Dada la función $f(x)=Ln\left(\frac{x}{4-x}\right)$, se pide:

a) Calcular las rectas tangente y normal en los puntos de abscisa **x** = **4, x** = **2**.

Primero deberemos calcular el dominio de la función.

La función está definida para todos los números reales **x** que cumplan que $\frac{x}{4-x}>0$. Es decir, en el intervalo $(0,4)$. (El resultado viene de resolver la inecuación fraccionaria)

Calculamos la derivada de la función. $f(x)=Ln\left(\frac{x}{4-x}\right)\Leftrightarrow f(x)=Lnx-Ln(4-x)$

$$f'(x)=\frac{4}{x(4-x)}$$

En **x** = **4** la función no está definida, por lo tanto, no tiene sentido calcular sus rectas tangente y normal.

En **x** = **2**. $f(2)=0 \quad f'(2)=1$

Recta tangente

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

$$y=x-2$$

Recta normal

$$y=f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

$$y=-x+2$$

b) Calcula $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Como la función está definida en el intervalo $(0,4)$, no tiene sentido calcular estos límites.

15.) Dada la función $f:(0,+\infty)$ definida por $f(x)=\frac{ax^2+b}{x}$. Calcula **a** y **b**, sabiendo que la recta tangente en el punto de abscisa **x** = **1** viene dada por **y** = **– 2**.

Del enunciado del problema extraemos la siguiente información:

- La recta tangente es $y=-2\Rightarrow m=0\Rightarrow f'(1)=0$.
- El punto de tangencia es $(1,-2)\Rightarrow f(1)=-2$.

$$f(x)=\frac{ax^2+b}{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{ax^2-b}{x^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=-2\Rightarrow a+b=-2 \\ f'(1)=0\Rightarrow a-b=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{a=b=-1}$$

16.) Estudia la continuidad y derivabilidad de la función $f(x)=x\cdot|x+3|$. Representa la función.

$$|x+3|=\begin{cases} -x-3 & \text{si} \quad x<-3 \\ 0 & \text{si} \quad x=-3 \\ x+3 & \text{si} \quad x>-3 \end{cases}\Rightarrow \quad f(x)=\begin{cases} -x^2-3x & \text{si} \quad x<-3 \\ 0 & \text{si} \quad x=-3 \\ x^2+3x & \text{si} \quad x>-3 \end{cases}$$

Estudio de la continuidad de la función.

La función es continua en $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$ por ser función polinómica.

Estudio de la continuidad en $\mathbf{x=-3}$ (Punto de ruptura)

1. $f(-3)=0$

2. $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-3^-}\left(-x^2-3x\right)=0\\ \lim\limits_{x\to-3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-3^+}\left(x^2+3x\right)=0\end{array}\right\}\lim_{x\to-3} f(x)=0$$

3. $f(-3)=\lim\limits_{x\to-3} f(x)=0$

Conclusión: La función es continua en **R**.

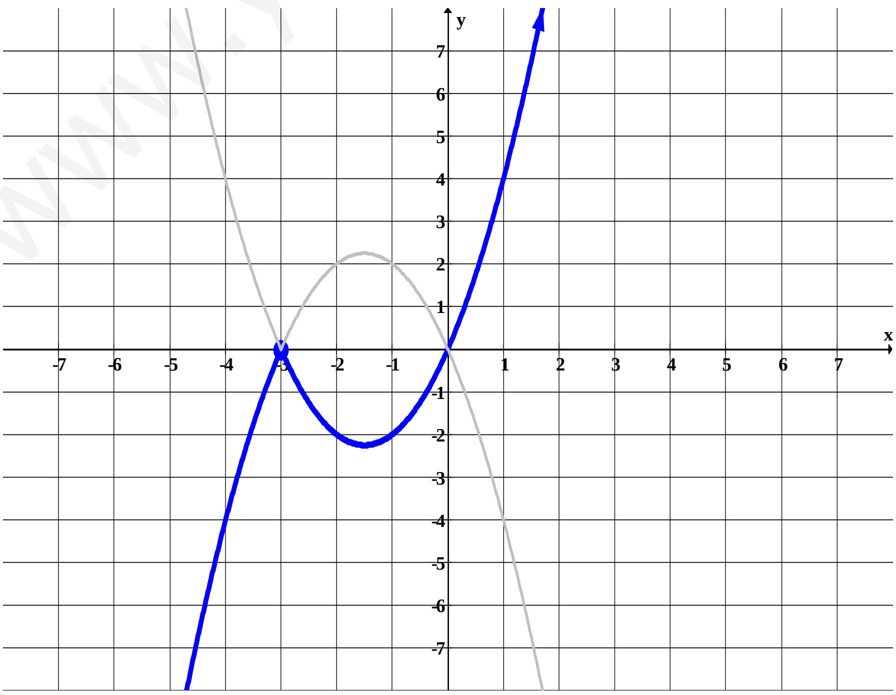
Estudio de la derivabilidad de la función.

La función es derivable en $(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)$ por ser función polinómica.

Estudio en $\mathbf{x=-3}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-3^-)=\lim\limits_{h\to0^-}\dfrac{f(-3+h)-f(-3)}{h}=\lim\limits_{h\to0^-}\dfrac{-h^2+3h}{h}=\lim\limits_{h\to0^-}\dfrac{h(-h+3)}{h}=3\\ f(-3+h)=-(-3+h)^2-3(-3+h)=-h^2+3h\\ \\ f'(-3^+)=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{f(-3+h)-f(-3)}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{h^2-3h}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{h(h-3)}{h}=-3\\ f(-3+h)=(-3+h)^2+3(-3+h)=h^2-3h \end{array}\right\}\Rightarrow f'(-3^-)\neq f'(-3^+)$$ La función no es derivable en este punto. Es un punto anguloso.

Representación de $f(x)=\begin{cases}-x^2-3x & \text{si} \quad x<-3\\ 0 & \text{si} \quad x=-3\\ x^2+3x & \text{si} \quad x>-3\end{cases}$.



Conclusión:

La función es continua en **R** y derivable en $(-\infty,-3)(-3,+\infty)$

17.) Estudia la continuidad y derivabilidad de la función $h(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1} & ,x\le 2\\ -2x & ,x>2\end{cases}$.

Para empezar, observa que la raíz de la función racional está contenida en su intervalo de definición. ¡Ya tenemos una discontinuidad ¡.

Estudio de la continuidad de la función.

En $(-\infty,1)\cup(1,2)$ la función es continua por ser racional. (La raíz del denominador no está contenida en dichos intervalos)

En **x** = **1**, presenta una D.N.E. de salto infinito.Compruébalo.

En $(2,+\infty)$ la función es continua por ser polinómica.

Estudio en **x** = **2** Punto de ruptura.

1. $f(2)=3$

2. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{x-1}=3\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(-2x)=-4\end{array}\right\}\nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$

En **x** = **2** presenta una D.N.E. de salto finito.

Estudio de la derivabilidad de la función.

Recuerda: en los puntos en los que la función no es continua tampoco es derivable.

Luego en **x** = **–1**, **x** = **2** la función no es derivable.

En $(-\infty,1)\cup(1,2)$ la función es derivable por ser racional y tener la raíz del denominador fuera del intervalo.

En $(2,+\infty)$ es derivable por ser polinómica.

Conclusión:

La función es continua y derivable en $(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$

20.) Determina si la función $\mathbf{f(x)=x\cdot|x|}$ es derivable en $\mathbf{x=0}$.

$$|x|=\begin{cases}-x & si \quad x<0\\ 0 & si \quad x=0\\ x & si \quad x>0\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}-x^2 & si \quad x<0\\ 0 & si \quad x=0\\ x^2 & si \quad x>0\end{cases}$$

Recuerda: para que una función sea derivable en un punto, primero debe ser continua en ese punto.

Estudio de la continuidad en $\mathbf{x=0}$

1. $f(0)=0$

2. $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-x^2\right)=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2\right)=0\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$$

3. $f(0)=\lim\limits_{x\to -3} f(x)=0$

Dado que la función es continua en este punto, puede ser derivable.

Estudio de la derivabilidad en $\mathbf{x=0}$

$$\left.\begin{array}{l}f'\left(0^-\right)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-h^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}(-h)=0\\ f'\left(0^+\right)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}h=0\end{array}\right\}\Rightarrow f'\left(0^-\right)=f'\left(0^+\right)\Rightarrow f'(0)=0$$

Conclusión: la función es derivable en $\mathbf{x=0}$