EJERCICIO

Dadas las rectas

$$r:\ \frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{3} \quad \text{y} \quad s:\ x-1=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-8}{2}$$

se pide:

a) Comprueba que las rectas *r* y *s* se cruzan.
b) Determina la ecuación de la perpendicular común.
c) Calcula la distancia entre ambas.

---

a) POSICIÓN RELATIVA

Las rectas

$$r: \frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{3} \quad \text{y} \quad s: \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-8}{2}$$

vienen determinadas por

$$r:\begin{cases} A(4,\ 1,-2) \\ \vec{u}\,(2,-1,\ 3) \end{cases} \quad \text{y} \quad s:\begin{cases} B(1,-2,\ 8) \\ \vec{v}\,(1,-2,\ 2) \end{cases}$$

y tienen distinta dirección dado que sus vectores de dirección no son proporcionales

$$\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{-2}$$

$\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes

o bien, porque $R\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix}=2$, como podemos observar:

$$R\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}=2 \quad \text{por ser} \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-3 \neq 0$$

Por lo tanto, las rectas serán secantes o rectas que se cruzan.

Para saber a cual de los dos casos corresponden estudiaremos si los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes o independientes.

$$\overrightarrow{AB}(-3,-3,10)$$

$$\begin{vmatrix} -3 & -3 & 10 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}=6-9-40+10+12-18=-39 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB},\ \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son linealmente independientes}$$

Por lo tanto, las rectas r y s se cruzan.

b) PERPENDICULAR COMÚN

<u>Método 1</u>

Sea *t* la perpendicular común a *r* y *s*.

Determinemos los puntos *P* y *Q* de mínima distancia entre ambas rectas, puntos de intersección de la perpendicular común *t* con las rectas *r* y *s*, respectivamente.

$$P=r\cap t \quad \text{y} \quad Q=s\cap t$$

Para ello expresemos las rectas en forma paramétrica, y tomemos los puntos *P* y *Q* como puntos genéricos de sus respectivas rectas.

Debemos utilizar distintos parámetros en cada una de las rectas.

$$r:\begin{cases} x= & 4+2\lambda \\ y= & 1-\ \lambda \\ z= & -2+3\lambda \end{cases} \quad \text{y} \quad s:\begin{cases} x= & 1+\ \mu \\ y= & -2-2\mu \\ z= & 8+2\mu \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} P\in r \ \Rightarrow\ P(4+2\lambda, 1-\lambda,-2+3\lambda) \\ Q\in s \ \Rightarrow\ Q(1+\mu,-2-2\mu, 8+2\mu) \end{array}\right\} \Rightarrow\ \overrightarrow{PQ}(-3-2\lambda+\mu,-3+\lambda-2\mu, 10-3\lambda+2\mu)$$

y teniendo en cuenta que

$$\overrightarrow{PQ}\perp\vec{u} \ \Rightarrow\ \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{u}=0 \ \Rightarrow\ 2(-3-2\lambda+\mu)-1(-3+\lambda-2\mu)+3(10-3\lambda+2\mu)=0$$

$$\overrightarrow{PQ}\perp\vec{v} \ \Rightarrow\ \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}=0 \ \Rightarrow\ 1(-3-2\lambda+\mu)-2(-3+\lambda-2\mu)+2(10-3\lambda+2\mu)=0$$

obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\left.\begin{array}{r} -6-4\lambda+2\mu+3-\lambda+2\mu+30-9\lambda+6\mu=0 \\ -3-2\lambda+\mu+6-2\lambda+4\mu+20-6\lambda+4\mu=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 27-14\lambda+10\mu=0 \\ 23-10\lambda+\ 9\mu=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 14\lambda-10\mu=27 \\ 10\lambda-\ 9\mu=23 \end{array}\right\}$$

Resolviéndolo

$$\left.\begin{array}{r} 70\lambda - 50\mu = \ \ 135 \\ -70\lambda + 63\mu = -161 \end{array}\right\} \Rightarrow 13\mu = -26 \ \Rightarrow \ \mu = -2 \quad \text{y} \quad 10\lambda + 18 = 23 \ \Rightarrow \ \lambda = \frac{1}{2}$$

y con

$$\lambda = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \mu = -2$$

quedan determinados los puntos P y Q.

$$P\left(4 + 2\cdot\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}, -2 + 3\cdot\frac{1}{2}\right) \quad \text{y} \quad Q\big(1 + (-2), -2 - 2(-2), 8 + 2(-2)\big)$$

es decir,

$$P\left(5, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad \text{y} \quad Q(-1, 2, 4)$$

y la recta t queda determinada por P y Q

$$t: \begin{cases} P\left(5, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ Q(-1, 2, 4) \end{cases}$$

o bien, considerando el vector $\overrightarrow{PQ}$

$$\overrightarrow{PQ}\left(-6, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right) \ || \ \vec{w}'(-12, 3, 9) \ || \ \vec{w}(-4, 1, 3)$$

y será

$$t: \begin{cases} Q(-1, 2, 4) \\ \vec{w}(-4, 1, 3) \end{cases}$$

y dada por su ecuación continua es

$$t: \ \frac{x+1}{-4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{3}$$

c) DISTANCIA ENTRE LAS RECTAS

<u>Método 1</u>

$$d(r, s) = d(P, Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(-6)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{36 + \frac{9}{4} + \frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{234}{4}} = \frac{\sqrt{234}}{2} = \frac{\sqrt{3^2 \cdot 2 \cdot 13}}{2} = \frac{3\sqrt{26}}{2}$$

Por lo tanto,

$$d(r, s) = \frac{3\sqrt{26}}{2}$$

b) PERPENDICULAR COMÚN

<u>Método 2</u>

Sea t la perpendicular común a r y s.

Se puede dar la perpendicular común t como intersección de dos planos π_1 y π_2, siendo π_1 el plano que contiene a las rectas r y t, y π_2, el que contiene a s y t.

$$t:\begin{cases}\pi_1\\ \pi_2\end{cases}$$

Un vector director de la perpendicular común t es el producto vectorial de los vectores directores r y s.

$$\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -2 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}\vec{k}=4\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$$

o sea,

$$\vec{w}(4,-1,-3)$$

quedando determinados

$$\pi_1:\begin{cases}A(4,\ 1,-2)\\ \vec{u}(2,-1,\ 3)\\ \vec{w}(4,-1,-3)\end{cases}\quad \text{y} \quad \pi_2:\begin{cases}B(1,-2,\ 8)\\ \vec{v}(1,-2,\ 2)\\ \vec{w}(4,-1,-3)\end{cases}$$

$$\pi_1:\begin{vmatrix}x-4 & y-1 & z+2\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & -1 & -3\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow\ \begin{vmatrix}-1 & 3\\ -1 & -3\end{vmatrix}(x-4)-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & -3\end{vmatrix}(y-1)+\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & -1\end{vmatrix}(z+2)=0\ \Rightarrow$$

$$6(x-4)+18(y-1)+2(z+2)=0\ \Rightarrow\ 6x-24+18y-18+2z+4=0\ \Rightarrow\ 6x+18y+2z-38=0$$

$$\pi_1:\ 3x+9y+z-19=0$$

$$\pi_2:\begin{vmatrix}x-1 & y+2 & z-8\\ 1 & -2 & 2\\ 4 & -1 & -3\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow\ \begin{vmatrix}-2 & 2\\ -1 & -3\end{vmatrix}(x-1)-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{vmatrix}(y+2)+\begin{vmatrix}1 & -2\\ 4 & -1\end{vmatrix}(z-8)=0\ \Rightarrow$$

$$8(x-1)+11(y+2)+7(z-8)=0\ \Rightarrow\ 8x-8+11y+22+7z-56=0\ \Rightarrow\ 8x+11y+7z-42=0$$

$$\pi_2:\ 8x+11y+7z-42=0$$

y se tiene que

$$t:\begin{cases}3x+\ 9y+\ \ z-19=0\\ 8x+11y+7z-42=0\end{cases}$$

c) DISTANCIA ENTRE LAS RECTAS

<u>Método 2</u>

Dadas las rectas

$$r: \frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{3} \quad \text{y} \quad s: \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-8}{2}$$

determinadas por

$$r: \begin{cases} A(4,\ 1,-2) \\ \vec{u}\,(2,-1,\ 3) \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} B(1,-2,\ 8) \\ \vec{v}\,(1,-2,\ 2) \end{cases}$$

consideramos el vector

$$\overrightarrow{AB}(-3,-3,10)$$

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$$

$$\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]=\begin{vmatrix} -3 & -3 & 10 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}=6-9-40+10+12-18=-39$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\vec{k}=4\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}\,(4,-1,-3)$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{4^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{16+1+9}=\sqrt{26}$$

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\frac{|-39|}{\sqrt{26}}=\frac{39}{\sqrt{26}}=\frac{39\sqrt{26}}{26}=\frac{3\sqrt{26}}{2}$$

$$d(r,s)=\frac{3\sqrt{26}}{2}$$

c) DISTANCIA ENTRE LAS RECTAS

Método 3

Dadas las rectas

$$r: \frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3} \quad \text{y} \quad s: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-8}{2}$$

determinadas por

$$r: \begin{cases} A(4,\ 1,-2) \\ \vec{u}(2,-1,\ 3) \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} B(1,-2,\ 8) \\ \vec{v}(1,-2,\ 2) \end{cases}$$

calculemos la ecuación del plano paralelo a una de las rectas y que contenga a la otra, por ejemplo, el plano π_s paralelo a *r* y que contiene a la recta *s*.

$$\pi_s \ /\ s \subset \pi_s \ \text{ y } \ r \parallel \pi_s$$

Así pues,

$$\pi_s: \begin{cases} B(1,-2,\ 8) \\ \vec{v}(1,-2,\ 2) \\ \vec{u}(2,-1,\ 3) \end{cases} \text{ de donde } \ \pi_s: \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-8 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}(x-1) - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}(y+2) + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}(z-8) = 0 \ \Rightarrow\ -4(x-1) + 1(y+2) + 3(z-8) = 0$$

$$-4x + 4 + y + 2 + 3z - 24 = 0 \ \Rightarrow\ -4x + y + 3z - 18 = 0$$

$$\pi_s:\ 4x - y - 3z + 18 = 0$$

La distancia entre las rectas *r* y *s* será la distancia de cualquier punto de la recta *r* al plano π_s.

$$d(r,s) = d(A,\pi_s) = \frac{|4\cdot 4 - 1 - 3\cdot(-2) + 18|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-3)^2}} = \frac{|16 - 1 + 6 + 18|}{\sqrt{16+1+9}} = \frac{39}{\sqrt{26}} = \frac{39\sqrt{26}}{26} = \frac{3\sqrt{26}}{2}$$

$$d(r,s) = \frac{3\sqrt{26}}{2}$$

Por último, comprobemos que la perpendicular común obtenida con el método 1 coincide con la obtenida en el método 2.

Método 1

$$t:\begin{cases} Q(-1,2,4) \\ \vec{w}(-4,1,3) \end{cases} \quad \text{y} \quad t: \frac{x+1}{-4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-4}{3}$$

Método 2

$$t:\begin{cases} 3x+9y+z-19=0 \\ 8x+11y+7z-42=0 \end{cases}$$

Determinemos un vector director de t como producto vectorial de los dos vectores normales que determinan la recta.

$$\vec{w}\,'=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 9 & 1 \\ 8 & 11 & 7 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 11 & 7 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 7 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 8 & 11 \end{vmatrix}\vec{k}=52\vec{i}-13\vec{j}-39\vec{k}$$

$$\vec{w}\,'(52,-13,-39) \parallel \vec{w}(-4,1,3) \quad \text{por ser} \quad \vec{w}\,'=-13\vec{w}$$

Por lo tanto las dos rectas tienen la misma dirección.

Comprobemos que el punto $Q(-1,2,4)$ verifican las ecuaciones implícitas obtenidas por el método 2.

Efectivamente,

$$\begin{cases} 3\cdot(-1)+9\cdot 2+4-19=-3+18+4-19=0 \\ 8\cdot(-1)+11\cdot 2+7\cdot 4-42=-8+22+28-42=0 \end{cases}$$

Conclusión:

Es la misma recta