RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Algunos problemas pueden resolverse empleando sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Muchas veces se pueden resolver utilizando una sola ecuación con una incógnita, pero el planteamiento de dicha ecuación es más complicado que plantear un sistema de los que estamos estudiando.

Para resolver estos problemas podemos seguir tres pasos:

1. Elegir las incógnitas x e y que siempre coinciden con lo que nos preguntan en el problema.
2. Plantear dos ecuaciones traduciendo el problema al lenguaje algebraico
3. Resolver el sistema.

Por último conviene siempre comprobar que la solución es correcta o al menos que tiene sentido.

Hay una serie de “problemas tipo” que se resuelven fácilmente y el planteamiento de las ecuaciones siempre es igual. Pero también hay problemas para los que el planteamiento de las ecuaciones es más complicado. Lee el enunciado las veces que haga falta hasta que comprendas las dos ecuaciones que hay que plantear.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. En un aparcamiento hay 55 vehículos entre coches y motos. Si el total de ruedas es de 170. ¿Cuántos coches y cuántas motos hay?.

Resolución

Este problema es un problema tipo que aparece muchas veces variando el enunciado.

1. Paso. Se eligen las incógnitas que coinciden con lo que nos preguntan: “¿Cuántos coches y cuántas motos hay?”

x = número de coches

y = número de motos

2. Paso. Se plantean las dos ecuaciones.

1ª Ecuación

Como hay 55 vehículos en total $x + y = 55$

2ª Ecuación

Hay 170 ruedas entre todos los vehículos. Un coche tiene 4 ruedas luego x coches tendrán $4x$ ruedas. Una moto tiene 2 ruedas luego y motos tendrán $2y$ ruedas. En definitiva la ecuación que da el total de ruedas es: $4x + 2y = 170$

(ATENCIÓN: No se debe mezclar el número de ruedas con el número de vehículos.)

El sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} x + y = 55 \\ 4x + 2y = 170 \end{cases}$$

3. Paso. Resolver el sistema.
Lo resuelvo por ejemplo por reducción.

1º Elijo la incógnita x.

2º Para que tengan coeficientes opuestos multiplico la primera ecuación por (-4)

$$\begin{cases} -4x - 4y = -220 \\ 4x + 2y = 170 \end{cases}$$

3º Sumando las dos ecuaciones

$$\begin{array}{r} -4x - 4y = -220 \\ + \quad 4x + 2y = 170 \\ \hline -2y = -50 \end{array} \quad y = 25$$

4º Se sustituye en una ecuación

$$\begin{array}{l} x + 25 = 55 \\ x = 30 \end{array}$$

Solución (x = 30 , y = 25)

Ahora se comprueba que es correcta la solución:

1º Entre todos los vehículos suman 55. Efectivamente $30+25=55$

2º El número de ruedas es 170. Efectivamente $30 \cdot 4 + 2 \cdot 25 = 120 + 50 = 170$.

2. Dos kilos de plátanos y tres de peras cuestan 7,80 euros. Cinco kilos de plátanos y cuatro de peras cuestan 13,20 euros. ¿A cómo está el kilo de plátanos y el de peras?

Este problema es un problema tipo que aparece muchas veces variando el enunciado.

1. Paso. Se eligen las incógnitas que coinciden con lo que nos preguntan: “¿A cómo está el kilo de peras y el de plátanos?”

x = precio del kg de plátanos
y = precio del kg de peras

2. Paso. Se plantean las dos ecuaciones.

1ª Ecuación

Dos kilos de plátanos y tres de peras cuestan 7,80 euros $2x + 3y = 7,80$

2ª Ecuación

Cinco kilos de plátanos y cuatro de peras cuestan 13,20 euros $5x + 4y = 13,20$

El sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7,80 \\ 5x + 4y = 13,20 \end{cases}$$

3. Paso. Resolver el sistema.

Lo resuelvo por ejemplo por reducción.

1º Elijo la incógnita x.

2º Para que tengan coeficientes opuestos multiplico la primera ecuación por -5 y la segunda por 2

$$\begin{cases} -10x - 15y = -39 \\ 10x + 8y = 26,4 \end{cases}$$

3º Sumando las dos ecuaciones

$$\begin{array}{r} -10x - 15y = -39 \\ + \quad 10x + 8y = 26,4 \\ \hline -7y = -12,6 \end{array} \quad y = 1,8$$

4º Se sustituye en una ecuación

$$\begin{array}{r} 2x + 3 \cdot 1,8 = 7,80 \\ 2x = 7,80 - 5,4 \end{array} \quad x = 1,2$$

Solución (x = 1,2 , y = 1,8)

Ahora se comprueba que es correcta la solución:

Dos kilos de plátanos y tres de peras cuestan 7,80 euros

$$2 \cdot 1,2 + 3 \cdot 1,8 = 2,4 + 5,4 = 7,8 \quad \text{Bien}$$

Cinco kilos de plátanos y cuatro de peras cuestan 13,20 euros

$$5 \cdot 1,2 + 4 \cdot 1,8 = 6 + 7,2 = 13,20 \quad \text{Bien}$$

3. En un corral hay gallinas y conejos. En total hay 14 cabezas y 38 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay en el corral?

Resolución. Este problema tiene el mismo planteamiento que el problema 1

1. Paso. Se eligen las incógnitas

x = número de gallinas

y = número de conejos

2. Paso. Se plantean las dos ecuaciones.

1ª Ecuación (cabezas)

$$\text{Como hay 14 cabezas en total } x + y = 14$$

2ª Ecuación (Patatas)

Hay 38 patas entre todos los animales. Una gallina tiene 2 patas luego x gallinas tendrán $2x$ patas. Un conejo tiene 4 patas luego y conejos tendrán $4y$ patas. En definitiva la ecuación que da el total de patas es: $2x + 4y = 38$

El sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 2x + 4y = 38 \end{cases}$$

3. Paso. Resolver el sistema. Por sustitución por ejemplo.

$$x = 14 - y$$

Sustituyo en la 2ª ec. $2 \cdot (14 - y) + 4y = 38$

$$28 - 2y + 4y = 38$$

$$2y = 10 \quad y = 5$$

Calculo la otra incógnita $x = 14 - 5 \quad x = 9$

Solución $(x = 9, y = 5)$

Ahora se comprueba que es correcta la solución:

1º Entre todos los animales suman 14. Efectivamente $5 + 9 = 14$

2º El número de patas es 38. Efectivamente $2 \cdot 9 + 4 \cdot 5 = 18 + 20 = 38$.

4. He comprado un DVD y me ha costado 105 euros. Lo he pagado con 12 billetes de dos tipos, de 5 euros y de 10 euros. ¿Cuántos billetes de cada clase he entregado?

El planteamiento de este problema es igual que el del problema número dos.

1. Se eligen las incógnitas

x = billetes de 5 euros

y = billetes de 10 euros

2. Se plantean las dos ecuaciones.

1ª Ecuación (billetes)

Utiliza 12 billetes en total $x + y = 12$

2ª Ecuación (dinero)

Le cuesta 105 euros $5x + 10y = 105$

El sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 5x + 10y = 105 \end{cases}$$

3. Paso. Resolver el sistema.

Lo resuelvo por ejemplo por sustitución

$$x = 12 - y$$

Sustituyendo

$$5 \cdot (12 - y) + 10y = 105$$
$$60 - 5y + 10y = 105$$
$$5y = 45 \quad y = 9$$
$$x = 12 - 9 = 3$$

Solución ($x = 3$, $y = 9$)

Ahora se comprueba que es correcta la solución:

Son 12 billetes en total

$$3 + 9 = 12 \quad \text{Bien}$$

Paga 105 euros con esos billetes

$$3 \cdot 5 + 9 \cdot 10 = 15 + 90 = 105 \quad \text{Bien}$$

5. Un fabricante de bombillas gana 0,3euros por cada bombilla que sale de la fábrica, pero pierde 0,4 euros por cada una que sale defectuosa. Un día en el que fabricó 2100 bombillas obtuvo un beneficio de 484,4 euros. ¿Cuántas bombillas buenas y cuántas defectuosas fabrico ese día?

Este problema es similar al anterior en planteamiento pero cambia un detalle.

1. Se eligen las incógnitas

x = número de bombillas buenas

y = número de bombillas defectuosas

2. Se plantean las dos ecuaciones.

1ª Ecuación (bombillas)

Se fabricaron 2100 bombillas en total

$$x + y = 2100$$

2ª Ecuación (beneficio = ganancia - pérdida)

Se obtiene un beneficio de 484,4 euros

$$0,3x - 0,4y = 484,4$$

El sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} x + y = 2100 \\ 0,3x - 0,4y = 484,4 \end{cases}$$

3. Paso. Resolver el sistema.

Lo resuelvo por ejemplo por sustitución

$$x = 2100 - y$$

Sustituyendo

$$0,3 \cdot (2100 - y) - 0,4y = 484,4$$
$$630 - 0,3y - 0,4y = 484,4$$

$$\begin{aligned} -0,7y &= 145,6 \\ y &= 208 \end{aligned}$$

$$x = 2100 - 208 = 1892$$

Solución (x = 1892, y = 208)

Ahora se comprueba que es correcta la solución:

Son 2100 bombillas en total
 $1892 + 208 = 2100$ Bien

El beneficio es de 484,4

$$0,3 \cdot 1892 - 0,4 \cdot 208 = 567,6 - 83,2 = 484,4 \quad \text{Bien}$$

6. Halla dos números tales que la suma de un tercio del primero más un quinto del segundo sea igual a 13 y que si se multiplica el primero por 5 y el segundo por 7 se obtiene 247 como suma de los dos productos.

1. Se eligen las incógnitas

x = primer número
y = segundo número

2. Se plantean las dos ecuaciones.

1ª Ecuación

“La suma de un tercio del 1º más un quinto del 2º es 13” $\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y = 13$

2ª Ecuación

“Si se multiplica el 1º por 5 y el 2º por 7 se obtiene 247” $5x + 7y = 247$

El sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 13 \\ 5x + 7y = 247 \end{cases}$$

3. Paso. Resolver el sistema.

Lo primero es quitar denominadores en la 1ª ecuación. $\text{mcm}(3,5) = 15$

$$1^{\text{a}} \text{ ec. } \frac{5x}{15} + \frac{3y}{15} = \frac{195}{15} \quad \text{luego } 5x + 3y = 195$$

El sistema equivalente es:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 195 \\ 5x + 7y = 247 \end{cases}$$

Lo resuelvo por ejemplo por reducción.

Multiplico la 1ª ec por -1 y sumo las dos ecuaciones

$$\begin{array}{r} -5x - 3y = -195 \\ + \quad 5x + 7y = 247 \\ \hline 4y = 52 \end{array} \quad y = 13$$

4º Se sustituye en una ecuación

$$\begin{array}{r} 5x + 3 \cdot 13 = 195 \\ 5x = 195 - 39 \\ 5x = 156 \end{array} \quad x = 31,2$$

Solución (x = 31,2 , y = 13)

Ahora se comprueba que es correcta la solución:

“La suma de un tercio del 1º más un quinto del 2º es 13”

$$\frac{1}{3}31,2 + \frac{1}{5}13 = 10,4 + 2,6 = 13 \quad \text{Bien}$$

“Si se multiplica el 1º por 5 y el 2º por 7 se obtiene 247”

$$5 \cdot 31,2 + 7 \cdot 13 = 156 + 91 = 247 \quad \text{Bien}$$

7. El perímetro de un rectángulo es 64cm y la diferencia entre las medidas de la base y la altura es 6cm. Calcula las dimensiones de dicho rectángulo.

1. Se eligen las incógnitas

x = medida de la base

y = medida de la altura

2. Se plantean las dos ecuaciones.

1ª Ecuación

“El perímetro es 64cm”

$$2x + 2y = 64$$

2ª Ecuación

“La diferencia entre la base y la altura es 6cm”

$$x - y = 6$$

El sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 64 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

3. Resolver el sistema.

Lo resuelvo por ejemplo por reducción.

Multiplico la segunda ecuación por 2 y sumo las dos ecuaciones

$$\begin{array}{r} 2x + 2y = 64 \\ + \quad \underline{2x - 2y = 12} \\ \hline 4x = 76 \quad x = 19 \end{array}$$

Se sustituye en una ecuación

$$\begin{array}{l} 19 - y = 6 \\ y = 13 \end{array}$$

Solución (x = 19 , y = 13)

Ahora se comprueba que es correcta la solución:

“El perímetro es 64cm” $2 \cdot 19 + 2 \cdot 13 = 38 + 26 = 64$ Bien

“La diferencia entre la base y la altura es 6cm” $19 - 13 = 6$ Bien

8. La edad de Manuel es el doble de la edad de su hija Ana. Hace diez años, la suma de las edades de ambos era igual a la edad actual de Manuel. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

1. Se eligen las incógnitas

x = edad actual de Manuel

y = edad actual de Ana

2. Se plantean las dos ecuaciones.

1ª Ecuación

“La edad de Manuel es el doble de la edad de su hija Ana ” $x = 2y$

2ª Ecuación

“Hace diez años, la suma de las edades de ambos era igual a la edad actual de Manuel”

$$x - 10 + y - 10 = x$$

El sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} x = 2y \\ x - 10 + y - 10 = x \end{cases}$$

3. Resolver el sistema.

De la 2ª ecuación se obtiene: $x - x + y = 20$ luego $y = 20$

Sustituyendo en la primera $x = 2 \cdot 20$ $x = 40$

Solución ($x = 40$, $y = 20$)

Ahora se comprueba que es correcta la solución:

“La edad de Manuel es el doble de la edad de su hija Ana ” $40 = 2 \cdot 20$ Bien

“Hace diez años, la suma de las edades de ambos era igual a la edad actual de Manuel”
 $40 - 10 + 20 - 10 = 40$ Bien

9. José dice a Eva: “Mi colección de discos compactos es mejor que la tuya ya que si te cedo 10 tendríamos la misma cantidad”. Eva le responde: “Reconozco que llevas razón. Solo te faltan 10 para doblarme en número”. ¿Cuántos discos tiene cada uno?

1. Se eligen las incógnitas
 $x =$ Discos que tiene José
 $y =$ Discos que tiene Eva

2. Se plantean las dos ecuaciones.

1ª Ecuación

“Si José cede 10 a Eva tienen la misma cantidad ” $x - 10 = y + 10$

2ª Ecuación

“A José le faltan 10 para tener el doble de discos que Eva” $x + 10 = 2y$

El sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} x - 10 = y + 10 \\ x + 10 = 2y \end{cases}$$

3. Resolver el sistema. Por sustitución

De la 1ª ecuación despejando x se obtiene: $x = y + 20$

Sustituyendo en la 2ª la x se tiene $y + 20 + 10 = 2y$ luego $y = 30$

El valor de x será: $x = 30 + 20$; $x = 50$

Solución ($x = 50$, $y = 30$)

Ahora se comprueba que es correcta la solución:

“Si José cede 10 a Eva tienen la misma cantidad ” $50 - 10 = 40$

$30 + 10 = 40$ Bien
 $50 + 10 = 60$
 $2 \cdot 30 = 60$ Bien

“A José le faltan 10 para tener el doble de discos que Eva”

10. En una fábrica de zumos se mezclan dos tipos de calidades, una de 0,5 euros/l y otra de 0,8 euros/l. ¿Cuántos litros de zumo se mezclarán de cada tipo para obtener 120 litros con un coste de 75 euros?

1. Se eligen las incógnitas
 $x =$ litros de zumo de calidad 0,5 e/l
 $y =$ litros de zumo de calidad 0,8e/l

2. Se plantean las dos ecuaciones.

1ª Ecuación (litros)
 “Se obtienen 120 litros” $x + y = 120$

2ª Ecuación (coste)
 “La mezcla tiene un coste de 75 euros” $0,5x + 0,8y = 75$

El sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} x + y = 120 \\ 0,5x + 0,8y = 75 \end{cases}$$

3. Resolver el sistema. Por sustitución

De la 1ª ecuación despejando x se obtiene: $x = 120 - y$

Sustituyendo en la 2ª la x se tiene

$$\begin{aligned} 0,5 \cdot (120 - y) + 0,8y &= 75 \\ 60 - 0,5y + 0,8y &= 75 \\ 0,3y &= 15 \\ y &= 50 \end{aligned}$$

El valor de x será: $x = 120 - y$; $x = 120 - 50$, $x = 70$

Solución ($x = 70$, $y = 50$)

Ahora se comprueba que es correcta la solución:

“Se obtienen 120 litros” $70 + 50 = 120$ Bien

“La mezcla tiene un coste de 75 euros” $0,5 \cdot 70 + 0,8 \cdot 50 = 35 + 40 = 75$ Bien

11. Laura ha comprado un abrigo que estaba rebajado un 15%. Irene ha comprado otro abrigo 25 euros más caro, pero ha conseguido una rebaja del 20 % , con lo que solo ha pagado 8 euros más que Laura. ¿Cuál era el precio de cada abrigo?

1. Se eligen las incógnitas

x = Precio del abrigo de Laura sin rebaja

y = Precio del abrigo de Irene sin rebaja

2. Se plantean las dos ecuaciones.

1ª Ecuación (Precios sin rebaja)

“El abrigo de Irene es 25 euros más caro que el de Laura ” $y = x + 25$

2ª Ecuación (Lo que paga cada una con descuento)

El abrigo de Laura tenía un descuento del 15% luego realmente lo que ella paga es el 85%. Paga $0,85x$

El abrigo de Irene tenía un descuento del 20% luego realmente lo que ella paga es el 80%. Paga $0,80y$

Con estos descuentos Irene paga 8 euros más que Laura, luego la ecuación queda:

$$0,8y = 0,85x + 8$$

El sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} y = x + 25 \\ 0,8y = 0,85x + 8 \end{cases}$$

3. Resolver el sistema. Por sustitución

Sustituyendo en la 2ª la y se tiene

$$0,8 \cdot (x + 25) = 0,85x + 8$$

$$0,8x + 20 = 0,85x + 8$$

$$12 = 0,05x$$

$$x = 240 \text{ euros cuesta el abrigo de Laura sin rebaja}$$

El valor de y será: $y = 240 + 25$; $y = 265$ euros cuesta el abrigo de Irene sin rebaja

Solución ($x = 240$, $y = 265$)

Ahora se comprueba que es correcta la solución:

“El abrigo de Irene es 25 euros más caro que el de Laura ”

Efectivamente el de Irene cuesta 245 euros, 25 euros más que el de Laura que cuesta 240.

“Irene paga 8 euros más que Laura”

$0,8 \cdot 265 = 212$ euros paga Irene

$0,85 \cdot 240 = 204$ euros paga Laura. Luego efectivamente Irene ha pagado 8 euros más.

12. Un empresario quiere distribuir una gratificación entre sus empleados. Se da cuenta de que si da a cada uno 80 euros le sobran 20 euros y si da a cada uno 90 euros le faltan 40 euros. ¿Cuántos empleados tiene?, ¿Cuánto dinero tiene para repartir?

1. Se eligen las incógnitas

$x = n^\circ$ de empleados

$y =$ dinero para repartir

2. Se plantean las dos ecuaciones.

1ª Ecuación

“Si da a cada uno 80 euros le sobran 20 euros” $80x + 20 = y$

2ª Ecuación

“Si da a cada uno 90 euros le faltan 40 euros” $90x - 40 = y$

El sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} 80x + 20 = y \\ 90x - 40 = y \end{cases}$$

3. Resolver el sistema. Por Igualación

$$80x + 20 = 90x - 40$$

$$60 = 10x$$

$$x = 6 \text{ empleados}$$

El valor de y será: $y = 80 \cdot 6 + 20$; $y = 480 + 20$, $y = 500$ euros

Solución ($x = 6$, $y = 500$)

Ahora se comprueba que es correcta la solución:

“Si da a cada uno 80 euros le sobran 20 euros”

$6 \cdot 80 = 480$ euros , le sobran 20 para llegar a 500.

“Si da a cada uno 90 euros le faltan 40 euros”

$6 \cdot 90 = 540$, le faltarían 40 euros, pues solo tiene 500.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Seis camisetas y cinco gorras cuestan 227 euros. Cinco camisetas y 4 gorras cuestan 188 euros. Halla el precio de una camiseta y de una gorra.

(Solución: 32 camisetas, 7 gorras)

2. He comprado un cuaderno que costaba 3 euros y para pagarlo he utilizado nueve monedas, unas de 20 céntimos y otras de 50 céntimos. ¿Cuántas monedas de cada clase he utilizado? (Solución: 5 monedas de 20 céntimos, 4 de 50 céntimos)

3. En un examen tipo test de 30 preguntas se obtienen 0,75 puntos por cada respuesta correcta y se restan 0,25 por cada error. Si un alumno ha sacado 10,5 puntos ¿Cuántos aciertos y cuántos errores ha cometido?

(Solución: 18 respuestas correctas , 12 respuestas incorrectas)

4. Calcula dos números cuya suma sea 191 y su diferencia 67.

(Solución: primer número 129 y segundo número 62)

5. La diferencia de dos números es de 14 y la cuarta parte de su suma es 13. Halla dichos números.

(Solución: primer número 33 y segundo número 19)

6. Dos números suman 21. Si el primero lo dividimos entre 3 y le restamos la sexta parte del segundo, nos da 1. Halla el valor de los dos números.

(Solución: primer número 9 y segundo número 12)

7. Entre María y Pedro tienen un total de 65 CD's . Sabemos que Pedro tiene 7 CD's más que María. ¿Cuántos CD's tiene cada uno?

(Solución: María tiene 29 CD's y Pedro 36)

8. Calcula las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es 80 m y la altura es $\frac{2}{3}$ de su base. (Solución: base 24 m y altura 16)

9. En el aula de 3º A hay doble número de alumnos que en el aula de 3ºB. Además se sabe que si se pasan 8 alumnos de 3º A a 3ºB ambas aulas tendrán el mismo número de alumnos. ¿Cuántos alumnos hay en cada aula?

(Solución: En el aula de 3º A hay 32 alumnos y en 3ºB 16)

11. Tenemos dos grifos A y B. Si abrimos el grifo A durante 3 minutos y el grifo B durante 1 minuto, salen en total 50 l de agua. Si en cambio abrimos el grifo B durante 2 minutos y el A durante 1 minuto, entonces salen en total 40l. ¿Cuántos litros de agua arroja cada grifo en 1 minuto?

(Solución: Grifo A 12 l/min y grifo B 14 l/min)

12. Javier dispone de un capital de 8000 euros, del que una parte la mete en un depósito al 5% anual y otra al 6% anual. Calcula ambas partes sabiendo que el capital acumulado al cabo de un año es de 8450 euros.

(Solución: Capital al 5% 3000 euros y capital al 6% 5000 euros)

13. Una empresa que fabrica jarrones recibe un encargo para un día determinado. Al planificar la producción se dan cuenta de que si fabrican 250 jarrones al día, faltarían 150 al concluir el plazo que tienen. Si fabrican 260 jarrones diarios entonces les sobrarían 80. ¿Cuántos días tienen de plazo y cuántos jarrones les encargaron?
(Solución: 23 días de plazo y 5900 jarrones)