5 Dinámica práctica

EJERCICIOS PROPUESTOS

5.1 Repite el ejercicio resuelto 2 suponiendo que:

a) $\vec{F}$ forma un ángulo de 37° por debajo de la horizontal.

b) ¿Tiene algún efecto sobre la aceleración el cambio en la dirección de F?

a) Las componentes de las fuerzas son:

$$F_x = F \cos\alpha = 2 \cos 37° = 6{,}4 \text{ N}$$
$$F_y = F \operatorname{sen}\alpha = 8 \operatorname{sen} 37° = 4{,}8 \text{ N}$$

Aplicando en el eje OY la segunda ley de la dinámica: $N = F_y + P = 4{,}8 + 2 \cdot 9{,}8 = 24{,}4$ N

b) El cambio en la dirección de F no afecta a la aceleración.

5.2 En el ejercicio resuelto 3, calcula la aceleración del cuerpo y el sentido del movimiento si se sustituye la fuerza que lo mantiene en reposo por una de 37 N que sea:

a) Paralela al plano y hacia arriba.

b) Paralela al plano y hacia abajo.

a) Se aplica la segunda ley de la dinámica:

$$P_x - F = ma; \qquad mg \operatorname{sen}\alpha - F = ma; \qquad a = \frac{26{,}5 - 37}{4{,}5} = -2{,}33 \text{ m s}^{-2} \text{ hacia arriba.}$$

b) En este caso:

$$P_x + F = ma; \qquad mg \operatorname{sen}\alpha + F = ma; \qquad a = \frac{26{,}5 + 37}{4{,}5} = 14{,}11 \text{ m s}^{-2} \text{ hacia abajo.}$$

5.3 ¿Qué relación existe entre las masas de una máquina de Atwood si, estando ambas situadas inicialmente en reposo y al mismo nivel, al cabo de 2 s las separa una distancia vertical de 4 m? En el caso de que la cuerda pudiera aguantar como máximo una tensión igual a 1,2 veces el peso de la masa menor, averigua si se rompería al dejar el sistema en libertad.

Se calcula la aceleración a partir de la ecuación del movimiento:

$$x = \frac{at^2}{2}, \qquad a = \frac{2x}{t^2} = \frac{2 \cdot 2}{2^2} = 1 \text{ m s}^{-2}$$

Se aplica la segunda ley de la dinámica:

$$(m_2 - m_1)g = (m_2 + m_1)a; \qquad m_2(g - a) = m_1(g + a) \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{g + a}{g - a} = \frac{10{,}8}{8{,}8} = 1{,}23$$

Para que la cuerda se rompa: $T = 1{,}2\, m_1 g = 11{,}76\, m_1$. La tensión que soporta la cuerda es:

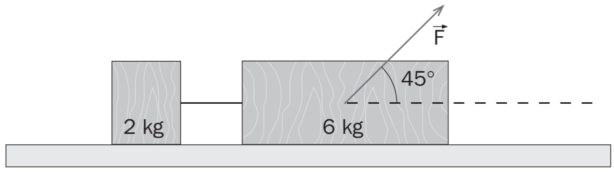
$$T - m_1 g = m_1 a; \qquad T = m_1(g + a) = 10{,}8\, m_1$$

Luego la cuerda no se rompe.

5.4 Tenemos un sistema formado por tres cuerpos de masas m_1, m_2 y m_3, enlazados con dos cuerdas y situados sobre una superficie horizontal. Del primero de los cuerpos tiramos con una fuerza F paralela al plano. Plantea las ecuaciones y demuestra que las tensiones son distintas en cada cuerda.

$$\left.\begin{array}{l} F - T_1 = m_1 a \\ T_1 - T_2 = m_2 a \\ T_2 = m_3 a \end{array}\right\} T_1 = T_2 + m_2 a = (m_2 + m_3)a \Rightarrow T_1 \neq T_2$$

5.5 **Sobre una mesa horizontal sin rozamiento y por la acción de una fuerza $\vec{F}$ que forma un ángulo de 45° con la horizontal, se desliza un sistema de dos masas de 6 y 2 kg enlazadas por una cuerda. Sabiendo que la aceleración del conjunto es 2,5 ms^{-2}, averigua el valor de $\vec{F}$. La tensión de la cuerda, ¿depende del cuerpo al que se aplica la fuerza $\vec{F}$?**



Aplicando el segundo principio a cada cuerpo por separado:

$$\left.\begin{array}{l} F_x - T = m_1a \\ T = m_2a \end{array}\right\} F_x = (m_1 + m_2)a = 20 \text{ N}$$

Sustituyendo en la expresión de la componente de la fuerza se tiene:

$$F = \frac{F_x}{\cos\alpha} = \frac{20}{\cos 45°} = 28{,}3 \text{ N}$$

El valor de la tensión depende del cuerpo al que se aplique la fuerza, ya que si F se aplica a m_1, $T = m_2a$; y si se aplica a m_2, $T = m_1a$.

5.6 **Una caja de madera de 28 kg de masa descansa sobre una mesa horizontal. Al aplicar una fuerza de 48 N, la caja permanece inmóvil y al aplicar una fuerza de 62 N, adquiere una aceleración de 0,5 ms^{-2}. ¿Cuánto vale la fuerza de rozamiento en cada caso?**

Cuando no se mueve, $F - f_r = 0 \Rightarrow f_r = 48$ N

Despejando del caso en el que se desplaza con aceleración:

$$F - f_r = ma; \Rightarrow f_r = F - ma = 62 - 28 \cdot 0{,}5 = 48 \text{ N}$$

5.7 **Se empuja un bloque de masa m = 3 kg contra una pared vertical mediante una fuerza horizontal F = 50 N. Si el coeficiente de rozamiento estático máximo es μ = 0,6, averigua si el bloque desliza hacia abajo.**

En este caso la normal está en la dirección horizontal y el movimiento se produce en dirección vertical.

$$\left.\begin{array}{l} N = F \\ P = mg = 3 \cdot 9{,}8 = 29{,}4 \text{ N} \end{array}\right\} f_r = \mu N = \mu F = 0{,}6 \cdot 50 = 30 \text{ N};$$

Como 30 > 29,4, no desliza.

5.8 **¿Qué ocurriría con el movimiento de la Luna si de repente desapareciera la atracción gravitatoria entre la Tierra y la Luna?**

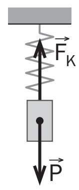
No podría continuar en órbita. Se movería en línea recta a velocidad constante.

5.9 **¿A qué velocidad tiene que pasar por el punto más bajo la masa de un péndulo de L = 20 cm para que en este punto la tensión sea igual a tres veces su peso?**

La fuerza centrípeta es la resultante de todas las que se aplican sobre el cuerpo. Se plantea y se despeja la velocidad.

$$T - mg = \frac{mv^2}{R}; \qquad 3\text{ mg} - \text{mg} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}2} = 1{,}98 \text{ ms}^{-1}$$

5.10 **Un cuerpo de 6 kg pende inmóvil de un resorte de constante recuperadora k = 3 Ncm^{-1}. Haz el diagrama de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo y calcula el valor de cada una de ellas. ¿Cuál es el alargamiento del muelle?**



Las fuerzas que actúan son el peso y la fuerza recuperadora del muelle.

$$F_{muelle} - P = 0; \qquad P = mg = 6 \cdot 9{,}8 = 58{,}8 \text{ N}; \qquad F_{muelle} = 58{,}8 \text{ N}$$

$$F_{muelle} = kx \Rightarrow x = \frac{58{,}8}{3} = 19{,}6 \text{ cm}$$

5.11 Repite el problema anterior suponiendo que el mismo cuerpo pende de dos resortes iguales de constante recuperadora $k = 1,5 \text{ N cm}^{-1}$ colocados en paralelo. Compara los resultados con los anteriores.

La fuerza que realiza cada muelle será la mitad que en el caso anterior.

$$2F_{muelle} = mg \Rightarrow F_{muelle} = \frac{mg}{2} = \frac{58,8}{2} = 29,4 \text{ N}$$

$$x = \frac{F_{muelle}}{k} = \frac{29,4}{3} = 9,8 \text{ cm}$$

MOVIMIENTO RECTILÍNEO POR LA ACCIÓN DE FUERZAS CONSTANTES

5.12 Un globo con todos sus accesorios pesa 180 kg y desciende con una aceleración de $0,2 \text{ m s}^{-2}$. Calcula el lastre que tiene que soltar para ascender con la misma aceleración.

Se calcula en primer lugar la fuerza que tira del globo hacia arriba.

$$F - P = -ma; \quad F = m(g - a) = 180(9,8 - 0,2) = 1728 \text{ N};$$

Para que ascienda se plantea la ecuación con la aceleración positiva.

$$F - mg = ma \Rightarrow m = \frac{F}{g + a} = \frac{1728}{9,8 + 0,2} = 172,8 \text{ kg}$$

Tiene que soltar 7,2 kg.

5.13 Calcula el peso de un objeto de 25 kg dentro de un ascensor que:

a) Sube aumentando su velocidad en $1,5 \text{ m s}^{-1}$ cada segundo.

b) Sube disminuyendo su velocidad en $1,5 \text{ m s}^{-1}$ cada segundo.

c) Baja a velocidad constante.

En los tres casos, sobre el cuerpo únicamente actúan la atracción gravitatoria y la reacción normal que sería la lectura de una báscula colocada en el ascensor.

a) $N - P = ma; \quad N = m(g + a) = 25(9,8 + 1,5) = 282,5 \text{ N}$

b) $P - N = ma; \quad N = m(g - a) = 25(9,8 - 1,5) = 207,5 \text{ N}$

c) $a = 0; \quad P = N = mg = 25 \cdot 9,8 = 245 \text{ N}$

5.14 Un muchacho se encuentra en la cabina de un ascensor que sube acelerando y pretende medir su aceleración. Para ello suspende un cuerpo de 0,6 kg del extremo de un dinamómetro y observa que este indica 6,9 N.

a) ¿Cuál es la aceleración del ascensor?

b) Si el ascensor frenase con la misma aceleración, ¿cuál sería la indicación del dinamómetro?

Las dos fuerzas que actúan en todo momento sobre el cuerpo son la atracción gravitatoria y la recuperadora del muelle.

a) $F - mg = ma; \quad a = \dfrac{F - mg}{m} = \dfrac{6,9 - 5,88}{0,6} = 1,7 \text{ m s}^{-2}$

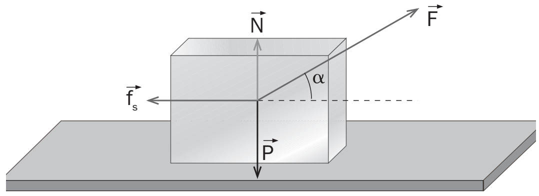
b) $F - mg = -ma; \quad F = m(g - a) = 0,6(9,8 - 1,7) = 4,9 \text{ N}$

5.15 Un camión transporta una caja. Si el coeficiente de rozamiento estático máximo entre la caja y el suelo del camión es $\mu_s = 0,56$, calcula la aceleración máxima que puede adquirir el camión sin que la caja deslice.

La fuerza de rozamiento, como mucho, debe valer lo mismo que la fuerza que provoca el movimiento:

$$f_s = \mu_s N = \mu_s mg = ma \Rightarrow a = 0,56 \cdot 9,8 = 5,5 \text{ m s}^{-2}$$

5.16 Un cuerpo de 400 N de peso descansa sobre un plano horizontal. El coeficiente de rozamiento estático entre el cuerpo y el plano es $\mu_s = 0,6$.



a) ¿Qué fuerza horizontal mínima hay que aplicar para poner el cuerpo en movimiento?
b) Calcula la fuerza F mínima para ponerlo en movimiento si forma un ángulo $\alpha = 10°, 20°, \dots, 50°$ con la horizontal.
c) Encuentra el ángulo para el cual F es mínima.

a) La fuerza debe ser mayor que la de rozamiento estática:

$$F > f_s = \mu_s mg = 0,6400 = 240 \text{ N}$$

b) El valor de la fuerza de rozamiento ahora depende de la reacción normal:

$$f_s = \mu_s N = \mu_s(P - F_y);$$

$$F_x > f_s; \qquad F \cos \alpha > \mu_s(mg - F \text{ sen } \alpha)$$

$$F > \frac{\mu_s mg}{\cos\alpha + \mu_s \text{ sen}\alpha} = \frac{240}{\cos\alpha + 0,6 \text{ sen}\alpha}$$

Para cada uno de los ángulos dados se tiene:

α	10°	20°	30°	40°	50°
F(N)	1,09	1,14	1,17	1,15	1,1

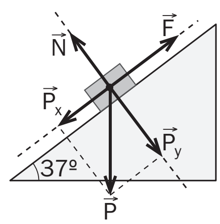
c) Como depende del ángulo a, se deriva con respecto a este y se iguala a cero.

$$\frac{dF}{d\alpha} = \frac{-240(-\text{sen}\alpha + 0,6 \cos\alpha)}{(\cos\alpha + 0,6 \text{ sen}\alpha)^2} = 0; \qquad \text{sen}\alpha = 0,6 \cos\alpha; \qquad \text{tg}\alpha = 0,6 \Rightarrow \alpha = 31°$$

5.17 Un cuerpo de masa m sube a velocidad constante por un plano inclinado 37° sin rozamiento bajo la acción de una fuerza F = 177 N paralela al plano.

a) Calcula el valor de la masa.
b) Si F deja de ejercerse, ¿con qué aceleración baja el cuerpo?

A partir del esquema de fuerzas de la imagen se tiene:



a) $F = P_x = mg \text{ sen}\alpha; \qquad m = \dfrac{F}{g \text{ sen}\alpha} = \dfrac{177}{9,8 \text{ sen}37°} = 30,1 \text{ kg}$

b) $P_x = ma_x; \qquad a_x = g \text{ sen}\alpha = 9,8 \cdot 0,6 = 5,9 \text{ m s}^{-2}$

5.18 Se lanza un cuerpo de 350 g con velocidad inicial de 5 m s^{-1} sobre un plano horizontal. Si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano es $\mu = 0,15$, calcula el espacio recorrido antes de detenerse.

La única fuerza que actúa sobre el cuerpo es la de rozamiento. A partir de su valor se calcula la aceleración.

$$f_k = ma; \qquad \mu mg = ma \Rightarrow a = 0,15 \cdot 9,8 = 1,47 \text{ m s}^{-2}$$

Sustituyendo en las ecuaciones del movimiento se tiene:

$$v^2 = v_0^2 - 2a(x - x_0); \qquad 0 = 5^2 - 2 \cdot 1,47(x - x_0); \qquad x - x_0 = \frac{25}{2 \cdot 1,47} = 8,5 \text{ m}$$

5.19 **Un cuerpo de 8 kg se mueve a velocidad constante sobre un plano horizontal por la acción de una fuerza de 32 N. Se inclina el plano un ángulo de 37° y se elimina la fuerza.**

a) ¿Con qué aceleración baja?

b) ¿Qué fuerza paralela al plano hay que aplicar para que baje a velocidad constante?

a) Si bajo la acción de una fuerza el cuerpo se mueve con v = cte es porque hay un rozamiento con la superficie del mismo valor que la fuerza. Se calcula el coeficiente de rozamiento para poder aplicarlo después en el plano inclinado.

$$F = \mu_k mg; \qquad \mu_k = \frac{F}{mg} = \frac{32}{8 \cdot 9{,}8} = 0{,}41;$$

La fuerza favorable al movimiento del cuerpo es la componente horizontal del peso.

$$\left.\begin{array}{l} P_x - f_k = ma \\ f_k = \mu N = \mu P_y \end{array}\right\} mg\ \text{sen}\alpha - \mu_k\ mg\ \cos\alpha = ma \Rightarrow a = 9{,}8(\text{sen}37° - 0{,}41\ \cos37°) = 2{,}7\ \text{m}\,\text{s}^{-2}$$

b) La fuerza buscada al sumarla a la de rozamiento debe ser igual que la componente P_x.

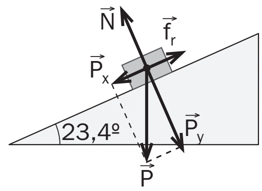
$$P_x = F + f_k \Rightarrow F = P_x - f_k = mg\ \text{sen}\alpha - \mu mg\ \cos\alpha = 8 \cdot 9{,}8(\text{sen}37° - 0{,}41\ \cos37°) = 21{,}6\ \text{N}$$

5.20 **Para encontrar el coeficiente de rozamiento cinético entre un taco de plástico y una superficie de madera, se coloca el taco sobre la superficie y se inclina esta hasta conseguir que descienda a velocidad constante. El ángulo con la horizontal en estas circunstancias es de 23,4°. Halla el coeficiente de rozamiento cinético.**

Este es el método que se utiliza habitualmente en los laboratorios escolares para determinar el coeficiente de rozamiento de diferentes superficies.

$$f_r = P_x; \qquad \mu N = P_x; \qquad \mu mg\ \cos\alpha = mg\ \text{sen}\ \alpha$$

$$\mu = \text{tg}\ \alpha = \text{tg}23{,}4° = 0{,}43$$



5.21 **Un bloque de masa m sube a velocidad constante por un plano inclinado sin rozamiento que forma un ángulo de 60° con la horizontal, por la acción de una fuerza horizontal F de 230 N.**

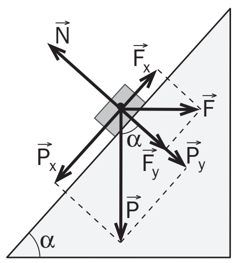
a) Calcula el valor de la masa.

b) ¿Cuánto ha de valer F para que el cuerpo suba a velocidad constante por un plano de la misma inclinación pero con rozamiento de coeficiente μ = 0,15?

a) Si la velocidad es constante, la fuerza F debe tener el mismo valor que la componente del peso que lo frena.

$$F_x = P_x; \qquad F\cos\alpha - mg\ \text{sen}\alpha = 0$$

$$m = \frac{F\cos\alpha}{g\ \text{sen}\alpha} = \frac{230\ \cos60°}{9{,}8\ \text{sen}60°} = 13{,}5\ \text{kg}$$



b) Al planteamiento anterior hay que añadir la fuerza de rozamiento.

$$F_x - P_x - f_k = 0$$

$$f_k = \mu N = \mu(F_y + P_y) = \mu F\ \text{sen}\alpha + \mu mg\ \cos\alpha$$

$$F\cos\alpha - mg\ \text{sen}\alpha - \mu_k(mg\ \cos\alpha + F\ \text{sen}\alpha) = 0; \qquad F(\cos\alpha + \mu\ \text{sen}\alpha) = mg(\text{sen}\alpha + \mu\ \cos\alpha)$$

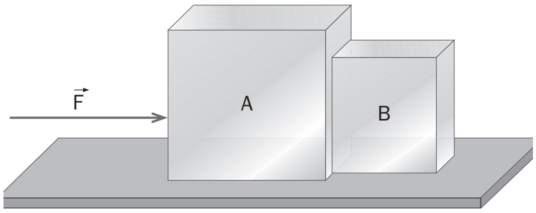
$$F = mg\frac{\text{sen}\alpha - \mu\ \cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\ \text{sen}\alpha} = 13{,}5 \cdot 9{,}8\frac{\text{sen}60° - 0{,}15\ \cos60°}{\cos60° + 0{,}15\ \text{sen}60°} = 197{,}6\ \text{N}$$

5.22 Dos bloques A y B de 8 y 4 kg respectivamente, descansan sobre un plano horizontal sin rozamiento, tal como se ve en el dibujo. Se empuja A con una fuerza de 36 N. Calcula:

a) La fuerza de contacto entre los bloques y la aceleración con que se mueven.

b) Lo mismo pero suponiendo que existe entre los bloques y el plano un rozamiento de coeficiente $\mu = 0{,}3$.

c) Analiza los resultados de los apartados anteriores si se intercambia la posición de los bloques.



a) Aplicando el segundo principio de la dinámica a cada cuerpo por separado:

$$\left.\begin{aligned} 36 - F_c &= m_A a \\ F_c &= m_B a \end{aligned}\right\} 36 = (m_A + m_B)a;$$

$$a = \frac{36}{12} = 3\ \text{m}\,\text{s}^{-2};$$

$$F_c = 4 \cdot 3 = 12\ \text{N}$$

b) Se incluyen las fuerzas de rozamiento de cada cuerpo en la aplicación del segundo principio.

$$\left.\begin{aligned} 36 - F_c - f_{rA} &= m_A a \\ F_c - f_{rB} &= m_B a \end{aligned}\right\} 36 - \mu(8 + 4)9{,}8 = (8 + 4)a;$$

$$a = \frac{0{,}72}{12} = 0{,}06\ \text{m}\,\text{s}^{-2};$$

$$F_c - \mu m_B g = m_B a; \quad F_c = 4(0{,}06 + 0{,}3 \cdot 9{,}8) = 12\ \text{N}$$

c) Si se intercambian los bloques, la fuerza de contacto entre ambos es diferente. En el primer caso, si se intercambia la posición de los bloques y teniendo en cuenta el valor de la aceleración se obtiene para la fuerza de contacto el valor:

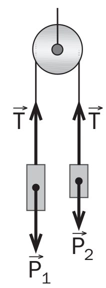
$$a = 3\ \text{m}\,\text{s}^{-2}; \quad F_c = m_B a = 8 \cdot 3 = 24\ \text{N}$$

MOVIMIENTO DE CUERPOS ENLAZADOS

5.23 Dos cuerpos de 4 y 5 kg respectivamente penden de los extremos de una cuerda que pasa por la garganta de una polea. El sistema se deja en libertad cuando los cuerpos están a la misma altura. ¿Qué distancia vertical los separará al cabo de 2 s?

Se plantean las ecuaciones para cada cuerpo por separado:

$$\left.\begin{aligned} P_1 - T &= m_1 a \\ T - P_2 &= m_2 a \end{aligned}\right\} (m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = \frac{(5 - 4)}{(5 + 4)}9{,}8 = 1{,}09\ \text{m}\,\text{s}^{-2}$$



Sustituyendo en las ecuaciones del movimiento:

$$x = \frac{at^2}{2} = \frac{1{,}09 \cdot 2^2}{2} = 2{,}18\ \text{m}; \quad d = 2 \cdot 2{,}18 = 4{,}36\ \text{m}$$

5.24 Una grúa levanta un bloque de piedra de 130 kg que está unido a su vez a otro bloque de 80 kg. El conjunto asciende con aceleración de 0,9 $\text{m}\,\text{s}^{-2}$. Calcula la fuerza que realiza la grúa y la tensión de la cuerda que une los dos bloques.

Se plantean las ecuaciones para cada cuerpo por separado:

$$F - P_1 - P_2 = ma;$$

$$F - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a \Rightarrow F = (m_1 + m_2)(g + a) = 210(9{,}8 + 0{,}9) = 2247\ \text{N}$$

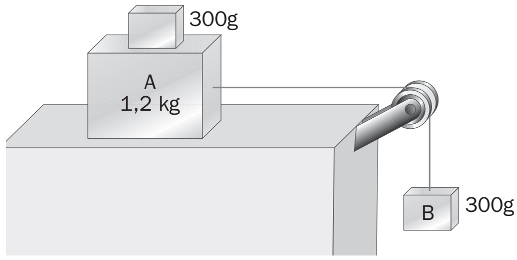
$$T - m_1 g = m_1 a \Rightarrow T = m_1(g + a) = 80(9{,}8 + 0{,}9) = 856\ \text{N}$$

5.25 El sistema de la figura se mueve a velocidad constante.

a) Calcula el coeficiente de rozamiento μ_k entre el bloque y el plano.

b) Se retira el sobrepeso de 300 g del cuerpo A y se cuelga de B. ¿Con qué aceleración se mueve el sistema?

c) ¿Cuáles son las tensiones en las cuerdas?



a) Aplicando el segundo principio a ambos cuerpos y despejando del primer miembro el coeficiente μ:

$$\left.\begin{array}{l} P_B - T = m_B a \\ T = m_A a \end{array}\right\} m_B g - \mu m_A g = (m_B + m_A)a; \quad a = 0(v = cte)$$

$$\mu = \frac{m_1}{m_2} = \frac{0,3}{1,5} = 0,2$$

b) Se vuelven a plantear las ecuaciones teniendo ahora en cuenta que $m_A = 1,2$ kg y $m_B = 600$ g.

$$m_B g - \mu m_A g = (m_B + m_A)a; \quad 0,6 \cdot 9,8 - 0,2 \cdot 1,2 \cdot 9,8 \Rightarrow a = 1,96 \text{ ms}^{-2}$$

c) $T_1 - \mu m_A g = m_A a$; $T_1 = m_A(a + \mu g) = 12(1,96 + 0,2 \cdot 9,8) = 4,7$ N

$T_2 = 0,3(9,8 - 1,96) = 2,3$ N

5.26 Un cuerpo de 3 kg de masa descansa sobre un plano horizontal sin rozamiento. Está unido mediante una cuerda que pasa por la garganta de una polea a otro cuerpo de 4 kg que pende verticalmente. Averigua qué fuerza horizontal hay que aplicar al primer cuerpo para:

a) Impedir que el sistema se mueva.

b) Conseguir que el cuerpo que pende ascienda 2 m en 1 s.

a) La fuerza con la que hay que tirar de él debe ser igual al peso del cuerpo que cuelga.

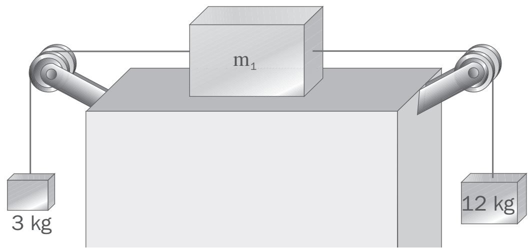
$$F = m_1 g = 4 \cdot 9,8 = 39,2 \text{ N}$$

b) Se calcula en primer lugar el valor de la aceleración del movimiento para después calcular el valor de la fuerza.

$$x = \frac{at^2}{2}; \quad a = \frac{2x}{t^2} = \frac{2 \cdot 2}{1} = 4 \text{ ms}^{-2}$$

$$F = m_1 g + (m_1 + m_2)a = 4 \cdot 9,8 + 7 \cdot 4 = 67,2 \text{ N}$$

5.27 El coeficiente de rozamiento entre m_1 y el plano que muestra la figura vale $\mu_k = 0,3$. En 2 s, m_1 recorre 2 m sobre el plano. Encuentra el valor de m_1 y las tensiones de las cuerdas.



En primer lugar se calcula el valor de la aceleración:

$$x = \frac{at^2}{2}; \quad a = \frac{2x}{t^2} = \frac{2 \cdot 2}{4} = 1 \text{ ms}^{-2}$$

Se aplica el segundo principio de la dinámica:

$$\left.\begin{array}{l} m_2 g - T_1 = m_2 a \\ T_1 - T_2 - \mu m_1 g = m_1 a \\ T_2 - m_3 g = m_3 a \end{array}\right\} m_2 g - \mu m_1 g - m_3 g = (m_1 + m_2 + m_3)a$$

Se despeja el valor de m_1:

$$m_1 = \frac{(m_2 - m_3)g - (m_2 + m_3)a}{a + \mu g} = \frac{9 \cdot 9,8 - 15 \cdot 1}{1 + 0,3 \cdot 9,8} = 18,6 \text{ kg}$$

$$T_1 = m_2(g - a) = 12(9,8 - 1) = 105,6 \text{ N}; \quad T_2 = m_3(g + a) = 3(9,8 + 1) = 32,4 \text{ N}$$

5.28 Un bloque A de 50 kg descansa sobre una mesa horizontal unido a otro boque B de 8 kg que cuelga mediante una cuerda que pasa a través de una polea. El sistema está inicialmente en reposo. Los coeficientes de rozamiento entre el bloque A y el plano son $\mu_s = 0,27$ y $\mu_k = 0,21$.

a) ¿Cuánto vale, en estas condiciones, la fuerza de rozamiento entre el cuerpo y el plano?

b) ¿Con qué fuerza hay que tirar de B para poner en movimiento el sistema?

c) Si se mantiene esta fuerza, ¿qué aceleración adquirirá el conjunto?

a) Si el cuerpo está en reposo se utiliza el coeficiente de rozamiento estático.

$$f_s = m_1g = 8 \cdot 9,8 = 78,4 \text{ N}$$

b) Para ponerlo en movimiento hay que vencer el valor máximo de la fuerza de rozamiento estática.

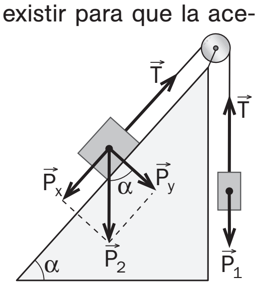
$$f_{s\ máx} = \mu mg = 0,27 \cdot 50 \cdot 9,8 = 132,3 \text{ N}$$

$$F + m_1g - f_{s\ máx} = 0 \Rightarrow F = 132,3 - 78,4 = 53,8 \text{ N}$$

c) Cuando se inicia el movimiento hay que utilizar el coeficiente de rozamiento dinámico.

$$F + m_1g - f_k = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = \frac{F + m_1g - \mu m_2g}{(m_1 + m_2)} = \frac{132,2 - 0,21 \cdot 50 \cdot 9,8}{58} = 0,5 \text{ ms}^{-2}$$

5.29 Un bloque de 5 kg descansa sobre un plano inclinado 60°, unido mediante una cuerda que pasa por una polea a otro bloque de 3 kg que pende verticalmente. Averigua el sentido y la aceleración del movimiento suponiendo que no existe rozamiento. Calcula qué coeficiente de rozamiento debería existir para que la aceleración se redujera en un 20 %.



a) Se plantean las ecuaciones y se supone que el movimiento se produce en un sentido. Si el valor que se obtiene para la aceleración es negativo, el sentido será el contrario. Supongamos que el movimiento se hace cayendo por el plano inclinado:

$$\left.\begin{array}{l} T - P_1 = m_1a \\ P_{2x} - T = m_2a \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} T - m_1g = m_1a \\ m_2g \text{ sen}60° - T = m_2a \end{array}\right\} a = \frac{92,4 - 29,4}{8} = 1,6 \text{ ms}^{-2}$$

b) El nuevo valor de la aceleración es: $a = 0,8 \cdot 1,6 = 1,28 \text{ ms}^{-2}$

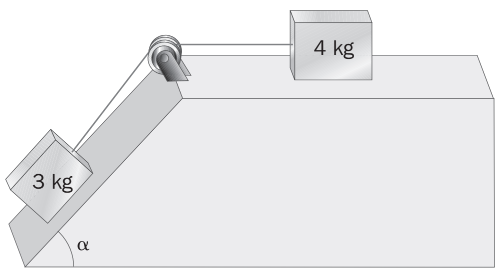
$$\left.\begin{array}{l} P_{2x} - T - f_k = m_2a \\ T - m_1g = m_1a \end{array}\right\} f_k = P_{2x} - m_1g - (m_1 + m_2)a = 42,4 - 29,4 - 10,24 = 2,76 \text{ N}$$

$$\mu = \frac{f_k}{m_2g \cos\alpha} = \frac{2,76}{5 \cdot 9,8 \cos 60°} = 0,11$$

5.30 El sistema de la figura se mueve con $a = 1,8 \text{ ms}^{-2}$ (suponiendo que no hay rozamiento).

a) Encuentra el valor de α.

b) Si el coeficiente de rozamiento entre los bloques y el plano fuese $\mu = 0,1$, ¿con qué aceleración se moverìa el sistema?



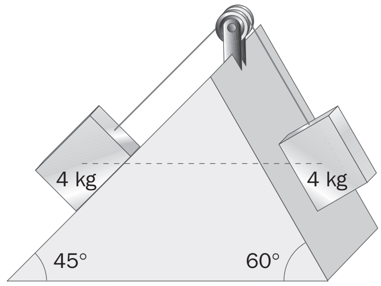
a) Se aplica la ecuación fundamental de la dinámica.

$$\left.\begin{array}{l} P_{2x} - T = m_2a \\ T = m_1a \end{array}\right\} m_2g \text{ sen } \alpha = (m_1 + m_2)a \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{(m_1 + m_2)a}{m_2g} = \frac{7 \cdot 1,8}{3 \cdot 9,8} = 0,43; \quad \alpha = 25,4°$$

b) Planteamos las mismas ecuaciones incluyendo la fuerza de rozamiento.

$$\left.\begin{array}{l} P_{2x} - T - f_{k2} = m_2a \\ T - f_{k1} = m_1a \end{array}\right\} P_{2x} - f_{k1} - f_{k2} = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = \frac{m_2g \text{ sen}\alpha - \mu g(m_1 + m_2 \cos\alpha)}{m_1 + m_2} = 2,1 \text{ ms}^{-2}$$

5.31 **Los dos cuerpos de la figura están inicialmente a la misma altura. Al cabo de 1 s de empezar el movimiento existe entre los dos un desnivel de 0,2 m. Encuentra el coeficiente de rozamiento entre los cuerpos y el plano.**



Ambos recorren la misma distancia sobre el plano inclinado, calculamos su valor y a partir de él la aceleración del movimiento.

$$h_1 + h_2 = x \text{ sen}45° + x \text{ sen}60° = 0{,}2; \quad x = 0{,}13;$$

$$a = \frac{2x}{t^2} = 0{,}26 \text{ ms}^{-2}$$

Las fuerzas que provocan el movimiento son las proyecciones del peso en la dirección de los planos inclinados.

$$P_{1x} = m_1 g \text{ sen}\alpha = 4 \cdot 9{,}8 \text{ sen}60° = 33{,}9 \text{ N}$$

$$P_{2x} = m_2 g \text{ sen}\beta = 4 \cdot 9{,}8 \text{ sen}45° = 27{,}7 \text{ N}$$

$$f_{k1} = \mu m_1 g \cos\alpha = 19{,}6\ \mu$$

$$f_{k2} = \mu m_2 g \cos\beta = 27{,}7\ \mu$$

$$\sum F = ma; \quad P_{1x} - f_{k1} - P_{2x} - f_{k2} = (m_1 + m_2)a; \ 33{,}9 - (19{,}6 + 27{,}7)\mu - 27{,}7 = 8 \cdot 0{,}26 \Rightarrow \mu = 0{,}088$$

DINÁMICA DEL MOVIMIENTO CIRCULAR

5.32 **Un disco horizontal gira a velocidad angular de 50 rpm alrededor de un eje vertical que pasa por su centro. Averigua la distancia máxima del centro en la que se puede colocar un pequeño objeto para que gire juntamente con el disco sin ser lanzado hacia fuera, teniendo en cuenta que el coeficiente de rozamiento estático entre el disco y el objeto es $\mu_s = 0{,}35$.**

El valor de la fuerza centrípeta del objeto debe coincidir con el de la fuerza de rozamiento para que no salga despedido.

$$F_c = f_r; \quad m\omega^2 R = \mu mg$$

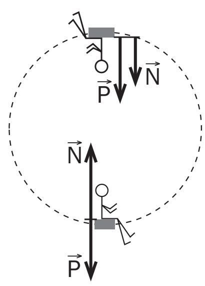
$$R = \frac{\mu g}{\omega^2} = \frac{0{,}35 \cdot 9{,}8}{5{,}23^2} = 0{,}125 \text{ m} = 12{,}5 \text{ cm}$$

5.33 **Un piloto acrobático sigue una trayectoria circular de radio 2000 m en un plano vertical con velocidad de 540 km h^{-1}. Su masa es de 70 kg y lleva una báscula en el asiento.**

a) ¿Qué marca la báscula en el punto más alto y más bajo de la trayectoria?

b) ¿Con qué velocidad ha de pasar por el punto más alto para que la báscula marque cero?

a) La lectura de la báscula es la reacción normal del asiento sobre el piloto. Teniendo en cuenta que la fuerza centrípeta se obtiene como el resultado de la suma de todas las demás, en el punto más alto se tiene:



$$F_c = N + P; \quad N = \frac{mv^2}{R} - mg = \frac{70 \cdot 150^2}{2000} - 70 \cdot 9{,}8 = 101{,}5 \text{ N}$$

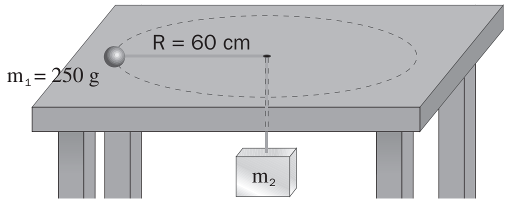
En el punto más bajo:

$$F_c = N - P; \quad N = \frac{mv^2}{R} + mg = 787{,}5 + 686 = 1473{,}5 \text{ N}$$

b) La normal debe ser cero:

$$\frac{mv^2}{R} = mg; \quad v = \sqrt{Rg} = \sqrt{2000 \cdot 9{,}8} = 140 \text{ ms}^{-1}$$

5.34 Una masa $m_1 = 250$ g gira en un círculo horizontal de 60 cm de radio sobre una mesa sin rozamiento, unida mediante una cuerda que pasa por un orificio de la mesa a otra masa m_2. Calcula:



a) La fuerza centrípeta.

b) El valor de m_2 para que su altura se mantenga constante.

a) Se sustituyen los datos en la expresión de la fuerza centrípeta:

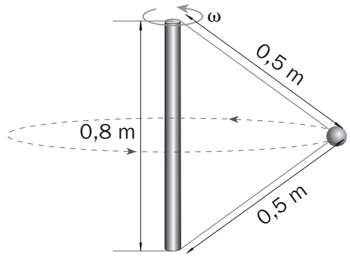
$$F_c = m_1\omega^2 R = 0{,}25(2\pi)^2 0{,}6 = 5{,}9 \text{ N}$$

b) El valor de la fuerza centrípeta es la tensión de la cuerda que, a su vez, es la fuerza que compensa a la del peso:

$$\left.\begin{array}{l} T = P = m_2 g \\ T = F_c = m_1\omega^2 R \end{array}\right\} m_2 g = m_1\omega^2 R$$

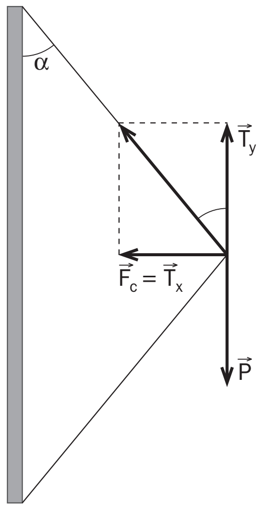
$$m_2 = \frac{m_1\omega^2 R}{2} = \frac{0{,}25 \cdot (2\pi)^2 0{,}6}{9{,}8} = 0{,}6 \text{ kg}$$

5.35 Un cuerpo de 0,25 kg se sujeta de los extremos de una varilla vertical de 0,8 m de altura mediante dos cuerdas de 0,5 m de longitud cada una. Averigua:



a) La velocidad angular mínima a la que debe girar la varilla para que el cuerpo se mantenga en equilibrio con las dos cuerdas tensas.

b) La tensión en cada cuerda cuando el conjunto gira a velocidad angular de 8 rad s^{-1}.



a) Se calcula el ángulo que forman las cuerdas con la horizontal. Para ello contamos con un triángulo rectángulo del que conocemos un cateto y la hipotenusa.

$$\cos\alpha = \frac{0{,}4}{0{,}5} = 0{,}8; \quad \alpha = \arccos 0{,}8 = 36{,}9°$$

$$R = 0{,}5 \text{ sen } \alpha = 0{,}3 \text{ m}$$

Se escribe el valor de cada una de las fuerzas y se aplica el segundo principio de la dinámica. No es necesario que haya tensión en la parte inferior de la cuerda.

$$T_2 = 0;$$

$$\left.\begin{array}{l} T_{1y} = P; \quad T_1 \cos\alpha = mg; \\ T_{1x} = F_c; \quad T_1 \text{ sen } \alpha = m\omega^2 R; \end{array}\right\}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\omega^2 R}{g}; \quad \omega = \sqrt{\frac{g \text{ tg } \alpha}{R}} = \sqrt{\frac{9{,}8 \cdot 0{,}75}{0{,}3}} = 4{,}9 \text{ rad s}^{-1}$$

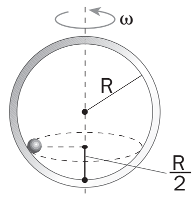
b) La suma de las dos componentes horizontales de las tensiones es la fuerza centrípeta.

$$\left.\begin{array}{l} T_1 \text{ sen}\alpha + T_2 \text{ sen}\alpha = m\omega^2 R \\ T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\alpha + mg \end{array}\right\}$$

$$T_1 - T_2 = \frac{mg}{\cos\alpha} = 3{,}06; \quad T_1 + T_2 = \frac{m\omega^2 R}{\text{sen}\alpha} = 8$$

$$\Rightarrow T_1 = 5{,}5 \text{ N}; \Rightarrow T_2 = 2{,}4 \text{ N}$$

5.36 **Un anillo de 0,5 m de radio gira alrededor de su diámetro en un plano vertical. Una bolita se mantiene en reposo respecto al anillo a una altura sobre el punto más bajo igual a la mitad del radio. ¿A qué velocidad gira el anillo? ¿Cuál será la posición de la bolita si la velocidad se reduce a la mitad?**



Calculando el ángulo de la posición en la que gira, se puede conocer el valor del radio de la circunferencia en la que está girando.

$$\cos\alpha = \frac{\frac{R}{2}}{R} = 0{,}5; \qquad \alpha = 60°; \qquad r = R \text{ sen } \alpha$$

La componente de la normal sobre la horizontal es la fuerza centrípeta de la bola.

$$\left.\begin{array}{l} N\cos\alpha = mg \\ N \text{ sen}\alpha = m\omega^2 r \end{array}\right\} \omega = \sqrt{\frac{g}{R\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{9{,}8}{0{,}5 \cdot 0{,}5}} = 6{,}3 \text{ rad s}^{-1}$$

Despejamos el valor del coseno del ángulo para conocer la posición de la bola cuando su velocidad se reduce a la mitad.

$$\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 R} = \frac{9{,}8}{3{,}13^2 \cdot 0{,}5} = 2$$

Como el cos α no puede ser mayor que 1 $\Rightarrow$ la bolita está en la posición más baja.

FUERZAS ELÁSTICAS

5.37 **Un cuerpo de 1,5 kg unido al extremo de un muelle de longitud natural 40 cm y constante recuperadora $k = 130$ Nm^{-1} pende del techo de un ascensor.**

a) ¿Qué longitud tiene el muelle cuando el ascensor está parado?

b) Con el ascensor en marcha, se observa que el muelle se alarga hasta una longitud de 54 cm. ¿Qué tipo de movimiento tiene el ascensor?

a) La fuerza del peso se compensa con la del muelle:

$$F_k = P; \qquad kx = mg; \qquad x = \frac{mg}{k} = \frac{1{,}5 \cdot 9{,}8}{130} = 0{,}11 \text{ m}; \qquad l = l_0 + x = 40 + 11 = 51 \text{ cm}$$

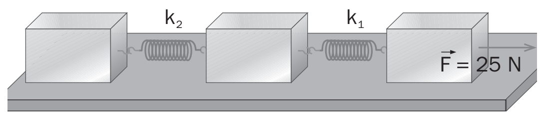
b) Si se produce un alargamiento es debido a que el ascensor se está moviendo con aceleración. Aplicando el segundo principio de la dinámica se tiene:

$$x = l - l_0 = 54 - 40 = 14 \text{ cm};$$

$$\sum F = ma; \qquad kx - mg = ma; \qquad a = \frac{kx - mg}{m} = \frac{130 \cdot 0{,}14 - 1{,}5 \cdot 9{,}8}{1{,}5} = 2{,}3 \text{ m s}^{-2}$$

El ascensor sube con la aceleración obtenida.

5.38 **El sistema de la figura está formado por tres masas iguales de 2 kg unidas por dos muelles de constantes k_1 = = 40 Nm^{-1} y k_2 = 54 Nm^{-1}. Calcula el estiramiento de cada muelle cuando aplicamos una fuerza F = 24 N.**



La aceleración del sistema es:

$$F = (m + m + m)a; \qquad a = \frac{24}{6} = 4 \text{ m s}^{-2}$$

Aplicando el segundo principio de la dinámica a cada cuerpo se obtienen los estiramientos.

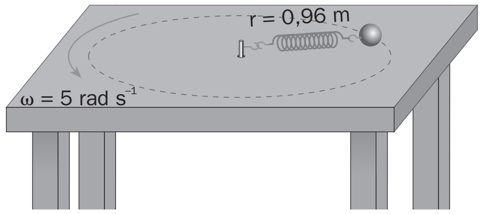
$$F - k_1x_1 = ma; \qquad 24 - 40x_1 = 2 \cdot 4; \qquad x_1 = 0{,}4 \text{ m}$$

$$k_1x_1 - k_2x_2 = ma; \qquad 40 \cdot 0{,}4 - 54x_2 = 2 \cdot 4; \qquad x_2 = 0{,}15 \text{ m}$$

5.39 De un muelle de constante recuperadora k = 100 $N m^{-1}$ pende un cuerpo de masa 2 kg. ¿Cuál debe ser su alargamiento en el equilibrio?

$$kx = mg; \qquad x = \frac{mg}{k} = \frac{2 \cdot 9{,}8}{100} = 0{,}196 \text{ m} = 19{,}6 \text{ cm}$$

5.40 Una masa de 1 kg gira en un círculo horizontal de 96 cm de radio sobre una mesa sin rozamiento a velocidad angular constante de 5 rad s^{-1}. La masa está unida a un muelle de longitud natural 75 cm. Calcula la constante recuperadora del muelle.



La fuerza centrípeta que mantiene el movimiento es la que el muelle realiza para intentar contraerse.

$$F_c = F_k; \qquad m\omega^2R = kx; \qquad 1 \cdot 5^2 \cdot 0{,}96 = k(0{,}96 - 0{,}75); \qquad k = 114{,}3 \text{ N m}^{-1}$$