CONICAS. PROBLEMAS RESUELTOS

1. Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en el punto $P = (1, 2)$ y que es perpendicular a la recta L de ecuación $2y - x + 2 = 0$. Además, encontrar la longitud de la cuerda sobre el eje y.

   Solución propuesta:

   La distancia entre el punto P y la recta L es:

   $$d(P, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-1 + 4 + 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$$

   Luego, la ecuación de la circunferencia pedida está dada por:

   $$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$$

   Para la segunda parte, se tiene que:

   cuerda sobre el eje $y \Rightarrow x = 0$

   $\Rightarrow (0 - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$
   $\Rightarrow y = 0 \vee y = 4$

   Sea $P_1 = (0, 0)$ y $P_2 = (0, 4)$. La longitud de la cuerda sobre el eje y está dada por:

   $$d(P_1, P_2) = \sqrt{(0 - 0)^2 + (0 - 4)^2} = 4 \qquad \blacksquare$$

2. Determinar la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a la recta que pasa por el foco de la cónica $y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ y por el centro de la elipse $x^2 + 4y^2 + 8y = 0$.

Solución propuesta:

Completando cuadrados, la ecuación de la cónica queda:

$$y^2 - 2y = (y-1)^2 - 1$$

$$\begin{aligned} (y-1)^2 - 1 - 4x + 1 &= 0 \\ (y-1)^2 - 4x &= 0 \\ (y-1)^2 &= 4x \end{aligned}$$

Esta última ecuación representa una parábola que tiene su foco en el punto $F(1,1)$.

Completando cuadrados y reduciéndola a su forma canónica, la ecuación de la elipse queda:

$$4y^2 + 8y = 4(y+1)^2 - 4$$

$$\begin{aligned} x^2 + 4(y+1)^2 - 4 &= 0 \\ \frac{x^2}{4} + (y+1)^2 &= 1 \\ \frac{x^2}{2^2} + \frac{(y+1)^2}{1^2} &= 1 \end{aligned}$$

lo cual indica que la elipse está centrada en el punto $C(0,-1)$.

Luego, la recta que pasa por los puntos F y C está dada por:

$$\begin{aligned} y - 1 &= \frac{-1-1}{0-1}(x-1) \\ y - 1 &= 2(x-1) \\ y &= 2x - 1 \end{aligned}$$

la cual tiene una pendiente igual a 2.

Como la recta que se pide encontrar es perpendicular a la encontrada anteriormente, se tiene que su pendiente, m, está dada por:

$$m \cdot 2 = -1 \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}$$

Luego, la ecuación de la recta pedida, que tiene pendiente igual a $-\frac{1}{2}$ y que pasa por el origen, está dada por:

$$\begin{aligned} y - 0 &= -\frac{1}{2}(x-0) \\ y &= -\frac{x}{2} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$ y es perpendicular a la recta que une el origen con el vértice de la parábola $y^2 - x - 6y + 12 = 0$.

Solución propuesta:

Completando cuadrados, la ecuación de la circunferencia queda:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x &= (x+3)^2 - 9 \\ y^2 - 4y &= (y-2)^2 - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x+3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 + 9 &= 0 \\ (x+3)^2 + (y-2)^2 &= 2^2 \end{aligned}$$

Luego, la circunferencia está centrada en el punto $C(-3, 2)$.

Análogamente, la ecuación de la parábola queda:

$$y^2 - 6y = (y-3)^2 - 9$$

$$\begin{aligned} (y-3)^2 - 9 - x + 12 &= 0 \\ (y-3)^2 - x + 3 &= 0 \\ (y-3)^2 &= 4 \cdot \frac{1}{4}(x-3) \end{aligned}$$

Luego, su vértice está en el punto $V(3, 3)$.

Así, la recta que une el origen con el punto V está dada por:

$$\begin{aligned} y - 0 &= \frac{3-0}{3-0}(x-0) \\ y &= x \end{aligned}$$

la cual tiene una pendiente igual a 1. Luego, la recta perpendicular a ésta última deberá tener una pendiente $m = \frac{-1}{1} = -1$.

Así, la ecuación de la recta pedida está dada por:

$$\begin{aligned} y - 2 &= -1(x - (-3)) \\ y &= -x - 1 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4. Determinar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ tales que las rectas que los unen a los puntos $(4, 5)$ y $(-2, 1)$ son perpendiculares.

Solución propuesta:

- Sea m_1 la pendiente de la recta L_1 que pasa por $P(x, y)$ y por el punto $(4, 5)$.
- Sea m_2 la pendiente de la recta L_2 que pasa por $P(x, y)$ y por el punto $(-2, 1)$.

Sabemos que si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera de una recta L, entonces la pendiente, m, de L está dada por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Luego,

$$m_1 = \frac{5 - y}{4 - x} \quad \text{y} \quad m_2 = \frac{1 - y}{-2 - x}$$

Como L_1 y L_2 son perpendiculares, se tiene que:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{5 - y}{4 - x} \cdot \frac{1 - y}{-(2 + x)} = -1$$

$$\begin{aligned} (5 - y)(1 - y) &= (4 - x)(2 + x) \\ y^2 - 6y + 5 &= 8 + 2x - x^2 \\ x^2 - 2x + y^2 - 6y - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Completando cuadrados:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x &= (x - 1)^2 - 1 \\ y^2 - 6y &= (y - 3)^2 - 9 \end{aligned}$$

Así,

$$(x - 1)^2 - 1 + (y - 3)^2 - 9 - 3 = 0$$

Luego, la ecuación del lugar geométrico pedido está dada por:

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 13$$

la cual representa una circunferencia de radio $\sqrt{13}$ centrada en el punto $(1, 3)$ ■

5. Describa mediante una ecuación el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan del centro de $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y + 7 = 0$ y del vértice de $y^2 - 10y - 4x + 37 = 0$.

Solución propuesta:

Para la primera ecuación se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} x^2 + 4x &=& (x+2)^2 - 4 \\ 4y^2 - 8y &=& 4(y-1)^2 - 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (x+2)^2 - 4 + 4(y-1)^2 - 4 + 7 &=& 0 \\ (x+2)^2 + 4(y-1)^2 &=& 1 \\ \dfrac{(x+2)^2}{1^2} + \dfrac{(y-1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} &=& 1 \end{array}$$

la cual representa una elipse centrada en el punto $C(-2, 1)$.

Para la segunda ecuación se tiene que:

$$y^2 - 10y = (y-5)^2 - 25$$

$$\begin{array}{rcl} (y-5)^2 - 25 - 4x + 37 &=& 0 \\ (y-5)^2 &=& 4(x-3) \end{array}$$

la cual representa una parábola con su vértice en el punto $V(3, 5)$.

Luego, sea $P(x, y)$ todos los puntos que equidistan de los puntos C y V, es decir:

$$\begin{array}{rcl} d(C,P) &=& d(P,V) \\ \sqrt{(x-(-2))^2 + (y-1)^2} &=& \sqrt{(3-x)^2 + (5-y)^2} \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 &=& (3-x)^2 + (5-y)^2 \\ x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 &=& 9 - 6x + x^2 + 25 - 10y + y^2 \\ 10x + 8y - 29 &=& 0 \end{array}$$

Así, el lugar geométrico pedido, es la recta de ecuación:

$$y = -\frac{5}{4}x + \frac{29}{8} \quad \blacksquare$$

6. Sean L la recta $y = 4$ y $P_0 = (3, -1)$. Encontrar la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos $P = (x, y)$ tales que la circunferencia con centro P y que pasa por P_0 es tangente a la recta L.

Solución propuesta:

Es claro que los radios, r, de las circunferencias con centro P nombradas en el enunciado del problema, son iguales a la distancia entre los puntos P y P_0 y a la distancia entre la recta L y los puntos P. Luego:

$$d(P, P_0) = \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2} = r$$

$$d(P, L) = |y - 4| = r$$

Así:

$$\begin{aligned}(x-3)^2 + (y+1)^2 &= (y-4)^2\\ (x-3)^2 + y^2 + 2y + 1 &= y^2 - 8y + 16\\ (x-3)^2 + 10y - 15 &= 0\end{aligned}$$

Luego, la ecuación del lugar geométrico pedido está dada por:

$$(x-3)^2 = -10\left(y - \frac{3}{2}\right)$$

la cual representa una parábola con su vértice en el punto $\left(3, \frac{3}{2}\right)$. ■