

Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 1 + \sqrt{\frac{3-x}{5-x}}$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2x+3)}}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 0 \\ x-1 & \\ \sqrt{2x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) $f(x) = 1 + \sqrt{\frac{3-x}{5-x}}$

El argumento de la raíz debe ser mayor o igual a cero. Además, el denominador de la fracción no puede anularse.

$$\frac{3-x}{5-x} \geq 0 \rightarrow \text{Raíz del numerador } x=3 \text{ ; Raíz del denominador } x=5$$

Evaluamos la inecuación en los siguientes intervalos.

$$(-\infty, 3) \rightarrow x=0 \rightarrow \frac{3}{5} > 0 \rightarrow \text{Intervalo perteneciente al dominio}$$

$$(3, 5) \rightarrow x=4 \rightarrow \frac{3-4}{5-4} < 0 \rightarrow \text{Intervalo no perteneciente al dominio}$$

$$(5, \infty) \rightarrow x=10 \rightarrow \frac{3-10}{5-10} > 0 \rightarrow \text{Intervalo perteneciente al dominio}$$

La solución será la unión de los intervalos permitidos, además de las raíces del numerador. Es decir:

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, 3] \cup (5, \infty)$$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2x+3)}}$

Nuevamente imponemos la condición de que el argumento de la raíz no pueda anularse. Y tampoco puede ser cero, ya que la raíz está dividiendo en la fracción.

$$(x+1)(2x+3) > 0 \rightarrow \text{Raíces } x=-1 \text{ , } x = \frac{-3}{2}$$

Evaluamos el argumento en los siguientes intervalos.

$$(-\infty, -\frac{3}{2}) \rightarrow x = -10 \rightarrow (-10+1)(2(-10)+3) > 0 \rightarrow \text{intervalo perteneciente al dominio}$$

$$(-\frac{3}{2}, -1) \rightarrow x = -\frac{5}{4} \rightarrow (-\frac{5}{4}+1)(2(-\frac{5}{4})+3) < 0 \rightarrow \text{intervalo no perteneciente al dominio}$$

$$(-1, \infty) \rightarrow x = 0 \rightarrow (0+1)(2(0)+3) > 0 \rightarrow \text{intervalo perteneciente al dominio}$$

$$\text{Solución final} \rightarrow \text{Dom}(f) = (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (-1, \infty)$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 0 \\ x-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Debemos estudiar el dominio de la función en cada tramo, además de la continuidad en el punto frontera.

Para $x < 0 \rightarrow f(x) = \frac{2x}{x-1}$ es una función continua salvo en $x=1$. Pero ese valor no pertenece al intervalo $x < 0 \rightarrow$ La función es continua para todo valor $x < 0$.

Para $x > 0 \rightarrow f(x) = \sqrt{2x+1}$ es una función con discriminante positivo, ya que para $x > 0$ el argumento $2x+1$ siempre es positivo \rightarrow La función es continua para todo valor $x > 0$.

página 3/4

Debemos estudiar la continuidad en el punto frontera $x=0$, aplicando las tres condiciones de continuidad de una función en un punto.

$$\exists f(0) = \frac{0}{0-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x-1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{2x+1} = 1 \rightarrow \text{Los límites laterales no coinciden}$$

$$\text{La función no continua en } x=0 \rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$