ACTIVIDADES:

1.- Las ecuaciones de la trayectoria de un móvil son: $x = 2t^2$; $y = 10 + t^2$, expresadas en unidades del SI:

a) Calcula el vector de posición para t = 1s, t = 2s; t = 3s; t = 4s.
b) Calcula el vector desplazamiento entre t = 2s y t = 3s.
c) ¿Coincide el vector desplazamiento, con el espacio recorrido en el intervalo de tiempo?

Las ecuaciones paramétricas del movimiento son:

$X = 2t^2$
$Y = 10 + t^2$

De estas dos, obtenemos el vector posición dependiente del tiempo, expresado como vector, con vectores unitarios.

$$r(t) = [(2t^2)\ i + (10 + t^2)\ j]\ m$$

a) Una vez que tenemos el vector posición dependiente del tiempo, sustituimos los valores del tiempo en la expresión:

$r\ (1s) = [(2\cdot 1^2)\ i + (10 + 1^2)\ j]m = r(1s) = (2i + 11j)\ m$
$r\ (2s) = [(2\cdot 2^2)\ i + (10 + 2^2)\ j]m = r(2s) = (8i + 14j)\ m$
$r\ (3s) = [(2\cdot 3^2)\ i + (10 + 3^2)\ j]m = r(3s) = (18i + 19j)\ m$
$r\ (4s) = [(2\cdot 4^2)\ i + (10 + 4^2)\ j]m = r(4s) = (32i + 26j)\ m$

b) El vector desplazamiento, es la diferencia existente entre dos vectores posición:

$\Delta r = r_{3s} - r_{2s} \rightarrow \Delta r = (18i + 19j) - (8i + 14j) \rightarrow \Delta r = 10i + 5j$

c) Si representásemos el movimiento del cuerpo (gráfica espacio – tiempo), observaríamos que el movimiento es una línea recta.
Siempre que el movimiento sea rectilíneo, el vector desplazamiento coincide con el espacio recorrido. Sin embargo si el móvil describe una trayectoria curvilínea, el espacio recorrido, no coincide con el vector desplazamiento.

En este caso, al ser una trayectoria rectilínea, espacio recorrido y vector desplazamiento coinciden.

2.- Un aeroplano cuya velocidad es de 200 km /h pone rumbo norte. De repente comienza a soplar un viento del noreste (45º) con velocidad de 100 km /h. ¿Cuál es la velocidad resultante del aeroplano? (expresa el resultado en vector y módulo). ¿En qué dirección se overá el aeroplano (ángulo con el eje)?

En primer lugar vamos a descomponer las velocidades del aeroplano y el viento en sus componentes cartesianas x e y.
Puesto que el avión, sólo se mueve en dirección norte, toda su velocidad corresponderá con su componente y. Por tanto si escribimos su vector velocidad, este será:

$V_{avión}$ = 200j km /h

En el caso del viento, al soplar de dirección NE con un ángulo de 45º, esta presentará coordenadas x e y:

V_x = 100cos45º = 70,7
V_y = 100sen45º = 70,7

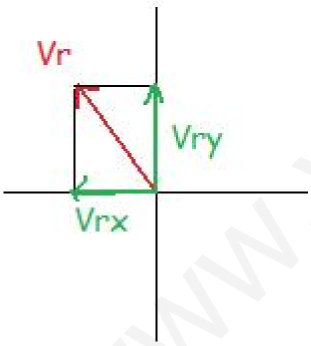
Por tanto el vector velocidad será: v_{aire} = (- 70,7i – 70,7j) km /h.

Fíjense, en que las coordenadas x e y de la velocidad del aire son negativas.

Según el principio de superposición en composición de movimientos, la velocidad resultante del movimiento, será la suma vectorial de las velocidades del avión y del viento, por tanto, la velocidad resultante (v_R), será:

V_R = 200j + (- 70,7i – 70,7j) → v_R = (-70,7i + 129,3j)km /h

Calculamos a continuación el modulo del vector de la velocidad resultante:

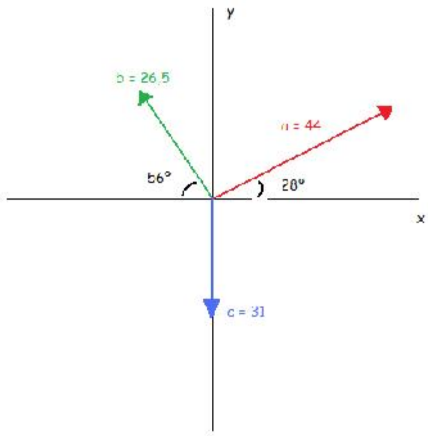


$$|v_R| = \sqrt{v_{Rx}^2 + v_{Ry}^2} \rightarrow \sqrt{(-70{,}7)^2 + (129{,}3)^2} \rightarrow |v_R| = 147{,}35\ km/h$$

Como podemos observar en el dibujo, podemos ver que existe un ángulo entre el vector de la velocidad resultante y el eje OX. Este podemos calcularlo utilizando cualquier razón trigonométrica:

senα = $\frac{v_{Ry}}{v_R} \rightarrow \frac{129{,}3}{147{,}35} \rightarrow$ senα = 0,877 → α =61º

3.- En la figura se muestran tres vectores. Sus magnitudes están expresadas en unidades del SI. Determina la suma de los tres vectores. Exprese la resultante a) en términos de componentes, b) magnitud y ángulo con el eje x.



a) En primer lugar, calculamos las componentes cartesianas de cada uno de los vectores:

a_x = acosα → a_x = 44cos28º → a_x = 38,85
a_y = asenα → a_y = 44sen28º → a_y = 20,66

Por tanto el vector a: a = 38,85i + 20,66j

b_x = bcosα → b_x = - 26,5cos56º → b_x = - 14,82
b_y = bsenα → b_y = 26,5sen56º → b_y = 21,97

Por tanto el vector b: b = - 14,82i + 21,97j

Por último el vector c, sólo tiene coordenada y, que además es negativa, por tanto el vector c: c = - 31j

El vector suma (a + b + c), será:

$$\begin{aligned} a &= \ \ 38{,}85i + 20{,}66j \\ b &= -14{,}82i + 21{,}97j \\ c &= \qquad\qquad\ \ -31j \\ \hline a + b + c &= 24{,}03i + 11{,}63j \end{aligned}$$

b) Su modulo sera:

$$|a+b+c| = \sqrt{(24{,}03)^2 + (11{,}63)^2} \rightarrow\ |a+b+c| = 26{,}7$$

c) Para calcular el ángulo, utilizamos cualquier razón trigonométrica:

senα = $\frac{a+b+c_y}{a+b+c} \rightarrow\ \frac{11{,}63}{26{,}7} \rightarrow$ senα = 0,436 → α =26º

4.- Un camión circula a 108 km /h. Al pasar por delante de un motorista, este arranca con una aceleración de 5 m /s². ¿Qué distancia hay entre ambos al cabo de 5 segundos? ¿Cuánto tarda el motorista en alcanzar al camión? ¿Cuál es su velocidad en ese instante?

En primer lugar, pasamos la velocidad del camión a unidades del sistema internacional:

$v_{camión}$ = 108 km /h$\frac{1000m}{1km} \cdot \frac{1h}{3600s} = 30\ m/s$

a) El camión posee una velocidad constante, luego su movimiento es MRU.

Por otro lado, la moto inicialmente, está en reposo (arranca cuando le pasa el camión), y comienza a moverse con una aceleración de 5 m /s^2.
Vemos el espacio recorrido, por cada vehículo:

$X_{camión}$ = Xo + vt → $X_{camión}$ = 0m + 30 m /s · 5s → $X_{camión}$ = 150m
X_{moto} = Xo + v_ot + ½ at^2 → X_{moto} = 0m + (0 m/s·5s) + [1/2·5 m/s^2·(5s)^2] → X_{moto} =62,5 m

La distancia entre los dos vehículos: ΔX = $X_{camión}$ – X_{moto} = 150m – 62,5m → ΔX = 87,5m

b) Para calcular el tiempo en que la moto alcanza al camión, escribimos las ecuaciones del desplazamiento de cada vehículo:

$X_{camión}$ = Xo + vt → $X_{camión}$ = 0m + 30 m /s · t → $X_{camión}$ = 30t
X_{moto} = Xo + v_ot + ½ at^2 → X_{moto} = 0m + (0 m/s·t) + [1/2·5 m/s^2·(5s)^2] → X_{moto} = 2,5t^2

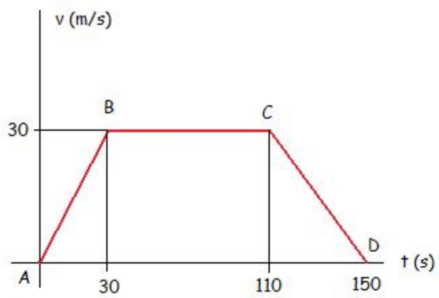
En el momento que la moto alcanza al camión, ambos vehículos recorren el mismo trayecto, por tanto:

X_{camion} = X_{moto} → 30t = 2,5t^2 → 30 = 2,5t → t = 30 /2,5 → t = 12s

c) La velocidad de la moto en ese instante será:

V = Vo +at → v = 0 m/s + (5 m/s^2·12s) → v = 60 m /s.

5.- Observa la siguiente gráfica v – t del movimiento de un cuerpo. Calcula: a) La aceleración en cada etapa. b) ¿Qué tipo de movimiento lleva el cuerpo en cada tramo. c) El espacio total recorrido por el cuerpo.



a) La aceleración se define como el cociente entre la variación de la velocidad y la variación del tiempo (a =Δv /Δt). Además este cociente, corresponde a la pendiente de la gráfica velocidad – tiempo.

Calculamos las aceleraciones por tramos:

$a_{AB} = \frac{30\frac{m}{s} - 0\frac{m}{s}}{30s - 0s} \rightarrow a_{AB} = 1\ m/s^2$

$a_{BC} = \frac{30\frac{m}{s} - 30\frac{m}{s}}{110s - 30s} \rightarrow a_{AB} = 0\ m/s^2$

$a_{CD} = \frac{0\frac{m}{s} - 30\frac{m}{s}}{150s - 110s} \rightarrow a_{AB} = -0{,}75\ m/s^2$

b) Los movimientos por tramos son los siguientes. El tramo AB, puesto que posee aceleración, será un MRUA.

En el tramo BC, observamos que la velocidad no varía con el tiempo, luego es constante. Por tanto el movimiento de este tramo es MRU.

Por último, el tramo CD, posee una aceleración negativa, por tanto el movimiento será MRUA, pero desacelerado, puesto que la aceleración es negativa.

c)
Tramo AB: $S = So + v_o t + ½ at^2 \rightarrow S_{AB} = ½\ 1\ m/s^2 (30s)^2 \rightarrow S_{AB} = 450$ m.
Tramo BC: $S = So + vt \rightarrow S = 30\ m/s(110s – 30s) \rightarrow S_{BC} = 2400m$.
Tramos CD: $S = So + v_o t + ½ at^2 \rightarrow S_{CD} = ½ (- 0,75\ m/s^2)(40s)^2 \rightarrow S_{AB} = 600$ m.

El espacio total recorrido, sera la suma de los tres tramos:

$$S = 450m + 2400m + 600m = 3450\ m$$

6.- Un camión y un automóvil, circulan por una carretera recta a 90 km /h, estando situado el automóvil, inicialmente 20 metros detrás del camión. El automóvil ve un espacio libre para adelantar y se decide a hacerlo, empleando 8 segundos y colocándose 20 metros por delante del camión. Calcula la aceleración del automóvil y el espacio que recorre cada vehículo durante el adelantamiento.

En primer lugar expresamos la velocidad en unidades del SI:

$$v_{camión} = 90\ km\ /h \frac{1000m}{1km} \cdot \frac{1h}{3600s} = 25\ m\ /s$$

a) Calculamos el espacio recorrido por el camión. Puesto que no nos dice el problema que la velocidad del camión varíe, la consideramos como constante, y por tanto su movimiento será MRU.

$X = Xo + vt \rightarrow X_{camion} = 25\ m/s\ 8s \rightarrow X_{camion} = 200m$

El coche puesto que comenzaba el movimiento 20 metros por detrás del camión, y acaba 20 metros por delante del mismo, su espacio recorrido es el del camión, más estas dos distancias de separación, es decir:

$$X_{coche} = 20m + X_{camion} + 20m \rightarrow X_{coche} = 240m.$$

b) Puesto que el movimiento del coche, es acelerado (MRUA):

$X_{coche} = Xo + v_0 t + ½ at^2 \rightarrow \frac{2(X_{coche} - Vot)}{t^2} \rightarrow \frac{2(240m - \frac{25m}{s} 8s)}{8s^2} \rightarrow a = 1,25\ m\ /s^2$

7.- Se lanza desde el suelo verticalmente hacia arriba una pelota con una velocidad de 30 m /s.

a) **¿En qué instantes la altura de la pelota es de 20m?**
b) **¿Cuándo tiene la pelota una velocidad de 20 m /s hacia arriba?**
c) **¿y hacia abajo?**
d) **Calcula la altura, velocidad y aceleración de la pelota en el punto más alto.**

a) Este movimiento es una caída libre. La expresión del desplazamiento, viene dada por:

$$Y = Yo + v_o t – ½ gt^2$$

Nos preguntan, cuánto tiempo transcurre para que el cuerpo adquiera una altura de 20m, es decir, Y = 20 m, la velocidad inicial es 30 m/s. Sustituimos los valores y obtendremos una ecuación de segundo grado, donde la incógnita será el tiempo (t):

$$20 = 30t – 4{,}9t^2 \rightarrow - 4{,}9t^2 + 30t – 20 = 0$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado, utilizando $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$:
Resulta que t tomará dos valores:

t_1 = 0,76s (este es el tiempo que tarda el cuerpo en subir los 20 primeros metros).
t_2 = 5,36s (este es el tiempo que tarda en cuerpo en subir, hasta la altura máxima, y comenzar a bajar y pasar de nuevo por el punto de 20 m sobre el suelo).

b) Para calcular la velocidad, utilizamos la expresión: $v = v_o – gt$.

20 m /s = 30 m /s – (9,8 m /s^2 t). Despejando el tiempo: t = 1,02s.

c) Utilizamos la misma expresión que en el apartado anterior. La única diferencia es que la velocidad es de bajada, por tanto será – 20 m /s. El signo negativo, hace referencia a que la velocidad va en contra de mi sistema de referencia elegido.

- 20 m /s = 30 m /s – (9,8 m /s^2 t). Despejando el tiempo: t = 5,1s.

d) En el punto más alto, el cuerpo se detiene, por lo que su velocidad justo en ese punto es cero. La aceleración en todo momento es la de la gravedad, es decir, - 9,8 m /s^2.

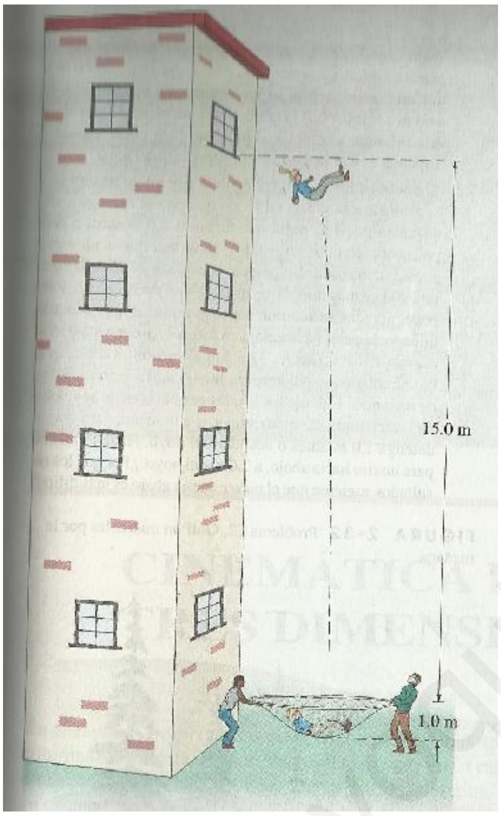
Por último la altura máxima $Ymax = Yo + v_o t – ½ gt^2$.

Antes de utilizar esta expresión, debemos calcular el tiempo. Para ello utilizamos la condición, de que la velocidad en el punto más alto es cero. Por tanto:

$v = v_0 – gt \rightarrow 0 = v_o – gt \rightarrow t = v_o /g \rightarrow t = 30\ m/s/ 9,8\ m/s^2 \rightarrow t = 3,06s.$

Ahora introducimos el tiempo en la expresión de la altura máxima:

$Ymax = (30\ m/s \cdot 3,06s) – (1/2 \cdot 9,8\ m /s^2 \cdot (3,06s)^2) \rightarrow Ymax = 45,96m.$



8.- Una persona salta desde la ventana del tercer piso de un edificio a 15 metros de altura, para caer en una red de seguridad. Al caer sobre ésta, la estira 1metro antes de quedar en reposo (ver figura). Calcula la desaceleración experimentada por la persona cuando fue frenada hasta el reposo por la red. ¿Qué haría usted para que la red fuera más segura, la tensaría o estiraría más?

Este movimiento, lo dividiremos en dos partes. La primera, desde que la persona se deja caer desde la ventana, hasta el momento que impacta en la red. Este movimiento será una caída libre.

En segundo lugar el movimiento de elongación de la red, lo consideraremos como un MRUA con desaceleración.

Analizaremos la caída libre. En primer lugar calculamos, el tiempo de la caída:

$Ymax = Yo + v_ot – ½\ gt^2 \rightarrow Ymax = – ½\ gt^2 \rightarrow - 15m = - 4,9t^2 \rightarrow t = 1,75s.$

Una vez que hemos calculado, le tiempo de caída podemos calcular la velocidad con que la persona impacta en la red:

$v = v_0 – gt \rightarrow v = 0\ m/s – (9,8\ m/s^2 \cdot 1,75s) \rightarrow v = - 17,15\ m /s.$

Ahora analizaremos el movimiento de la red. Ahora la velocidad inicial, coincide con la velocidad inicial del anterior movimiento (vo = - 17,15 m/s). La velocidad final del movimiento, es cero, puesto que la red frena totalmente a la persona. El espacio recorrido será de 1m. Utilizando la expresión:

$v^2 – v^2_o = 2a (S – So)$. La velocidad final es cero, y el espacio inicial también lo es.
$- (-17,15m /s)^2 = 2a1m \rightarrow a = - (-17,15\ m/s)^2/ 2 \rightarrow a = - 147,06\ m /s^2$

9.- Desde la azotea de un edificio de 75 metros de altura, se suelta una piedra. En el mismo instante, y desde el suelo, se lanza una pelota con una velocidad de 25 m/s. Calcula:

a) **¿Dónde se encuentra la piedra, cuando la pelota alcanza su máxima altura?**

b) **¿Cuánto tardan la pelota y la piedra en cruzarse? Calcula sus velocidades en ese instante.**

a) Diremos, que la el movimiento de la pelota de subida y bajada, es el movimiento A, y el de caída libre de la piedra es el movimiento B.

Mov A: En el punto más alto del movimiento de la pelota, su velocidad es cero. Con esto podemos calcular el tiempo que la pelota tarda en alcanzar su máxima altura.

$v = v_0 – gt \rightarrow 0 = v_o – gt \rightarrow t = v_o /g \rightarrow t = 25\ m/s/\ 9,8\ m/s^2 \rightarrow t = 2,55s.$

Mov B: Introducimos el tiempo en la expresión de la caída libre de la piedra:

$Y = Yo + v_ot – ½\ gt^2 \rightarrow Y = – ½\ gt^2 \rightarrow Y = -\ ½\ \cdot 9,8\ m/s^2\ \cdot (2,55s)^2 \rightarrow Y = -\ 31,9m.$

Es espacio es negativo, porque hemos cogido como sistema de referencia el punto donde se deja caer la piedra. Podemos decir que esta está a 43,1m del suelo.

b) Cuando lanzo la pelota, esta alcanzará una altura h. En el mismo intervalo de tiempo, la piedra, bajará una distancia, que será los 75 metros totales de la caída, menos esa altura h.
Mov A: $h = 25t – ½\ 9,8\ m/s^2\ t^2 \rightarrow h = 25t – 4,9t^2$
Mov B: $-\ (75 – h) = \ –\ ½\ 9,8\ m/s^2\ t^2 = (h – 75) = -\ \ ½\ 9,8\ m/s^2\ t^2$

Esto es un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, que resolviendo, resulta que h = 30,9m; t = 3s.

Las velocidades en ese instante son: $v = v_o – gt$.

Mov A: $v = 0\ m/s – 9,8\ m/s^2 \cdot 3s \rightarrow v = -\ 29,4\ m/s$
Mov B: $v = 25\ m/s – 9,8\ m/s^2 \cdot 3s \rightarrow v = -\ 4,4\ m/s$

10.- Un ciclista parte desde el reposo en un velódromo circular de 50 metros de radio, y va moviéndose con movimiento uniformemente acelerado hasta que, a los 50 segundos de iniciada la marcha, alcanza una velocidad de 36 km /h; desde ese momento conserva su velocidad. Calcula:

a) **Aceleración tangencial y angular, en la primera etapa del movimiento.**
b) **Aceleración normal en el momento de cumplirse los 50 segundos.**

c) **La longitud de pista recorrida en los 50 segundos.**
d) **El tiempo que tarda en dar una vuelta a la pista con velocidad constante.**
e) **El número de vueltas que da en 10 minutos contados desde que inició el movimiento.**

Lo primero que tenemos que hacer, es expresar la velocidad en unidades del SI:

$$v = 36\ km/h \frac{1000m}{1km} \cdot \frac{1h}{3600s} = 10\ m/s$$

En un primer momento (50s), tenemos un MCUA (ya que la velocidad lineal y angular, sufren un cambio), y transcurrido este tiempo, la velocidad angular permanece constante, luego tendremos un MCU.

a) La aceleración tangencial, es la variación del módulo de la velocidad con el tiempo. Por tanto.

$$a_T = \Delta v / \Delta t \rightarrow a_T = (10\ m/s - 0m/s) / 50s \rightarrow a_T = 0{,}2\ m/s^2.$$

La aceleración angular, es la variación de la velocidad angular, respecto del tiempo, por tanto, tendremos que calcular las velocidades angulares previamente:

$$v = \omega R \rightarrow \omega = v / R$$

Puesto que el cuerpo parte desde el reposo ($v = 0m/s$), la velocidad angular inicial será cero.

$\omega = 10\ m/s / 50m \rightarrow \omega = 0{,}2\ rad/s$. Ahora calculamos la aceleración angular:

$$\alpha = \Delta\omega / t \rightarrow \alpha = 0{,}2\ rad/s / 50s \rightarrow \alpha = 4 \cdot 10^{-3}\ rad/s^2$$

b) La aceleración normal, es otra componente de la aceleración, dirigida hacia el centro de la curvatura. Su valor es el cociente del cuadrado de la velocidad, y el radio:

$$a_N = v^2 / R \rightarrow a_N = (10\ m/s)^2 / 50m \rightarrow a_N = 2\ m/s^2.$$

c) El espacio recorrido, viene dado por la expresión: $S = So + v_0t + ½\ at^2$, sustituyendo valores:

$$S = 0m + (0m/s\ 50s) + ½\ (0{,}2\ m/s^2)(50s)^2 \rightarrow S = 250m$$

d) El tiempo que tarda en dar una vuelta completa, es la definición del periodo (T). Este se relaciona con la velocidad angular (calculada anteriormente), mediante la siguiente expresión:

$$\omega = 2\pi / T \rightarrow T = 2\pi / \omega \rightarrow T = 2\pi / 0{,}2\ rad/s \rightarrow T = 31{,}4s$$

e) Para calcular el número de vueltas que da el ciclista en 600s, debemos considerar dos etapas del movimiento.

En primer lugar, durante los primeros 50 s, el movimiento es MCUA, por tanto el ángulo recorrido, lo calculamos mediante la siguiente expresión:

$$\varphi = \varphi_o + \omega_o t + ½\, \alpha t^2 \rightarrow \varphi = ½\cdot(4\cdot10^{-3}\ rad/s^2)\cdot(50s)^2 \rightarrow \varphi_1 = 5\ rad.$$

En segundo lugar, y durante 550s, el movimiento es MCU, luego el ángulo recorrido será:

$$\varphi = \omega t \rightarrow \varphi = 0{,}2\ rad/s \cdot 550s \rightarrow \varphi_2 = 110\ rad$$

El ángulo recorrido en los 600s, será por tanto, la suma de los dos movimientos anteriores, es decir, $\varphi = 5rad + 110rad \rightarrow \varphi = 115rad$.

Este ángulo hay que pasarlo a número de vueltas:

$$\varphi = 115\ \text{rad} \cdot \frac{1\ \text{vuelta}}{2\pi\ \text{rad}} = 18{,}3\ \text{vueltas}$$

11.- Dos cuerpos parten desde el mismo punto de una circunferencia de 20 metros de radio y la recorren en sentidos contrarios. Uno tarda 40 segundos en dar una vuelta, y el otro se mueve a 1 rpm. Calcula: a) el tiempo que tardan en cruzarse. b) El ángulo descrito, y el espacio recorrido por cada uno.

a) Analizaremos las velocidades angulares y lineales de los dos cuerpos:

<u>CUERPO A:</u>

$$T = 40s \rightarrow \omega = 2\pi /T \rightarrow \omega_A = 2\pi /40s \rightarrow \omega_A = 0{,}157\ rad/s$$
$$v = \omega R \rightarrow v_A = (0{,}157\ rad/s)\cdot(20m) \rightarrow v_A = 3{,}14\ m/s$$

<u>CUERPO B:</u>

$$\omega_B = 1rpm\ \frac{2\pi rad}{1rev}\cdot\frac{1\ min}{60s} = \omega_B = 0{,}105\ rad/s$$
$$v = \omega R \rightarrow v_B = (0{,}105\ rad/s)\cdot(20m) \rightarrow v_B = 2{,}1\ m/s$$

A continuación consideraremos el espacio recorrido por cada cuerpo. Puesto que es un MCU, el espacio recorrido será: $S = So + vt$, por tanto, para ambos cuerpos:

$Sa = 3{,}14t_A$
$Sb = 2{,}1t_B$

Tenemos dos ecuaciones y cuatro incógnitas, por tanto, no podemos resolver el problema. Para ello, debemos hacer dos consideraciones:

- El tiempo que tarda el cuerpo A y el cuerpo B en cruzarse es el mismo, luego $t_A = t_B = t$.
- El espacio que recorre el primer cuerpo, y el segundo cuerpo, es una vuelta completa. Luego el espacio total recorrido, es la longitud de la circunferencia ($2\pi R$). Por tanto: $Sa + Sb = 2\pi R$.

Con estas dos consideraciones:

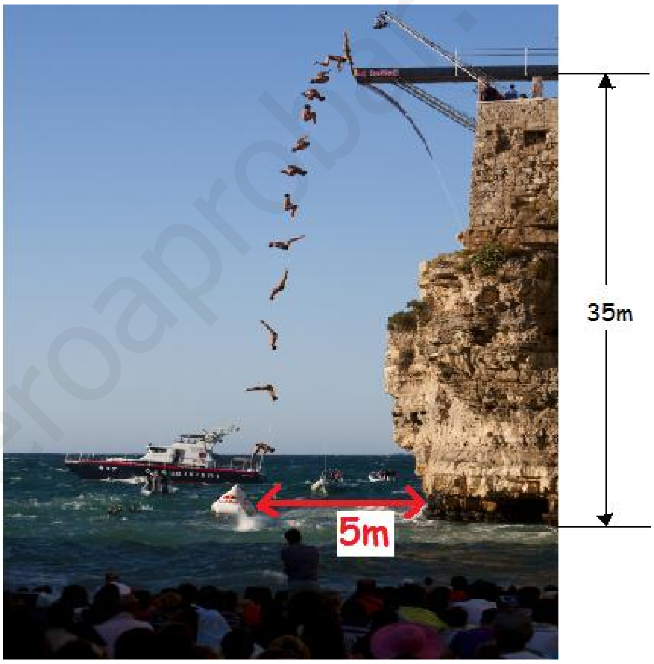
$$Sa + Sb = 2\pi R \rightarrow 3{,}14t + 2{,}1t = 2\pi\cdot(20m) \rightarrow 5{,}24t = 125{,}7 \rightarrow t = 24s.$$

b) Una vez calculado el tiempo, podemos calcular el espacio y el ángulo recorrido, por cada cuerpo:

$$Sa = 3{,}14t_A \rightarrow 3{,}14\cdot 24s \rightarrow Sa = 75{,}36m$$
$$\varphi a = \omega t \rightarrow \varphi a = 0{,}157\ rad/s \cdot 24s \rightarrow \varphi_A = 3{,}77\ rad$$

$$Sb = 2{,}1t_B \rightarrow Sb = 2{,}1\cdot 24s \rightarrow Sb = 50{,}4m$$
$$\varphi b = \omega t \rightarrow \varphi b = 0{,}105\ rad/s \cdot 24s \rightarrow \varphi_B = 2{,}52\ rad$$

12.- Los clavadistas de la Quebrada de Acapulco, se lanzan horizontalmente desde una plataforma que se encuentra aproximadamente a 35 metros por arriba de una superficie de agua, pero deben evitar formaciones rocosas que se extienden dentro del agua hasta 5 metros, de la base del acantilado, directamente debajo del lanzamiento (ver fotografía). ¿Cuál es la velocidad mínima necesaria para realizar el clavado sin peligro? ¿Cuánto tiempo pasa un clavadista en el aire? ¿Por qué tratan de lanzarse horizontalmente?



Este movimiento es un tiro horizontal, compuesto por dos movimientos. Un MRU, a lo largo del eje x, y una caída libre, a lo largo del eje y.

La velocidad inicial es completamente en dirección horizontal, por tanto, toda la velocidad es componente x. La velocidad inicial en el eje y, es cero.

Analizaremos el movimiento por componentes:

EJE Y:

Analizando el movimiento a lo largo de este eje, calcularemos, el tiempo que tarda el cuerpo en caer al agua.

$$Y = Yo + v_{oy}t - \tfrac{1}{2} gt^2$$

Puesto que el espacio inicial recorrido y la velocidad inicial son cero, la expresión queda como:

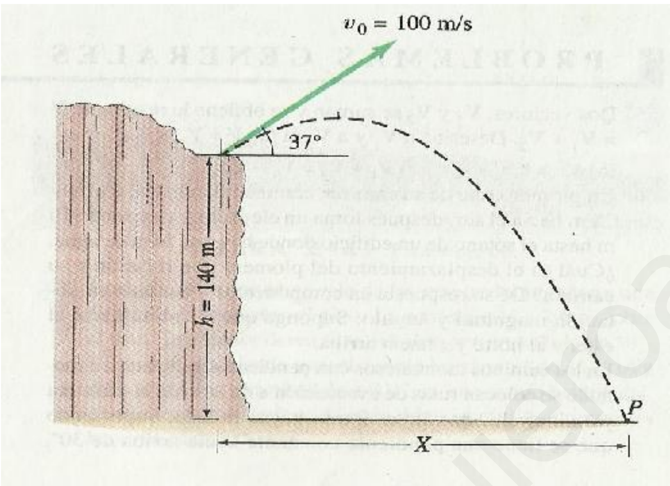
$$Y = -\tfrac{1}{2} g t^2 \rightarrow -35m = -4{,}9t^2 \rightarrow t = 2{,}67s$$

EJE X:

Una vez que hemos calculado el tiempo transcurrido, analizamos el movimiento a lo largo del eje x, para calcular la velocidad del salto.

$$X = v_x t \rightarrow v_x = v_o = X/t \rightarrow v_o = 5m/2{,}67s \rightarrow v_o = 1{,}87s$$

13.- Se dispara un proyectil desde la orilla de un acantilado de 140 metros de altura con una velocidad inicial de 100 m/s y un ángulo de 37º con la horizontal. Calcula:



a) El tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo.
b) El alcance (x) del proyectil, medido desde la base del acantilado.
c) Las componentes horizontal y vertical de la velocidad del proyectil, en el instante que llega al suelo.
d) La magnitud velocidad.
e) El ángulo que forma la velocidad y la componente horizontal.

a) En primer lugar analizaremos las velocidades iniciales:

$v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha \rightarrow v_{0x} = 100$ m/s cos37º $\rightarrow v_{0x} = 79{,}86$ m /s.
$v_{oy} = v_o \cdot \text{sen}\alpha \rightarrow v_{oy} = 100$ m/s sen37º $\rightarrow v_{oy} = 60{,}18$ m /s.

A continuación calcularemos el tiempo que tarda el objeto en llegar al punto más alto. En este punto, la velocidad en el eje y es cero. Por tanto:

$$v = v_{oy} - gt \rightarrow 0 = v_{oy} - gt \rightarrow t = v_{oy}/g \rightarrow t = 60{,}18 \text{ m/s}/ 9{,}8 \text{ m/s}^2 \rightarrow t = 6{,}14s.$$

La altura maxima es:

$$h_{max} = h_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g} \rightarrow h_{max} = 140m + \frac{(60{,}18\, m/s)^2}{2 \cdot 9{,}8\, m/s^2} \rightarrow h_{max} = 324{,}77m$$

Cuando el proyectil, llega al punto más alto, podemos considerar su movimiento como un tiro horizontal. Podemos calcular el tiempo que tarda en caer, desde el punto más alto, al punto P.

$$Y = Yo + v_{oy}t - ½\ gt^2 \rightarrow Y = -½\ gt^2 \rightarrow -324{,}77m = -4{,}9t^2 \rightarrow t = 8{,}14s$$

El tiempo total de vuelo es la suma del tiempo en alcanzar la altura máxima (6,14s), y el tiempo que tarda en el tiro horizontal (8,14s). Por tanto el tiempo total de vuelo es 14,28 segundos.

b) El alcance máximo es:

$$X_{max} = vox·t \rightarrow X_{max} = 79{,}86\ m/s\ 8{,}14s \rightarrow X_{max} = 1140{,}5m$$

c) la velocidad a lo largo del eje x es constante. Por tanto cuando el proyectil impacta en el punto P, lo hace con una velocidad en el eje x de 79,86 m/s (vox).

La velocidad en el eje y, la calculamos como un tiro horizontal, desde el punto máximo del movimiento del proyectil:

$$v_y = v_{oy} - gt \rightarrow v_y = v_{oy} - gt \rightarrow t = 0 - [9{,}8\ m/s^2 \cdot (8{,}14s)] \rightarrow v_y = -79{,}78\ m/s$$

d) El modulo de la velocidad es:

$$|v| = \sqrt{v_x{}^2 + v_y^2} = \sqrt{(79{,}86m/s)^2 + (-79{,}78m/s)^2} = 112{,}88\ m/s$$

e) Calculamos el ángulo utilizando cualquier razón trigonométrica:

senα= 79,78 / 112,88 → α = 45º

14.- Guillermo Tell debe partir la manzana sobre la cabeza de su hijo que está a una distancia de 27m. Cuando apunta directamente hacia la manzana, la flecha está horizontal. ¿Con qué ángulo debe apuntar para dar a la manzana si la flecha viaja a una velocidad de 35 m /s?

Si analizamos la expresión del alcance máximo horizontal, en un movimiento de tiro oblícuo:

$$X_{max} = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$$

Despejando la razón trigonométrica seno:

$$\sin 2\alpha = \frac{x_{max} \cdot g}{v_0^2} \rightarrow \sin 2\alpha = \frac{27m \cdot 9{,}8\ m/s^2}{(35\ m\ /s^2)^2} \rightarrow \sin 2\alpha = 0{,}216 \rightarrow \alpha = 6°$$

15.- Dos alumnos están a la misma distancia de una papelera de 30 cm de altura, en la que intentan meter un papel.
Un alumno está de pie y lanza horizontalmente la bola con una velocidad de 10 m /s desde una altura de 2,1 metros. El otro está sentado y lanza la bola con una elevación de 30º y una velocidad de 8 m /s desde una altura de 75 cm. Calcula la distancia que existe entre cada alumno y la papelera, para que ambos consigan la canasta.

Al alumno que lanza la bola de papel horizontalmente, le denominaremos alumno A, o movimiento A. Al otro, alumno B o movimiento B.

<u>MOVIMIENTO A:</u>

Es un tiro horizontal. Es un movimiento compuesto por dos movimientos. Uno a lo largo de cada eje. En el eje x, posee un MRU, y en el eje y una caída libre. La velocidad inicial del lanzamiento, es totalmente horizontal, luego toda la velocidad inicial es velocidad a lo largo del eje x, mientras que la velocidad inicial en el eje y es cero.

Si analizamos este movimiento en ejes:

Eje y: con este eje podemos calcular el tiempo de vuelo de la bola de papel.

$$Y = Yo + v_{oy}t – ½ gt^2 \rightarrow Y = Yo – ½ gt^2 \rightarrow 2{,}1m = 0{,}3 - 4{,}9t^2 \rightarrow t = 0{,}61s$$

Observamos que tenemos en cuenta la altura de la papelera(30 cm = 0,3m).

Eje x: con el estudio del movimiento en este eje, calculamos el alcance horizontal:

$$X = Xo + v_x y \rightarrow X = Xo + v_0 t \rightarrow X = (10\ m/s)\cdot 0{,}61s \rightarrow X = 6{,}1m.$$

<u>MOVIMIENTO B:</u>

Este movimiento es un tiro oblicuo. La velocidad inicial es 8 m/s, pero esta velocidad, y a diferencia del movimiento anterior, la descomponemos en dos componentes (x e y):

$v_{0x} = v_0 \cdot cos\alpha \rightarrow v_{0x} = 8\ m/s\ cos30º \rightarrow v_{0x} = 6{,}92\ m/s.$
$voy = vo \cdot sen\alpha \rightarrow voy = 8\ m/s\ sen30º \rightarrow voy = 4\ m/s.$

Analizamos el momento en que la bola de papel alcanza la altura máxima:

En el punto de máxima altura, sabemos que la velocidad a lo largo del eje y es cero. Por tanto:

$$v = v_{oy} – gt \rightarrow 0 = v_{oy} – gt \rightarrow t = v_{oy} /g \rightarrow t = 4\ m/s/\ 9{,}8\ m/s^2 \rightarrow t = 0{,}41s.$$

$$h_{max} = h_0 + v_0\, t - \frac{1}{2gt^2} \rightarrow h_{max} = 0{,}45m + \left(4\frac{m}{s} \cdot 0{,}41s\right) - \left(\frac{1}{2} 9{,}8\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}41^{\;2}\right) \rightarrow h_{max} = 1{,}26m$$

Tenemos en cuenta que la altura inicial es 0,45 m, que es el resultado de restar, desde la altura previa que se lanza la bola (0,75m), menos la altura de la papelera (0,3m).

El tiempo de vuelo desde el punto más alto hasta la papelera, lo analizamos como un tiro horizontal. Por tanto:

$$Y = Yo + v_{oy}t - ½\, gt^2 \rightarrow Y = -½\, gt^2 \rightarrow -1{,}26m = -4{,}9t^2 \rightarrow t = 0{,}51s.$$

El tiempo total de vuelo de la pelota, será el tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima (0,41s), más el tiempo en caer a la papelera (0,51s), por tanto el tiempo total es 0,92s.

El alcance horizontal será:

$$X = Xo + v_x y \rightarrow X = Xo + v_0 t \rightarrow X = (6{,}92\ m/s) \cdot 0{,}92s \rightarrow X = 6{,}37m.$$