valores que anulan al denominador.

$$\lim_{x\to3^-} \frac{2x-1}{x^2-9}=\frac{5}{0^-}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to3^+} \frac{2x-1}{x^2-9}=\frac{5}{0^+}=+\infty \quad \to \quad x=3$$

$$\lim_{x\to-3^-} \frac{2x-1}{x^2-9}=\frac{5}{0^+}=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to-3^+} \frac{2x-1}{x^2-9}=\frac{5}{0^-}=-\infty \quad \to \quad x=-3$$

La asíntota horizontal se obtiene estudiando el comportamiento de la función en el infinito.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x^2-9}=\frac{\infty}{\infty}$$ → Indeterminación

Grado numerador < Grado denominador → $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x^2-9}=0 \quad \to \quad y=0$

Al existir asíntota horizontal, no tendremos oblicua.

b) Las asíntotas verticales aprecen en los valores que anulan al denominador.

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=\frac{2}{0^-}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to-1^+} \frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=\frac{2}{0^+}=+\infty \quad \to \quad x=-1$$

$$\lim_{x\to-2^-} \frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=\frac{-13}{0^+}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to-2^+} \frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=\frac{-13}{0^-}=+\infty \quad \to \quad x=-2$$

La asíntota horizontal se obtiene estudiando el comportamiento de la función en el infinito.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=\frac{\infty}{\infty}$$ → Indeterminación

Grado numerador > Grado denominador → $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=\infty$

Al no existir asíntota horizontal, estudiamos la oblicua $y=mx+n$.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2+3}{x^3+3x^2+2x}=\frac{\infty}{\infty}$$ → Indeterminación

Grado numerador = Grado denominador → $m=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2+3}{x^3+3x^2+2x}=\frac{3}{1}=3$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-7x^2-6x+3}{x^2+3x+2}=\frac{-7}{1}=-7$$

Asíntota oblicua → $y=3x-7$

c) Las asíntotas verticales aprecen en los valores que anulan al denominador.

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{2x-1}{x^2-9}=\frac{5}{0^-}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{2x+5}{3x}=\frac{5}{0^+}=+\infty \quad \to \quad x=0$$

La asíntota horizontal se obtiene estudiando el comportamiento de la función en el infinito.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5}{3x}=\frac{\infty}{\infty}$$ → Indeterminación

Grado numerador = Grado denominador → $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5}{3x}=\frac{2}{3} \quad \to \quad y=\frac{2}{3}$

Al existir asíntota horizontal, no tendremos oblicua.

5. Calcula el valor de k para que la función $f(x)=\left\{\begin{matrix} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} & si \quad x\neq 1 \; y \; x\neq 2 \\ -\sqrt{2k+1} & si \quad x=1 \end{matrix}\right\}$ sea continua en $x=1$.

Aplicamos las tres condiciones de continuidad de una función en un punto.

$$\exists f(1)=-\sqrt{2k+1}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\frac{0}{0} \to \text{Indeterminación} \to \lim_{x\to 1^-}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x+1)}{(x-2)}=-2$$

$$\lim_{x\to 1^+}(-\sqrt{2k+1})=-\sqrt{2k+1}$$

Igualamos los límites laterales → $L=-2=-\sqrt{2k+1} \quad \to \quad 4=2k+1 \quad \to \quad k=\frac{3}{2}$

Y con este valor también se cumple → $f(1)=L=-2$

Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\sqrt{x^2+2x-3}$

b) $f(x)=\dfrac{3x-7}{x-6}$

c) $f(x)=x^2-4x+3$

a) $f(x)=\sqrt{x^2+2x-3}$

Necesitamos un argumento de la raíz mayor o igual a cero. Por lo tanto.

$x^2+2x-3\geq 0$

Resolvemos la inecuación obteniendo la soluciones del polinomio de grado dos $P(x)=x^2+2x-3 \quad \rightarrow \quad x=-3 \quad , \quad x=1$

Evaluamos el signo del polinomio en los siguientes intervalos.

$(-\infty,-3) \;\rightarrow\; P(-10)>0$

$(-3,1) \;\rightarrow\; P(0)<0$

$(1,\infty) \;\rightarrow\; P(20)>0$

Nos quedamos con los intervalos donde el polinomio es positivo. El dominio de la función resulta:

Dom(f) = (- ∞ , 3] U [1, ∞)

b) $f(x)=\dfrac{3x-7}{x-6}$

En un cociente de polinomios, el dominio son todos los reales menos los valores que anulan al denominador → $Dom(f)=\mathbb{R}-\{6\}$

c) $f(x)=x^2-4x+3$

El dominio son todos los reales, por ser una función polinómica.

Calcula a,b,c **en** $f(x)=a+\dfrac{bx+c}{x^2+1}$ **sabiendo que** $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$ **, la gráfica corta al eje de ordenadas en** $y=2$ **y la función pasa por el punto** $(1,\frac{3}{2})$ **.**

Aplicamos tres condiciones para obtener los tres parámetros.

Primera condición: límite en el infinito (condición de asíntota horizontal)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=3 \quad\rightarrow\quad \lim_{x\to+\infty}\left(a+\frac{bx+c}{x^2+1}\right)=3 \quad\rightarrow\quad a+0=3 \quad\rightarrow\quad a=3$$

Segunda condición: para $x=0$ la ordenada vale $y=2$

$$f(0)=2 \rightarrow 3+\frac{0+c}{0+1}=2 \rightarrow c=-1$$

Tercera condición: para $x=1$ la ordenada vale $y=\frac{3}{2}$

$$f(1)=\frac{3}{2} \rightarrow 3+\frac{b-1}{1+1}=\frac{3}{2} \rightarrow \frac{b-1}{2}=\frac{-3}{2} \rightarrow b=-2$$

2. Por el alquiler de un coche cobran 100 € diarios más 0.30 € por kilómetro. Encuentra la ecuación de la recta que relaciona el coste diario con el número de kilómetros y represéntala. Si en un día se ha hecho un total de 300 km, ¿qué importe debemos abonar?

En la recta a representar tenemos:

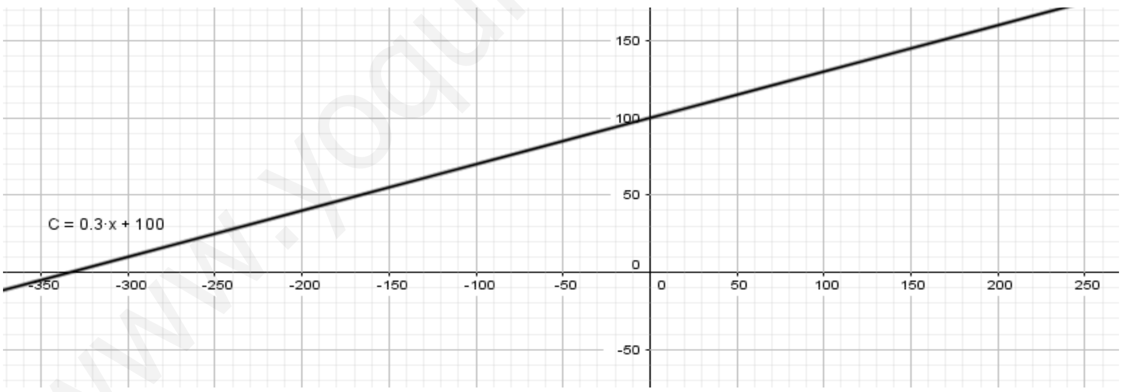
Variable independiente → número de kilómetros → x

Variable dependiente → coste → $C(x)$

Valor mínimo de un día → $100€$

Ecuación de la recta → $C(x)=0,3\cdot x+100$

Si recorremos en un día un total de 300 kilómetros → $C(300)=0,3\cdot 300+100=190€$



3. Se sabe que la función cuadrática de ecuación $y=ax^2+bx+c$ pasa por los puntos (1,1), (0, 0) y (−1,1). Calcula a, b y c.

Imponemos las condiciones de los tres punts, y tendremos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas.

$(1,1) \rightarrow 1=a+b+c \rightarrow 1=a+b$

$(0,0) \rightarrow 0=c$

$(-1,1) \rightarrow 1=a-b+c \rightarrow 1=a-b$

Sumamos las dos ecuaciones finales → $2=2a \rightarrow a=1 \rightarrow b=0$

10. Representa gráficamente $f(x)=1-\frac{x^2}{4}$ tomando como referencia la gráfica de $g(x)=x^2$.

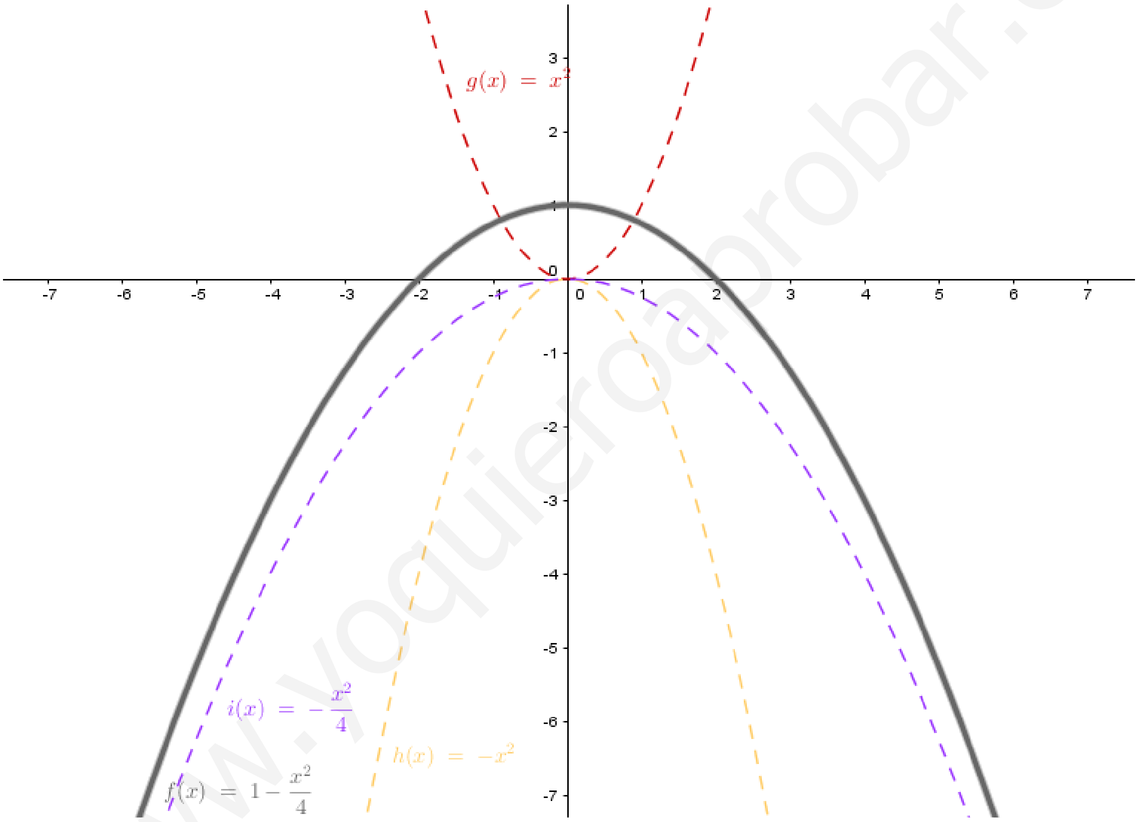
Mostramos en un mismo sistema de coordenadas las funciones:

$g(x)=x^2$ → parábola cóncava hacia arriba, con vértice en $(0,0)$

$h(x)=-x^2$ → reflejamos la parábola $g(x)$ respecto al eje horizontal

$i(x)=\frac{-x^2}{4}$ → abrimos las ramas de las parábolas $h(x)$ al multiplicar por un número inferior a 1

$f(x)=1-\frac{x^2}{4}$ → subimos verticalmente una unidad la gráfica de $i(x)$



3. Una barra de hierro dulce de 30 cm de larga a 0ºC se calienta, y su dilatación viene dada por una función lineal $L=a+bt$, donde L es la longitud en cm y t es la temperatura ºC.

a) Halla la expresión analítica de L , sabiendo que $L(1)=30{,}0005\,cm$ y que $L(3)=30{,}0015\,cm$.

b) Representa gráficamente la función obtenida.

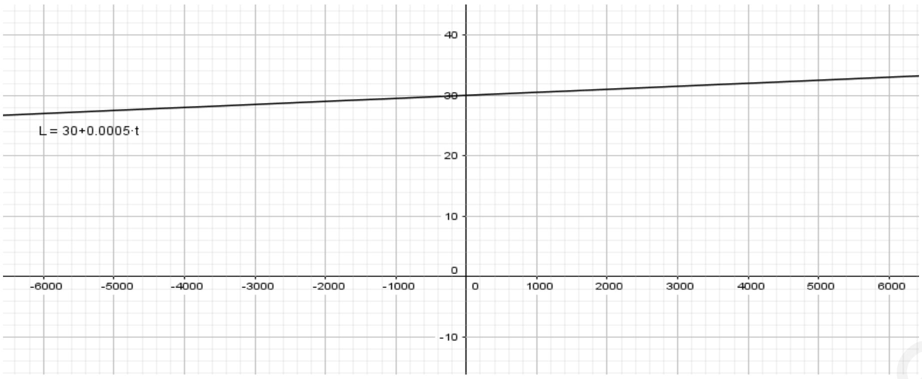
a) El crecimiento de la barra depende linealmente de la temperatura → $L=a+bt$ → Si representamos en el eje horizontal la variable tiempo y en el eje vertical la variable longitud, tendremos una recta. Y una recta queda definida si conocemos dos puntos.

$$L(1)=30{,}0005\,cm \rightarrow 30{,}0005=a+b\cdot 1$$
$$L(3)=30{,}0015\,cm \rightarrow 30{,}0015=a+b\cdot 3$$

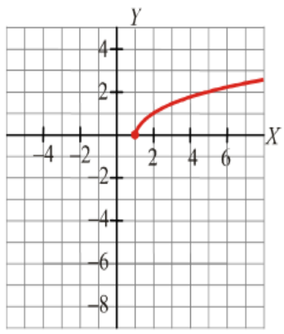
Si restamos ambas ecuaciones → $-0{,}001=-2b$ → $b=0{,}0005$ → $a=30$

La expresión analítica queda → $L=30+0{,}0005\cdot t$

b) Pintamos la gráfica con Geogebra, ajustando adecuadamente la división de los ejes para apreciar el crecimiento de la longitud en función de la temperatura.



Dada la gráfica de $f(x)$ obtener los valores de $f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(2)$.



Dos funciones inversas $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ cumplen que la imagen de $f(x)$ es el dominio de $f^{-1}(x)$. Por lo tanto, si $f(x_0)=y_0$ → $f^{-1}(y_0)=x_0$

$f^{-1}(0)$ → ¿Qué valor x_0 cumple $f(x_0)=0$?→ $f(1)=0$ → $x_0=1$ → $f^{-1}(0)=1$

$f^{-1}(2)$ → ¿Qué valor x_0 cumple $f(x_0)=2$?→ $f(4)=2$ → $x_0=4$ → $f^{-1}(2)=4$

Halla la inversa de:

a) $f(x)=\dfrac{2x-1}{3}$

b) $f(x)=\dfrac{-x+3}{2}$

a) Despejamos la variable x → $3y=2x-1$ → $\dfrac{3y+1}{2}=x$

Intercambiamos el nombre de las variables → $\dfrac{3x+1}{2}=y$

La función inversa resulta → $f^{-1}(x)=\dfrac{3x+1}{2}$

b) Despejamos la variable x → $2y=-x+3$ → $3-2y=x$

Intercambiamos el nombre de las variables → $3-2x=y$

La función inversa resulta → $f^{-1}(x)=3-2x$