EXAMEN MATEMÁTICAS II

1) Sea la función f definida por $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

a. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función f.
b. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de inflexión de abscisa negativa. (1,5 puntos)

2) Dada la función $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ xe^{-x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

a. Estudia la derivabilidad de f en x = 0 y, si es posible, calcula la derivada de f en dicho punto.
b. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y la recta $x = -1$. (2 puntos)

3) Sea r la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} x = a + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$ y s la recta $s \equiv \dfrac{x-1}{2} = y + 2 = \dfrac{z}{3}$

a. Calcula el valor de a sabiendo que las rectas r y s se cortan.
b. Calcula el punto de corte. (1,5 puntos)

4) Considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= -4 \\ 3x + my + z &= m - 1 \\ 2x + my \quad &= -2 \end{aligned}\right\}$$

a. Clasifica el sistema según los valores de m.
b. Resuélvelo cuando sea compatible. (1,5 puntos)

5) Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$. Determina a y b, sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto $(2,2)$ y tiene un punto de inflexión de abscisa $x = 0$. (1 punto)

6) Dados los puntos $A(2,1,2)$ y $B(0,4,1)$ y la recta r de ecuación $x = y - 2 = \dfrac{z-3}{2}$

a. Determina un punto C de la recta r que equidiste de los puntos A y B.
b. Calcula el área del triángulo de vértices ABC. (1,5 puntos)

7) Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$. Halla, si existe, la matriz inversa de $AB + C$. (1 punto)

SOLUCIONES

1) $f(x)=\ln(x^2+1)$ como $x^2+1>0$ siempre $\Rightarrow Dom(f)=R$

a) $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}\rightarrow\dfrac{2x}{x^2+1}=0\Rightarrow x=0$ posible extremo

$f'(x)<0$ si $x<0\rightarrow$ decrece en $(-\infty,0)$ $\rightarrow Min(0,0)$

$f'(x)>0$ si $x>0\rightarrow$ crece en $(0,+\infty)$

b) $f''(x)=\dfrac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}\rightarrow f''(x)=\dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}=0\rightarrow x=\left\langle\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right.$

Punto de inflexión de abscisa negativa $(-1,\ln 2)$

Recta tangente: $y-\ln 2=f'(-1)(x+1)\rightarrow y=-1(x+1)+\ln 2\rightarrow y=-x+\ln 2-1$

2) $f(x)=\begin{cases}e^x-1 & si\ x\geq 0\\ xe^{-x^2} & si\ x<0\end{cases}$

a) cada trozo es continuo y derivable (exponencial e identidad), habrá que ver si es continua y derivable en 0:

Continuidad: $\begin{cases}f(0)=e^0-1=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(e^x-1)=0\\ \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(xe^{-x^2})=0\end{cases}$ es continua en 0

Derivabilidad: $f'(x)=\begin{cases}e^x & si\ x>0\\ e^{-x^2}(1-2x^2) & si\ x<0\end{cases}$

$$\left.\begin{matrix}f'(0^+)=e^0=1\\ f'(0^-)=e^0(1-0)=1\end{matrix}\right.\rightarrow f'(0)=0$$

b) La función pasa por $(0,0)$, "antes" del origen la gráfica es el trozo xe^{-x^2} y esta función es negativa en $(-\infty,0)$, luego el área pedida será:

$$A=\left|\int_{-1}^{0}xe^{-x^2}dx\right|=(*)=\left|\left.-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_{-1}^{0}\right|=\left|-\frac{1}{2}e^0+\frac{1}{2}e^{-1}\right|=\left|-\frac{1}{2}+\frac{1}{2e}\right|=\frac{e-1}{2e}\text{ u.a.}$$

$$(*)\int xe^{-x^2}dx=\left\{\begin{matrix}t=-x^2\\ dt=-2xdx\end{matrix}\right\}=-\frac{1}{2}\int e^t dt=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$$

3) $r\equiv\begin{cases}x=a+t\\ y=1-2t\\ z=4-t\end{cases}$ y $s\equiv\dfrac{x-1}{2}=y+2=\dfrac{z}{3}\rightarrow s\equiv\begin{cases}x=1+2n\\ y=-2+n\\ z=3n\end{cases}$

a) r y s se cortan, luego el sistema tiene que ser compatible determinado, veamos:

$$\left.\begin{matrix}a+t=1+2n\\ 1-2t=-2+n\\ 4-t=3n\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix}t-2n=1-a\\ 2t+n=3\\ t+3n=4\end{matrix}\right\}\rightarrow A=\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\\1&3\end{pmatrix},\ A'=\begin{pmatrix}1&-2&1-a\\2&1&3\\1&3&4\end{pmatrix}$$

para que sea compatible determinado tiene que ser $r(A)=r(A')=2$, es decir, que el determinante de la matriz ampliada tiene que ser cero:

$$|A'| = 4-6+6(1-a)-(1-a)-9+16 = 10-5a = 0 \rightarrow a = 2$$

b) Para hallar el punto de corte habrá que resolver el sistema para $a = 2$

$$\left.\begin{array}{l} t-2n=-1 \\ 2t+n=3 \\ t+3n=4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} t-2n=-1 \\ 2t+n=3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} t=2n-1 \\ 2(2n-1)+n=3 \end{array}\right\} \rightarrow 4n+n=3+2 \rightarrow n=1$$

$t = 2-1 = 1$, hallemos el punto de corte, P

$$P = \begin{cases} x = 2+t = 2+1 = 3 \\ y = 1-2t = 1-2 = -1 \\ z = 4-t = 4-1 = 3 \end{cases}, \text{ o también } P = \begin{cases} x = 1+2n = 1+2 = 3 \\ y = -2+n = -2+1 = -1 \\ z = 3n = 3 \end{cases}$$

luego, el punto de corte es $P(3,-1,3)$

4) a) Discusión del sistema según los valores de m:

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=-4 \\ 3x+my+z=m-1 \\ 2x+my\quad\;=-2 \end{array}\right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & m & 1 \\ 2 & m & 0 \end{pmatrix},\ A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & m & 1 & m-1 \\ 2 & m & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

veamos los posibles rangos:

$$|A| = 2-3m+2m-m = 2-2m = 0 \Rightarrow m = 1$$

Para $m = 1$ $\ r(A) = 2,$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, veamos el rango de la matriz ampliada

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow r(A') = 2 = r(A)$$ Sistema Compatible Indeterminado

Para $m \neq 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow r(A') = 3 = r(A)$ Sistema Compatible Determinado

b) Para $m = 1$

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=-4 \\ 3x+y+z=0 \\ 2x+y\quad\;=-2 \end{array}\right\} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=z-4 \\ 3x+y=-z \end{array}\right\} \text{ con } z = t \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=t-4 \\ 3x+y=-z \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=t-4 \\ -3x-y=t \end{array}\right\} \rightarrow -2x = 2t-4 \rightarrow x = 2-t \rightarrow y = -t-3(2-t) = -6+2t$$

Solución: $\begin{cases} x = 2-t \\ y = -6+2t \\ z = t \end{cases}$

Para $m \neq 1 \Rightarrow |A| = 2-2m$, lo resolvemos por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-4 & 1 & -1\\ m-1 & m & 1\\ -2 & m & 0\end{vmatrix}}{2-2m}=\frac{-m^2+3m-2}{2-2m}=\frac{-(m-1)(m-2)}{-2(m-1)}=\frac{m-2}{2}$$, análogamente

obtenemos las otras dos incógnitas: $y=-1$ y $z=\frac{m+4}{2}$

5) $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$

la gráfica de f pasa por el punto $(2,2)$ $\rightarrow f(2)=2$

tiene un punto de inflexión de abscisa $x=0\rightarrow f''(0)=0$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$ y $f''(x)=6x+2a$

$f(2)=2^3+a\cdot 2^2+b\cdot 2+1=8+4a+2b+1=2\Rightarrow 2b=2-1-8\Rightarrow b=-\frac{7}{2}$

$f''(0)=6\cdot 0+2a=0\Rightarrow a=0$

6) Dados los puntos $A(2,1,2)$ y $B(0,4,1)$ y la recta r de ecuación $x=y-2=\frac{z-3}{2}$

a) Determina un punto C de la recta r que equidiste de los puntos A y B.

Punto genérico de la recta r $\rightarrow C(t,2+t,3+2t)$

Equidista de A y B $\rightarrow d(A,C)=d(B,C)$

$\rightarrow\sqrt{(t-2)^2+(2+t-1)^2+(3+2t-2)^2}=\sqrt{t^2+(2+t-4)^2+(3+2t-1)^2}$

$t^2-4t+4+1+t^2-2t+4t^2+1-4t=t^2+t^2-4t+4+4t^2+4-8t$

$-10t+2=-12t+8\rightarrow 2t=6\rightarrow t=3\rightarrow C(3,5,9)$

b) Área del triángulo ABC, con $A(2,1,2)$, $B(0,4,1)$ y $C(3,5,9)$

$$Area=\frac{|AB\times AC|}{2}=\frac{\sqrt{25^2+13^2+(-11)^2}}{2}=\frac{\sqrt{915}}{2}\text{ u.a.}$$

7) $A=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$, $B=(2\quad 1)$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 6 & 6\end{pmatrix}$

$$AB+C=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}.(2\quad 1)+\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 6 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -3\\ 4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 6 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -5\\ 10 & 8\end{pmatrix}$$

$|AB+C|=-56+50=-6\neq 0$, luego SI tiene inversa, la hallamos:

matriz adjunta $\rightarrow\begin{pmatrix}8 & -10\\ 5 & -7\end{pmatrix}$, matriz adjunta traspuesta $\rightarrow\begin{pmatrix}8 & 5\\ -10 & -7\end{pmatrix}$

Matriz inversa $(AB+C)^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}8 & 5\\ -10 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3} & -\frac{5}{6}\\ \frac{5}{3} & \frac{7}{6}\end{pmatrix}$