

# CONICAS. PROBLEMAS RESUELTOS

1. Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en el punto  $P = (1, 2)$  y que es perpendicular a la recta  $L$  de ecuación  $2y - x + 2 = 0$ . Además, encontrar la longitud de la cuerda sobre el eje  $y$ .

## Solución propuesta:

La distancia entre el punto  $P$  y la recta  $L$  es:

$$d(P, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-1 + 4 + 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$$

Luego, la ecuación de la circunferencia pedida está dada por:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$$

Para la segunda parte, se tiene que:

cuerda sobre el eje  $y \Rightarrow x = 0$

$$\Rightarrow (0 - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$$

$$\Rightarrow y = 0 \vee y = 4$$

Sea  $P_1 = (0, 0)$  y  $P_2 = (0, 4)$ . La longitud de la cuerda sobre el eje  $y$  está dada por:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(0 - 0)^2 + (0 - 4)^2} = 4 \quad \blacksquare$$

2. Determinar la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a la recta que pasa por el foco de la cónica  $y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$  y por el centro de la elipse  $x^2 + 4y^2 + 8y = 0$ .

**Solución propuesta:**

Completando cuadrados, la ecuación de la cónica queda:

$$\begin{aligned}y^2 - 2y &= (y - 1)^2 - 1 \\(y - 1)^2 - 1 - 4x + 1 &= 0 \\(y - 1)^2 - 4x &= 0 \\(y - 1)^2 &= 4x\end{aligned}$$

Esta última ecuación representa una parábola que tiene su foco en el punto  $F(1, 1)$ .

Completando cuadrados y reduciéndola a su forma canónica, la ecuación de la elipse queda:

$$\begin{aligned}4y^2 + 8y &= 4(y + 1)^2 - 4 \\x^2 + 4(y + 1)^2 - 4 &= 0 \\\frac{x^2}{4} + (y + 1)^2 &= 1 \\\frac{x^2}{2^2} + \frac{(y + 1)^2}{1^2} &= 1\end{aligned}$$

lo cual indica que la elipse está centrada en el punto  $C(0, -1)$ .

Luego, la recta que pasa por los puntos  $F$  y  $C$  está dada por:

$$\begin{aligned}y - 1 &= \frac{-1 - 1}{0 - 1}(x - 1) \\y - 1 &= 2(x - 1) \\y &= 2x - 1\end{aligned}$$

la cual tiene una pendiente igual a 2.

Como la recta que se pide encontrar es perpendicular a la encontrada anteriormente, se tiene que su pendiente,  $m$ , está dada por:

$$m \cdot 2 = -1 \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}$$

Luego, la ecuación de la recta pedida, que tiene pendiente igual a  $-\frac{1}{2}$  y que pasa por el origen, está dada por:

$$\begin{aligned}y - 0 &= -\frac{1}{2}(x - 0) \\y &= -\frac{x}{2} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

3. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el centro de la circunferencia  $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$  y es perpendicular a la recta que une el origen con el vértice de la parábola  $y^2 - x - 6y + 12 = 0$ .

**Solución propuesta:**

Completando cuadrados, la ecuación de la circunferencia queda:

$$\begin{aligned}x^2 + 6x &= (x + 3)^2 - 9 \\y^2 - 4y &= (y - 2)^2 - 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x + 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 + 9 &= 0 \\(x + 3)^2 + (y - 2)^2 &= 2^2\end{aligned}$$

Luego, la circunferencia está centrada en el punto  $C(-3, 2)$ .

Análogamente, la ecuación de la parábola queda:

$$y^2 - 6y = (y - 3)^2 - 9$$

$$\begin{aligned}(y - 3)^2 - 9 - x + 12 &= 0 \\(y - 3)^2 - x + 3 &= 0 \\(y - 3)^2 &= 4 \cdot \frac{1}{4}(x - 3)\end{aligned}$$

Luego, su vértice está en el punto  $V(3, 3)$ .

Así, la recta que une el origen con el punto  $V$  está dada por:

$$\begin{aligned}y - 0 &= \frac{3 - 0}{3 - 0}(x - 0) \\y &= x\end{aligned}$$

la cual tiene una pendiente igual a 1. Luego, la recta perpendicular a ésta última deberá tener una pendiente  $m = \frac{-1}{1} = -1$ .

Así, la ecuación de la recta pedida está dada por:

$$\begin{aligned}y - 2 &= -1(x - (-3)) \\y &= -x - 1 \quad \blacksquare\end{aligned}$$

4. Determinar la ecuación del lugar geométrico de los puntos  $P(x, y)$  tales que las rectas que los unen a los puntos  $(4, 5)$  y  $(-2, 1)$  son perpendiculares.

**Solución propuesta:**

- Sea  $m_1$  la pendiente de la recta  $L_1$  que pasa por  $P(x, y)$  y por el punto  $(4, 5)$ .
- Sea  $m_2$  la pendiente de la recta  $L_2$  que pasa por  $P(x, y)$  y por el punto  $(-2, 1)$ .

Sabemos que si  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$  son dos puntos cualesquiera de una recta  $L$ , entonces la pendiente,  $m$ , de  $L$  está dada por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Luego,

$$m_1 = \frac{5 - y}{4 - x} \quad y \quad m_2 = \frac{1 - y}{-2 - x}$$

Como  $L_1$  y  $L_2$  son perpendiculares, se tiene que:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{5 - y}{4 - x} \cdot \frac{1 - y}{-(2 + x)} = -1$$

$$\begin{aligned}(5 - y)(1 - y) &= (4 - x)(2 + x) \\ y^2 - 6y + 5 &= 8 + 2x - x^2 \\ x^2 - 2x + y^2 - 6y - 3 &= 0\end{aligned}$$

Completando cuadrados:

$$\begin{aligned}x^2 - 2x &= (x - 1)^2 - 1 \\ y^2 - 6y &= (y - 3)^2 - 9\end{aligned}$$

Así,

$$(x - 1)^2 - 1 + (y - 3)^2 - 9 - 3 = 0$$

Luego, la ecuación del lugar geométrico pedido está dada por:

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 13$$

la cual representa una circunferencia de radio  $\sqrt{13}$  centrada en el punto  $(1, 3)$  ■

5. Describa mediante una ecuación el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan del centro de  $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y + 7 = 0$  y del vértice de  $y^2 - 10y - 4x + 37 = 0$ .

**Solución propuesta:**

Para la primera ecuación se tiene que:

$$\begin{aligned}x^2 + 4x &= (x + 2)^2 - 4 \\4y^2 - 8y &= 4(y - 1)^2 - 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x + 2)^2 - 4 + 4(y - 1)^2 - 4 + 7 &= 0 \\(x + 2)^2 + 4(y - 1)^2 &= 1 \\ \frac{(x + 2)^2}{1^2} + \frac{(y - 1)^2}{(\frac{1}{2})^2} &= 1\end{aligned}$$

la cual representa una elipse centrada en el punto  $C(-2, 1)$ .

Para la segunda ecuación se tiene que:

$$y^2 - 10y = (y - 5)^2 - 25$$

$$\begin{aligned}(y - 5)^2 - 25 - 4x + 37 &= 0 \\(y - 5)^2 &= 4(x - 3)\end{aligned}$$

la cual representa una parábola con su vértice en el punto  $V(3, 5)$ .

Luego, sea  $P(x, y)$  todos los puntos que equidistan de los puntos  $C$  y  $V$ , es decir:

$$\begin{aligned}d(C, P) &= d(P, V) \\ \sqrt{(x - (-2))^2 + (y - 1)^2} &= \sqrt{(3 - x)^2 + (5 - y)^2} \\ (x + 2)^2 + (y - 1)^2 &= (3 - x)^2 + (5 - y)^2 \\ x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 &= 9 - 6x + x^2 + 25 - 10y + y^2 \\ 10x + 8y - 29 &= 0\end{aligned}$$

Así, el lugar geométrico pedido, es la recta de ecuación:

$$y = -\frac{5}{4}x + \frac{29}{8} \quad \blacksquare$$

6. Sean  $L$  la recta  $y = 4$  y  $P_0 = (3, -1)$ . Encontrar la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos  $P = (x, y)$  tales que la circunferencia con centro  $P$  y que pasa por  $P_0$  es tangente a la recta  $L$ .

**Solución propuesta:**

Es claro que los radios,  $r$ , de las circunferencias con centro  $P$  nombradas en el enunciado del problema, son iguales a la distancia entre los puntos  $P$  y  $P_0$  y a la distancia entre la recta  $L$  y los puntos  $P$ . Luego:

$$d(P, P_0) = \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 1)^2} = r$$

$$d(P, L) = |y - 4| = r$$

Así:

$$\begin{aligned}(x - 3)^2 + (y + 1)^2 &= (y - 4)^2 \\(x - 3)^2 + y^2 + 2y + 1 &= y^2 - 8y + 16 \\(x - 3)^2 + 10y - 15 &= 0\end{aligned}$$

Luego, la ecuación del lugar geométrico pedido está dada por:

$$(x - 3)^2 = -10\left(y - \frac{3}{2}\right)$$

la cual representa una parábola con su vértice en el punto  $(3, \frac{3}{2})$ . ■