

EXAMEN MATEMÁTICAS II

- 1) Sea la función f definida por $f(x) = \ln(x^2 + 1)$
- Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función f .
 - Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de inflexión de abscisa negativa. (1,5 puntos)

2) Dada la función $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ xe^{-x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

- Estudia la derivabilidad de f en $x = 0$ y, si es posible, calcula la derivada de f en dicho punto.
- Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje de abscisas y la recta $x = -1$. (2 puntos)

3) Sea r la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} x = a + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$ y s la recta $s \equiv \frac{x-1}{2} = y+2 = \frac{z}{3}$

- Calcula el valor de a sabiendo que las rectas r y s se cortan.
- Calcula el punto de corte. (1,5 puntos)

- 4) Considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = -4 \\ 3x + my + z = m - 1 \\ 2x + my = -2 \end{array} \right\}$$

- Clasifica el sistema según los valores de m .
- Resuélvelo cuando sea compatible. (1,5 puntos)

- 5) Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$. Determina a y b , sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto $(2,2)$ y tiene un punto de inflexión de abscisa $x = 0$. (1 punto)

- 6) Dados los puntos $A(2,1,2)$ y $B(0,4,1)$ y la recta r de ecuación $x = y - 2 = \frac{z-3}{2}$
- Determina un punto C de la recta r que equidiste de los puntos A y B .
 - Calcula el área del triángulo de vértices ABC . (1,5 puntos)

- 7) Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = (2 \ 1)$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$. Halla, si existe, la matriz inversa de $AB + C$. (1 punto)

SOLUCIONES

1) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ como $x^2 + 1 > 0$ siempre $\Rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

a) $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \rightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow x = 0$ posible extremo

$f'(x) < 0$ si $x < 0 \rightarrow$ decrece en $(-\infty, 0) \rightarrow \text{Min}(0, 0)$

$f'(x) > 0$ si $x > 0 \rightarrow$ crece en $(0, +\infty)$

b) $f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} \rightarrow f''(x) = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$

Punto de inflexión de abscisa negativa $(-1, \ln 2)$

Recta tangente: $y - \ln 2 = f'(-1)(x + 1) \rightarrow y = -1(x + 1) + \ln 2 \rightarrow y = -x + \ln 2 - 1$

2) $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ xe^{-x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

a) cada trozo es continuo y derivable (exponencial e identidad), habrá que ver si es continua y derivable en 0:

Continuidad: $\begin{cases} f(0) = e^0 - 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = 0 \text{ es continua en } 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (xe^{-x^2}) = 0 \end{cases}$

Derivabilidad: $f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x > 0 \\ e^{-x^2} (1 - 2x^2) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$f'(0^+) = e^0 = 1$

$\rightarrow f'(0) = 0$

$f'(0^-) = e^0(1 - 0) = 1$

b) La función pasa por $(0, 0)$, "antes" del origen la gráfica es el trozo xe^{-x^2} y esta función es negativa en $(-\infty, 0)$, luego el área pedida será:

$A = \left| \int_{-1}^0 xe^{-x^2} dx \right| = (*) = \left| -\frac{1}{2}e^{-x^2} \right|_{-1}^0 = \left| -\frac{1}{2}e^0 + \frac{1}{2}e^{-1} \right| = \left| -\frac{1}{2} + \frac{1}{2e} \right| = \frac{e-1}{2e}$ u.a.

$(*) \int xe^{-x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = -x^2 \\ dt = -2x dx \end{array} \right\} = -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$

3) $r \equiv \begin{cases} x = a + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x-1}{2} = y+2 = \frac{z}{3} \rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 + 2n \\ y = -2 + n \\ z = 3n \end{cases}$

a) r y s se cortan, luego el sistema tiene que ser compatible determinado, veamos:

$\left. \begin{array}{l} a + t = 1 + 2n \\ 1 - 2t = -2 + n \\ 4 - t = 3n \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} t - 2n = 1 - a \\ 2t + n = 3 \\ t + 3n = 4 \end{array} \right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 - a \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

para que sea compatible determinado tiene que ser $r(A)=r(A')=2$, es decir, que el determinante de la matriz ampliada tiene que ser cero:

$$|A'| = 4 - 6 + 6(1 - a) - (1 - a) - 9 + 16 = 10 - 5a = 0 \rightarrow a = 2$$

b) Para hallar el punto de corte habrá que resolver el sistema para $a = 2$

$$\left. \begin{array}{l} t - 2n = -1 \\ 2t + n = 3 \\ t + 3n = 4 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} t - 2n = -1 \\ 2t + n = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} t = 2n - 1 \\ 2(2n - 1) + n = 3 \end{array} \right\} \rightarrow 4n + n = 3 + 2 \rightarrow n = 1$$

$t = 2 - 1 = 1$, hallemos el punto de corte, P

$$P = \begin{cases} x = 2 + t = 2 + 1 = 3 \\ y = 1 - 2t = 1 - 2 = -1 \\ z = 4 - t = 4 - 1 = 3 \end{cases}, \text{ o también } P = \begin{cases} x = 1 + 2n = 1 + 2 = 3 \\ y = -2 + n = -2 + 1 = -1 \\ z = 3n = 3 \end{cases}$$

luego, el punto de corte es $P(3, -1, 3)$

4) a) Discusión del sistema según los valores de m:

$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = -4 \\ 3x + my + z = m - 1 \\ 2x + my = -2 \end{array} \right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & m & 1 \\ 2 & m & 0 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & m & 1 & m - 1 \\ 2 & m & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

veamos los posibles rangos:

$$|A| = 2 - 3m + 2m - m = 2 - 2m = 0 \Rightarrow m = 1$$

Para $m = 1$ $r(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, veamos el rango de la matriz ampliada

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow r(A') = 2 = r(A) \text{ Sistema Compatible}$$

Indeterminado

Para $m \neq 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow r(A') = 3 = r(A)$ Sistema Compatible Determinado

b) Para $m = 1$

$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = -4 \\ 3x + y + z = 0 \\ 2x + y = -2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad 1 \\ 3 \quad 1 \end{array} \right\} \neq 0 \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = z - 4 \\ 3x + y = -z \end{array} \right\} \text{ con } z = t \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = t - 4 \\ 3x + y = -z \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = t - 4 \\ -3x - y = t \end{array} \right\} \rightarrow -2x = 2t - 4 \rightarrow x = 2 - t \rightarrow y = -t - 3(2 - t) = -6 + 2t$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -6 + 2t \\ z = t \end{cases}$$

Para $m \neq 1 \Rightarrow |A| = 2 - 2m$, lo resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 \\ m-1 & m & 1 \\ -2 & m & 0 \end{vmatrix}}{2-2m} = \frac{-m^2 + 3m - 2}{2-2m} = \frac{-(m-1)(m-2)}{-2(m-1)} = \frac{m-2}{2}, \text{ análogamente}$$

obtenemos las otras dos incógnitas: $y = -1$ y $z = \frac{m+4}{2}$

$$5) f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$$

la gráfica de f pasa por el punto $(2,2) \rightarrow f(2) = 2$

tiene un punto de inflexión de abscisa $x = 0 \rightarrow f''(0) = 0$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \text{ y } f''(x) = 6x + 2a$$

$$f(2) = 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 1 = 8 + 4a + 2b + 1 = 2 \Rightarrow 2b = 2 - 1 - 8 \Rightarrow b = -\frac{7}{2}$$

$$f''(0) = 6 \cdot 0 + 2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

6) Dados los puntos $A(2,1,2)$ y $B(0,4,1)$ y la recta r de ecuación $x = y - 2 = \frac{z-3}{2}$

a) Determina un punto C de la recta r que equidiste de los puntos A y B .

Punto genérico de la recta $r \rightarrow C(t, 2+t, 3+2t)$

Equidista de A y $B \rightarrow d(A, C) = d(B, C)$

$$\rightarrow \sqrt{(t-2)^2 + (2+t-1)^2 + (3+2t-2)^2} = \sqrt{t^2 + (2+t-4)^2 + (3+2t-1)^2}$$

$$t^2 - 4t + 4 + 1 + t^2 - 2t + 4t^2 + 1 - 4t = t^2 + t^2 - 4t + 4 + 4t^2 + 4 - 8t - 10t + 2 = -12t + 8 \rightarrow 2t = 6 \rightarrow t = 3 \rightarrow C(3, 5, 9)$$

b) Área del triángulo ABC , con $A(2,1,2)$, $B(0,4,1)$ y $C(3, 5, 9)$

$$\text{Area} = \frac{|AB \times AC|}{2} = \frac{\sqrt{25^2 + 13^2 + (-11)^2}}{2} = \frac{\sqrt{915}}{2} \text{ u.a.}$$

$$7) A = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, B = (2 \ 1) \text{ y } C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$AB + C = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (2 \ 1) + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$|AB + C| = -56 + 50 = -6 \neq 0$, luego SI tiene inversa, la hallamos:

$$\text{matriz adjunta} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}, \text{ matriz adjunta traspuesta} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -10 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz inversa } (AB + C)^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -10 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{5}{6} \\ \frac{5}{3} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$$